

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3$
 $125 \cdot 3^3 = 375 \cdot 9 = 3375$

цифры в разности числа: 1; 3; 5; 9

$$\begin{array}{r} 5551 \\ 5556 \\ 5155 \\ 1556 \end{array}$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{24}{2} = 12$$

② $5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1;$

$$\frac{8!}{3 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 320 \cdot 7 = 2240$$

③ $5; 5; 5; 3; 9; 1; 1; 1$

$$\frac{8!}{3 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 3} = 16 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 640 \cdot 7 = 4480$$

④ 6720

② $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
 $\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x$ $\sin 11x + \sin 3x = 2 \sin 7x \cos 4x$

~~cos~~ sin

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \sin \left(4x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n$$

$$\sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$2 \sin \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi k \end{array} \right.$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$$

$$x > 0; y > 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x + 2\lg y}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3\lg x} = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\lg y^{3\lg x} = \lg y^{2\lg y} + \lg x^{\lg x}$$

$$3\lg x \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2 x$$

$$2\lg^2 y - 3\lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$(2\lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$$

$$\lg y^2 = \lg x \quad \lg y = \lg x$$

$$y = \sqrt{x} \quad y = x$$

$$1) x = y^2 \quad y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \quad (y > 0)$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$y = 3 \text{ (подбор)}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -7 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{В силу ОДЗ} \quad y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$2) x = y$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$y = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle KSO = ?$
Стор. треугольника KLM

Пусть 2 ст. являются подобными с тем же коэф. подобия k такой, что все линейные размеры относятся друг к другу как k ($1/k$)

$\frac{SH}{SH_1} = k = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

$2SH = SH_1$
 $2SH = SH + 2R$
 $SH = 2R$

$\sin \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$
 $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$S_{ABC} = 1$

$OO_1 = \frac{1}{3}R \Rightarrow HO_1 = \frac{2R}{3}$
 $\frac{SH}{SO_1} = \frac{2R}{2R + \frac{2R}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{8} = \frac{3}{4}$
 $SO_1 = \frac{4}{3}SH \Rightarrow S_{FPN} = \frac{4}{3}S_{ABC} = \frac{4}{3}$

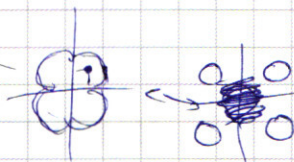
Черновик ☒ Чистовик ☐

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

№5

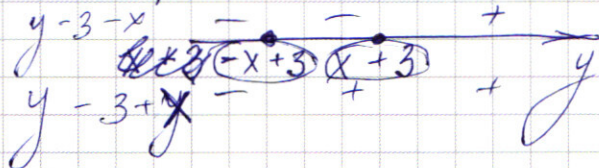
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

центр (4;3)
R = 3



①

при $x \geq 0$



1) $y \leq -x+3$

$$\begin{aligned} -y+3+x - y+3-x &= 6 \\ -2y &= 6 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

$$0 < -x+3$$

$$x < 3$$

$$\begin{cases} x \in (0; 3] \\ y = 0 \end{cases}$$

2) $-x+3 < y < x+3$

$$-y+3+x + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$\begin{cases} 0 < y < 6 \end{cases}$$

3) $y \geq x+3$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y - 6 = 6$$

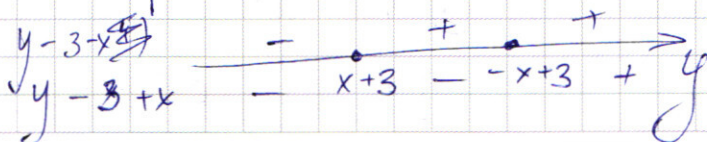
$$y = 6$$

$$6 \geq x+3$$

$$x \leq 3$$

$$\begin{cases} x \in (0; 3] \\ y = 6 \end{cases}$$

при $x \leq 0$



1) $y \leq x+3$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x+3 < y < -x+3$

$$\begin{aligned} y-3-x &= y+3-x-6 \\ -2x &= 6 \\ x &= -3 \\ \begin{cases} x &= -3 \\ 0 < y < 6 \end{cases} \end{aligned}$$

3) $y \geq -x+3$

$$\begin{aligned} y-3-x &= y-3+x-6 \\ 2y-6 &= 6 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

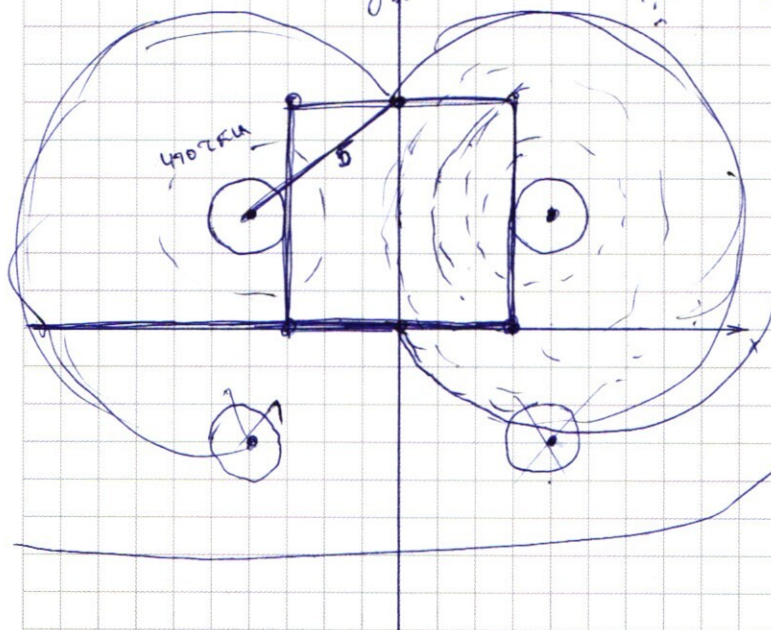
$$6 \geq -x+3$$

$$\begin{aligned} x &\geq -3 \\ \begin{cases} x &\in [-3; 0] \\ y &= 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Объединим: $\begin{cases} y=0 \\ 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$

или $\begin{cases} y \in (0; 6) \\ x = \pm 3 \end{cases}$

$y=6$
 $x \in [-3; 3]$



$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 40 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{cases} \\ 2^x + 3 \cdot 2^{65} &\leq 40 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{aligned}$$

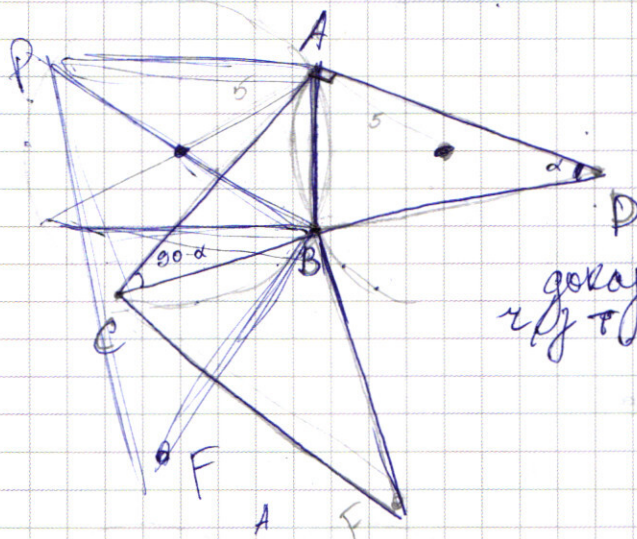
6

$$BF = BD$$

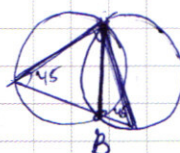
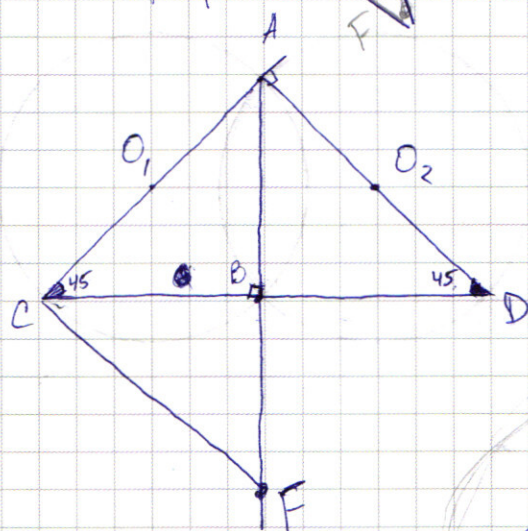
См Д совпадает

с $\triangle B$, тогда

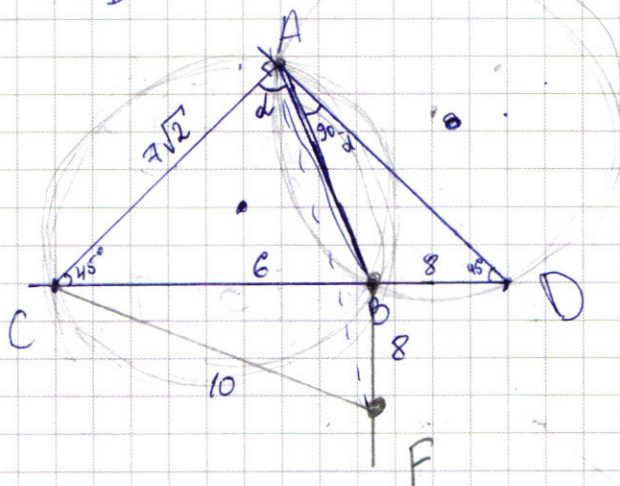
CD - диаметр окр-ти



доказать $\alpha = 45^\circ$
и $\sin \alpha$



$CF = ?$
 $S(ACF) = ?$



$$R = 5$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$BD = 2R \sin(90 - \alpha) = 2R \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{(2R \sin \alpha)^2 + (2R \cos \alpha)^2} = 2R \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = 2R = 10$$

$$AC = 7\sqrt{2} \quad (CD = 14)$$

$$\angle BCF = \arcsin \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5}) = 35\sqrt{2} \sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5})$$

$$\sin(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5}) = \sin 45^\circ \cos(\arcsin \frac{4}{5}) + \cos 45^\circ \sin(\arcsin \frac{4}{5}) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

☒ черновик

☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Состав 8-значных чисел может быть представлен двумя различными способами: $5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1$ или $5; 5; 5; 3; 3; 1; 1; 1$. Иных способов нет, т.к. другие произведения больше 10 $\Rightarrow$ не могут быть цифрой.

Для первого состава существует кол-во чисел, равное числу перестановок 8 чисел, делённое на $72 (6! \cdot 6 \cdot 2)$, т.к. за счёт повторяющихся пар, троек и единиц имеем по 6 одинаковых случаев для каждого варианта с пятеркой и тройкой и по 2 — с единицей!

$$\frac{8!}{6! \cdot 6 \cdot 2} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 10 \cdot 56 = 560$$

Для второго состава имеем по 6 одинаковых случаев для пятерки и единиц $\Rightarrow$ в 36 раз больше $(6 \cdot 6)$, чем число перестановок из 8 чисел

$$\frac{8!}{6 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 20 \cdot 56 = 1120$$

В сумме получили $560 + 1120 = 1680$ чисел
Ответ: 1680 чисел.

№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 3x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = \sin \left(14x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin 4x = 2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x \right) = 0$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi l, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}, \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}; \frac{\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \quad (n, k, l \in \mathbb{Z})$$

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x} \right)^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(1): \frac{y^{5 \lg x}}{x^{5 \lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

прологарифмируем обе части ур-я по основанию 10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg y^{3 \lg x} = \lg y^2 \lg y + \lg x^{\lg x}$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg^2 y + \lg^2 x$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$(2 \lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$$

$$\lg y^2 = \lg x$$

$$x = y^2$$

$$\text{или } \lg y = \lg x$$

$$x = y$$

Если $x = y$, то

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0 \quad | :x (x \neq 0)$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Если $x = y^2$, то

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \quad | :y (y \neq 0)$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases} \text{ (подбором)}$$

1	-2	-7	12
3	1	1	-4
			0

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{(-1 \pm \sqrt{17})^2}{4} = \frac{(17 - 2\sqrt{17} + 1)}{4}$$

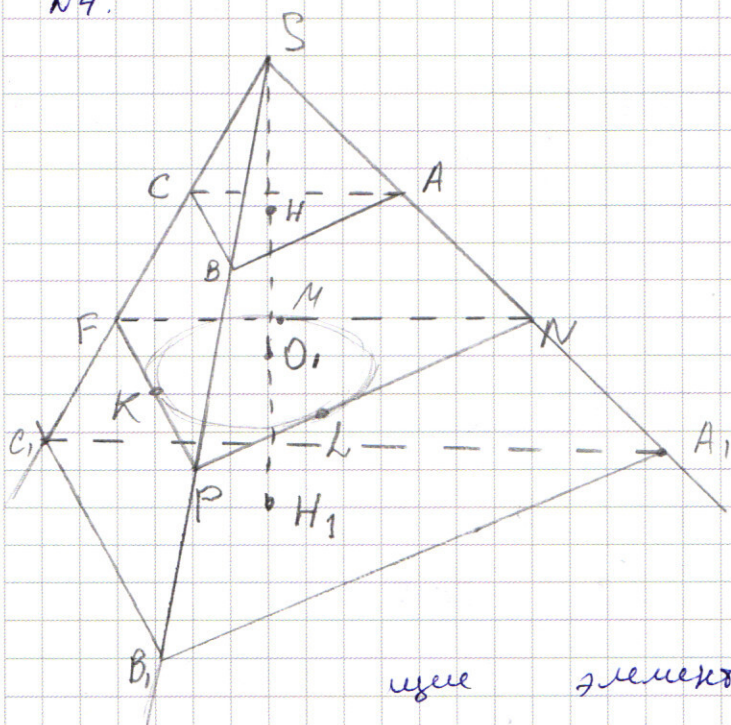
ОДЗ

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

Отв: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$.

N4.



Пусть H, H_1 - точки касания сферы с плоскостями, перпендикулярными SO , тогда $S_{ABC} = 1; S_{A_1B_1C_1} = 4$ $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$.

$\Delta SHB \sim \Delta SH_1B_1$ ($\angle S$ -общий, $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{SH_1}{SH} = k = \frac{B_1H_1}{BH}$

BH и B_1H_1 - соответствующие

элементы в подобных ΔABC и

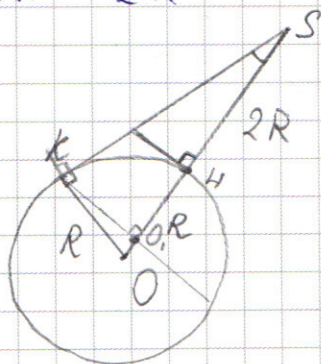
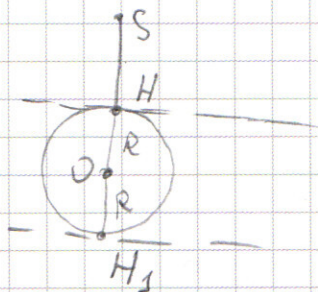
$\Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = k^2 = \frac{4}{1} \Rightarrow k = 2$

$\frac{SH_1}{SH} = 2$

$\frac{SH + 2R}{SH} = 2$

$SH + 2R = 2SH$

$SH = 2R$



в ΔKSO

$\sin \angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

$\angle OKO_1 = \angle KSO$ (т.к. $\angle OKO_1 = 90^\circ - \angle O_1OK$, $\angle KSO = 90^\circ - \angle O_1OK$)

тогда $OO_1 = OK \sin(\arcsin \frac{1}{3}) =$

$= \frac{1}{3} R \Rightarrow SO_1 = 3R - \frac{1}{3} R = \frac{8}{3} R$

$\frac{SH}{SO_1} = \frac{2R}{\frac{8}{3}R} = \frac{3}{4} \Rightarrow SO_1 = \frac{4}{3} SH$

$\Delta NP \sim \Delta ABC$ (отсекается параллельными плоскостями)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

коэф. подобия l .

$\triangle SBH \sim \triangle SPO$, ($\angle S$ - общий; $\angle SHB = \angle SOP = 90^\circ$)

BH и PO - соответств. эл-ты $\triangle ABC$ и $\triangle NPF \Rightarrow \frac{SO}{SH} = l$
 $l = \frac{4}{3}$.

$$\frac{S_{FPN}}{S_{ABC}} = l^2 \Rightarrow S_{FPN} = \frac{16}{9} S_{ABC} = \frac{16}{9}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$; $\frac{16}{9}$.

№5.

$$① |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

При $x > 0$

$$\begin{array}{c} y-3-x \\ y-3+x \end{array} \quad \begin{array}{cccc} - & - & + & + \\ - & -x+3 & + & x+3 \end{array} \quad y$$

$$1) y \leq -x + 3$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$y = 0$$

$$0 < -x + 3$$

$$x < 3$$

$$\begin{cases} x \in (0; 3] \\ y = 0 \end{cases}$$

$$2) -x + 3 < y < x + 3$$

$$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y \in (0; 6) \end{cases}$$

$$3) y \geq x + 3$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6$$

$$6 \geq x + 3$$

$$x \leq 3$$

$$\begin{cases} x \in (0; 3] \\ y = 6 \end{cases}$$

При $x \leq 0$

$$\begin{array}{c} y-3-x \\ y-3+x \end{array} \quad \begin{array}{c} - \quad + \quad + \\ - \quad x+3 \quad - \quad -x+3 \quad + \end{array} \quad y$$

1) $y \leq x+3$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x \in [-3; 0] \end{cases}$$

2) $x+3 < y < -x+3$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

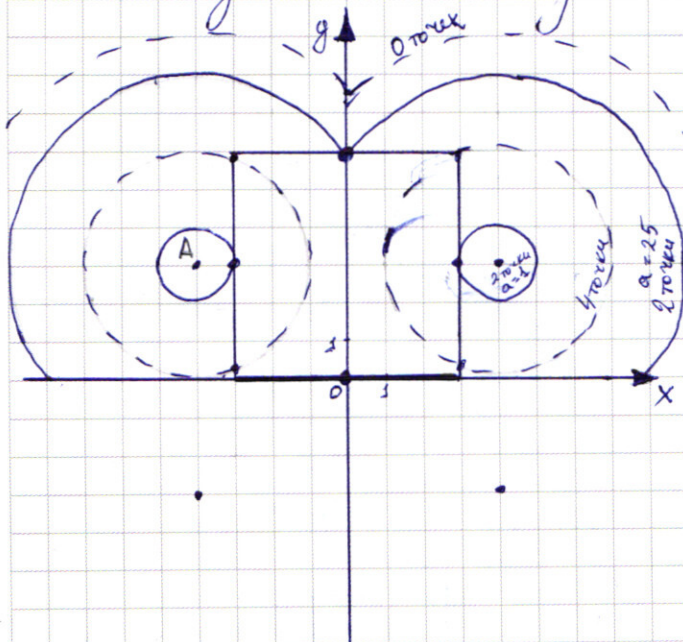
$$\begin{cases} x = -3 \\ y \in (0; 6) \end{cases}$$

3) $y \geq -x+3$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$\begin{cases} y=6 \\ x \geq -3 \end{cases} \Rightarrow y=6, x \in [-3; 0].$$

Объединим 6 случаев: $\begin{cases} y=0 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}; \begin{cases} y \in (0; 6) \\ x = \pm 3 \end{cases}; \begin{cases} y=6 \\ x \in [-3; 3] \end{cases}$



$$(2) (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

Уравнение задает график ~~каждой~~ окружности с центром в $(4; 3)$, симметрично отраженной относительно оси Ox и Oy во все 4 четверти 1-й четверти. Радиус $= \sqrt{a}$

Пересечь или касаться квадрата (другого графика) могут окружности, находящиеся в 1-й и 2-й четверти, поэтому работаем только с ними

$$OA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = R \Rightarrow a = 25$$

При касании

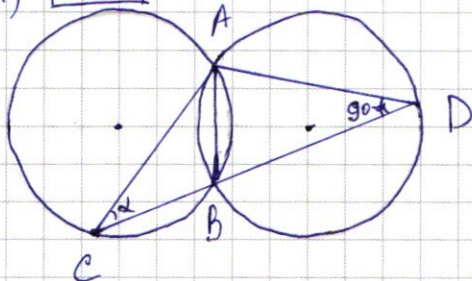
$$a = 1$$

Отвечает: 1; 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

а) $R=5$



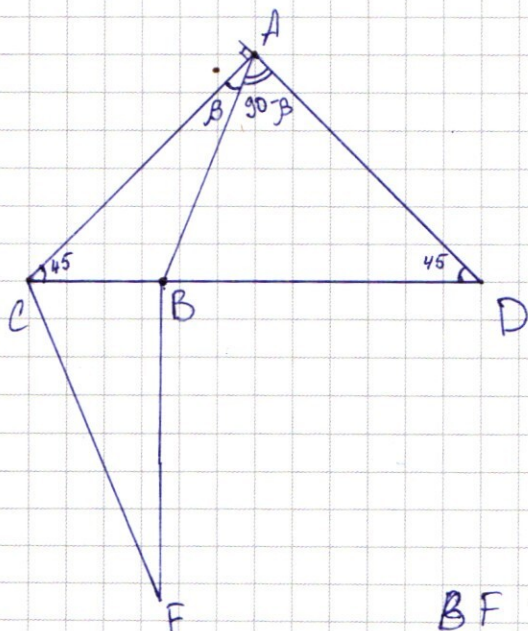
Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда $\angle ADC = 90^\circ - \alpha$

По расширению т. синусов

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R, \text{ но при этом } \frac{AB}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R$$

$$\alpha = 90^\circ - \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$



Пусть $\angle CAB = \beta$, тогда $\angle BAD = 90^\circ - \beta$,

в $\triangle ABC$ по расширению т. синусов

$$\frac{BC}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin \beta$$

в $\triangle ABD$ аналогично $BD = 2R \sin(90^\circ - \beta)$

$$BD = 2R \cos \beta$$

$$BF = BD = 2R \cos \beta$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{(2R \sin \beta)^2 + (2R \cos \beta)^2} =$$

$$= 2R \sqrt{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta} = 2R = 10.$$

б) $CB=6$

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 = BD$$

$$CD = 6 + 8 = 14$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2}$$

$$\text{В } \triangle BCF \quad \sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \angle BCF = \arcsin \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \right) =$$

$$= 35\sqrt{2} \sin \left(45^\circ + \arcsin \frac{4}{5} \right) = 35\sqrt{2} \left(\sin 45^\circ \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) + \right. \\ \left. + \cos 45^\circ \sin \left(\arcsin \frac{4}{5} \right) \right) = 35\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \left(\arccos \frac{3}{5} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} \right) = \\ = 35 \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = 35 \cdot \frac{7}{5} = 49$$

Ответ: а) 10 ; б) 49.