

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - (2 \cos 7x \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (-2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0, \\ -2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad | : \sqrt{2} \quad (1)$$

$$-2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0 \quad | : (-2) \quad (2)$$

$$\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad 7x + \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 7x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x = 0$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x - \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{4x + 7x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{4x - 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; k \in \mathbb{Z}$

N3

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)} \quad (1)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad x^2 + x(-2y-4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (2y+4)^2 + 4(3y^2-12y) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 4^2(y-1)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Могут при выборе знака} \\ \text{из } \pm \text{ не измен. м.к. } \pm \text{ рас-} \\ \text{крываем оба случая.} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x = 3y & (I) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4-y & (II) \end{cases}$$

$$(1) \quad \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(I) \quad \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2\lg(3y^2)} \quad \text{Прологарифмируем по } \lg$$

$$\lg(3y) \cdot \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = \lg y \cdot 2\lg(3y^2)$$

$$(\lg y + \lg 3)(4\lg y - \lg 3) = 2\lg y(2\lg y + \lg 3)$$

$$\text{Пусть } \lg y = t, \quad \lg 3 = \alpha$$

$$(t + \alpha)(4t - \alpha) = 2t(2t + \alpha)$$

$$4t^2 - t\alpha + 4t\alpha - \alpha^2 = 4t^2 + 2t\alpha$$

$$t\alpha = \alpha^2 \quad | : \alpha \neq 0$$

$$t = \alpha \quad \lg y = \lg 3 \Rightarrow y = 3 \quad x = 3y = 9$$

$$(x; y) = (9; 3)$$

$$(II) \quad \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(y(4-y))} \quad \text{Прологарифмируем по } \lg$$

$$\lg(4-y) \cdot \lg\left(\frac{y^5}{4-y}\right) = 2\lg y \cdot \lg(y(4-y))$$

$$\lg(4-y) \cdot (5\lg y - \lg(4-y)) = 2\lg y(\lg y + \lg(4-y))$$

$$\text{Пусть } \lg(4-y) = \delta; \quad \lg y = \beta$$

$$\delta(5\beta - \delta) = 2\beta(\beta + \delta)$$

$$5\beta\delta - \delta^2 = 2\beta^2 + 2\beta\delta$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\beta^2 - 3\beta r + r^2 = 0$$

$$D = 9r^2 - 8r^2 = r^2$$

$$\beta = \frac{3r \pm r}{2}$$

$$\begin{cases} \beta = 2r \\ \beta = r \end{cases} \begin{cases} \lg y = 2 \lg(4-y) & (3) \\ \lg y = \lg(4-y) & (4) \end{cases}$$

$$(3) \quad y = (4-y)^2$$

$$y^2 - 8y + 16 - y = 0$$

$$y^2 - 9y + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x = 4 - y \end{cases} \Rightarrow x; y \in (0; 4)$$

$$y = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} > 4 \Rightarrow \text{не евл. реш.}$$

$$y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \in (0; 4)$$

$$x = 4 - \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$(4) \quad y = 4 - y$$

$$y = 2$$

$$x = 2$$

$$(2; 2)$$

Ответ: $(9; 3); (2; 2); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$

N5.

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) - ур-ние квадрата с центром в точке $(0; 3)$, стороной 6, диагонали лежат на прямых $y = 3 + x$, $y = 3 - x$

$$y = 3 - x$$

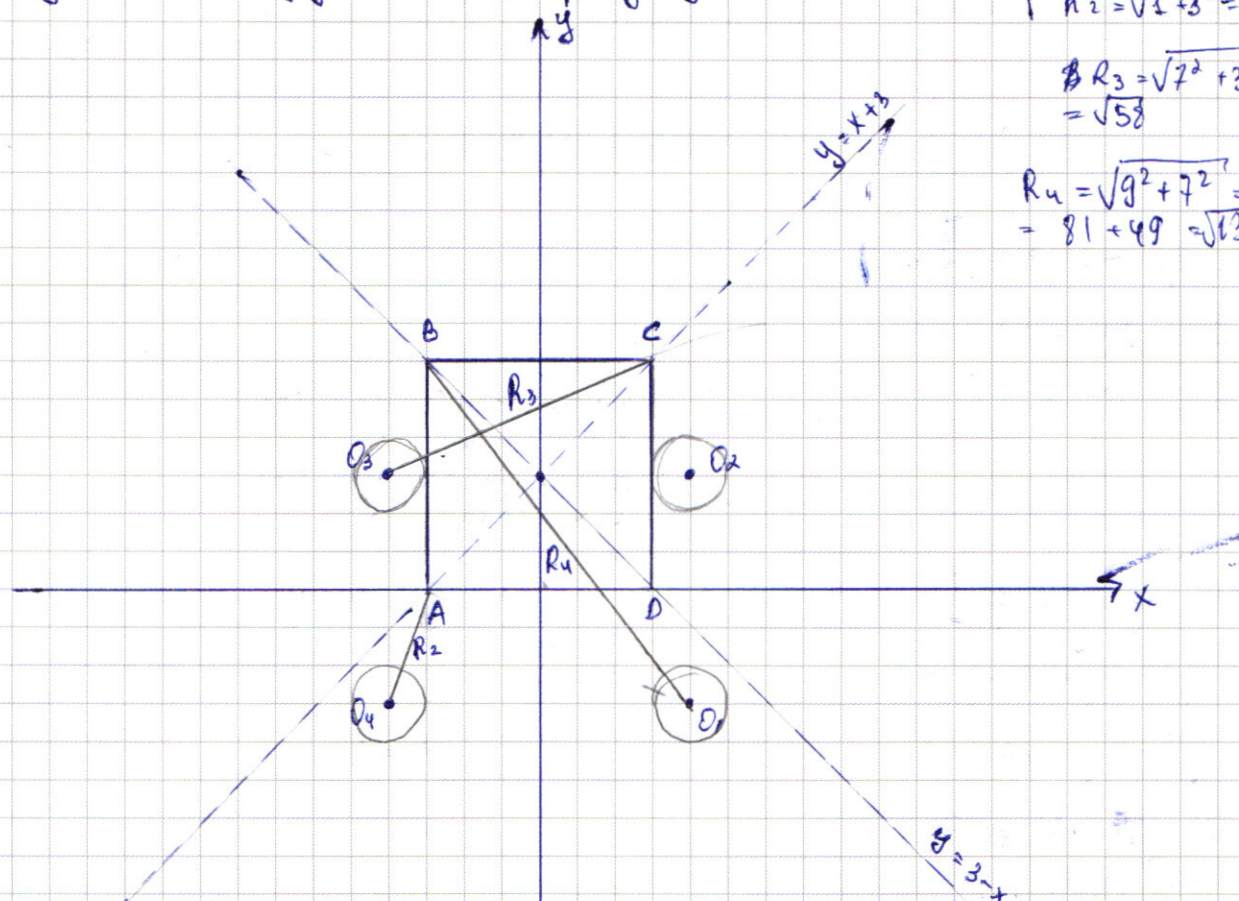
(2) - ур-ние окружности с центром в т. $(4; 3)$ т.к.

x и y по модулю, и радиусом $R = \sqrt{a}$

$$R_2 = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$R_3 = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58}$$

$$R_4 = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{130}$$



Пр1) Система имеет ровно 2 решения, если $a = 1$ (в этом случае окр. O_3 и O_2 касаются сторон квадрата, а окр. O_4 и O_1 не имеют с ним общих точек)

2) Далее при $a \in (1; \frac{10}{R})$ система имеет 4 решения

3) при $a = \frac{10}{R}$ система имеет 4 решения

4) при $a \in (\frac{10}{R}; \frac{58}{R}]$ система имеет 6 решений

5) при $a \in (\frac{58}{R}; \frac{130}{R})$ система имеет 4 решения

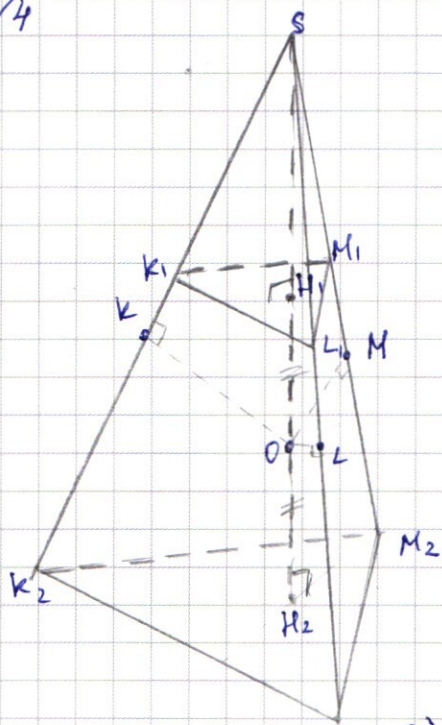
6) при $a = \frac{130}{R}$ система имеет 2 решения (окр. O_1 и O_4 пересекают точки B и C , O_3 и O_2 не имеют общих точек). $a = R^2$

7) Система имеет 2 решения при $a = 1$ и $a = 130$

Ответ: $a = 1$; $a = 130$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Решение

1) $(K_1L_1M_1) \parallel (K_2M_2L_2)$ т.к. $(K_1L_1M_1) \perp SO$ и $(K_2M_2L_2) \perp SO$

2) $\Delta K_1L_1M_1 \sim \Delta K_2M_2L_2$

$$k^2 = \frac{S_{K_1L_1M_1}}{S_{K_2M_2L_2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Значит $K_1L_1 = \frac{1}{2} K_2L_2$;
 $K_1L_1 \parallel K_2L_2$; $\Rightarrow$

$\Rightarrow K_1L_1$ - средняя линия ΔK_2SL_2

Аналогично L_1M_1 - ср. линия ΔSL_2M_2

K_1M_1 - ср. линия ΔK_2SM_2

3) Значит $SH_1 = H_1H = 2R$ (R - радиус сферы)

$WH_1 = WK = X$ ($\Delta OH_1W = \Delta KOW$ по гипотенузе и катету)

$K_2H_2 = K_2K = X$ (отрезки касательных)

$$XH_2 = WH_1 = \frac{X}{2} \Rightarrow K_2X = X - \frac{X}{2} = \frac{X}{2}$$

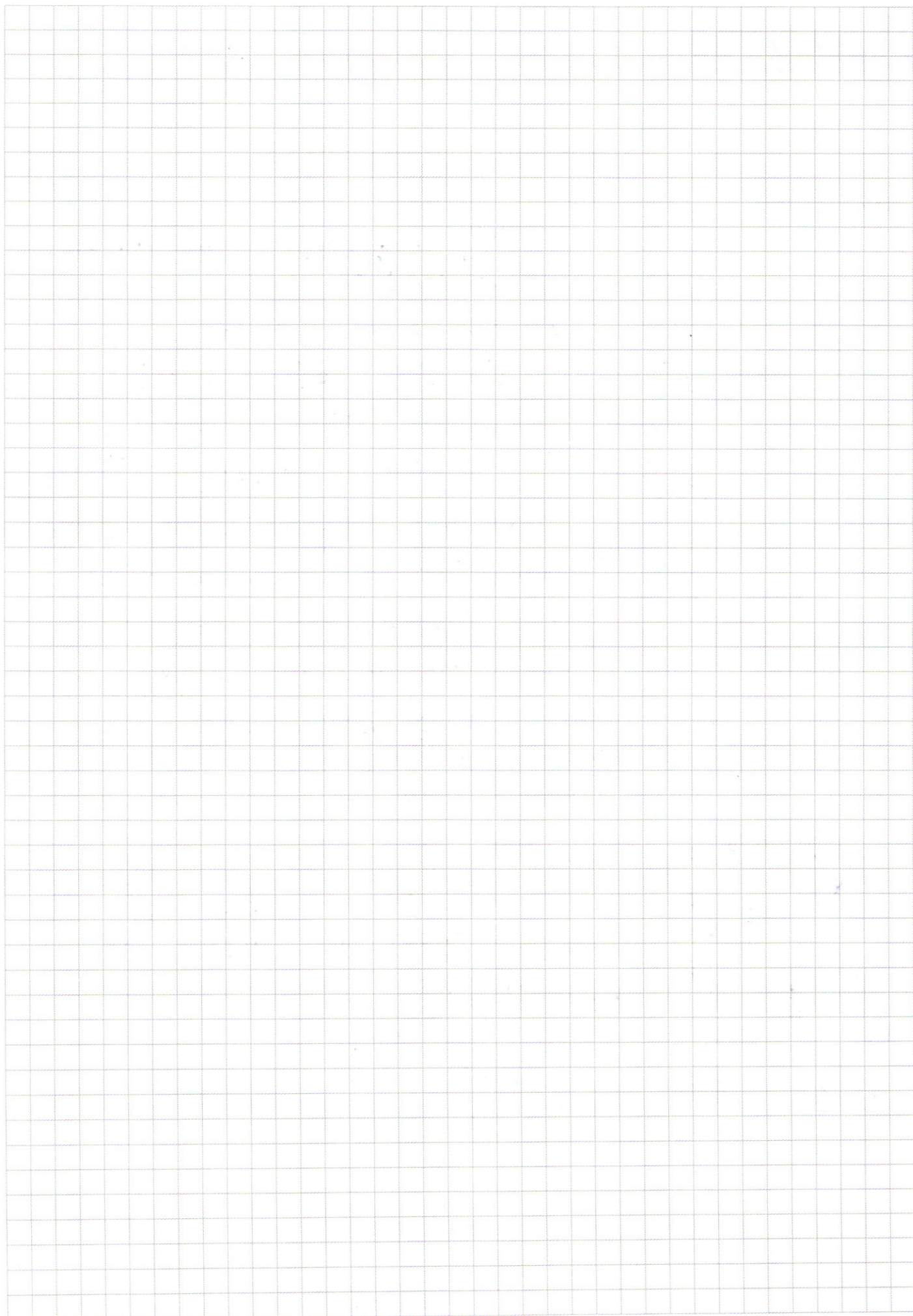
$$\text{В } \Delta WK_2: \cos \alpha = \frac{K_2X}{K_2W} = \frac{X/2}{3X} = \frac{1}{6}$$

$$\angle K_2SH_2 \angle (KSO) = 90^\circ - \angle SK_2H = 90^\circ - \alpha$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\angle KSO = \arcsin \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$$

Ответ: $\arcsin \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

.....

Число соединений из цифр

$$\begin{matrix} 5 & 3 & 3 & 1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 \end{matrix}$$

↑
II

$$\begin{matrix} \text{ко-во} & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & \text{либо} \\ & \uparrow & & \\ & I & & \end{matrix}$$

I случай: ко-во чисел = $8! - a$, где

a - ко-во чисел перестановок нескольких раз

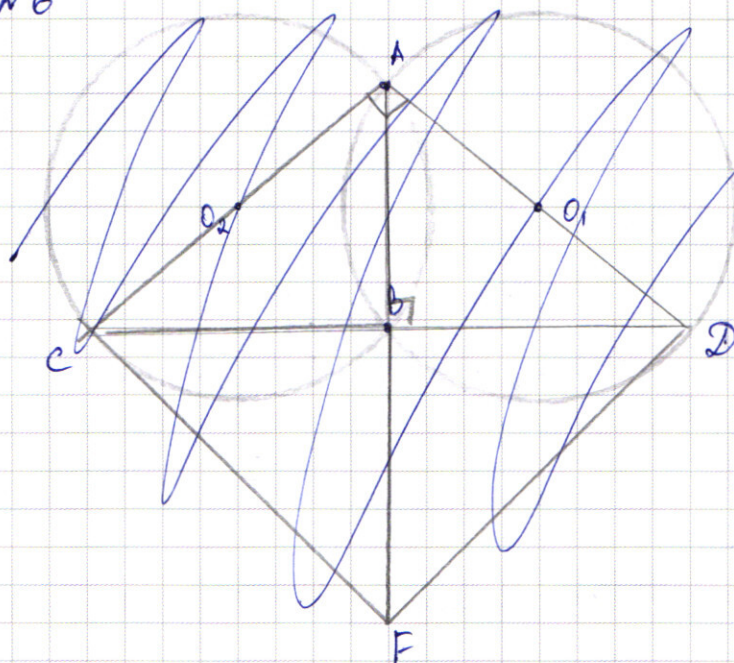
$$a = C_7^3 + C_6^3 + C_5^3 \quad \text{или} \quad a = C_8^3 - C_7^3 \cdot C_6^2$$

II случай

$$8! - b \quad b = 4! \cdot C_8^3 \cdot C_7^3 \cdot C_6^1 \cdot C_5^1$$

$$\Sigma = 2 \cdot 8! - C_8^3 \cdot C_7^3 (C_6^1 \cdot C_5^1 + C_6^2) \quad C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

N6



Решение
перпендикуляр к CD
проходит через B, значит

$$FD = \sqrt{FB \cdot BK}$$

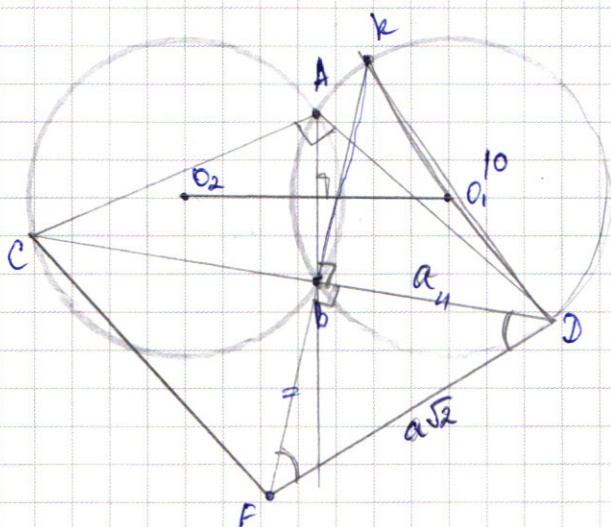
$$a\sqrt{a} = \sqrt{a \cdot BK}$$

$$2a^2 = aBK^2 \quad BK^2 = 2a^2 \\ BK = \sqrt{2}a$$

$$(\sqrt{2}a)^2 + a^2 = 100$$

$$a^2 = \frac{100}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

~~ABCD~~ = ACFD - параллелограмм



N7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y)y}$$

$$\lg(u-y) \cdot \frac{1}{2} \lg\left(\frac{y^5}{u-y}\right) = \lg y \cdot 2 \lg((u-y)y)$$

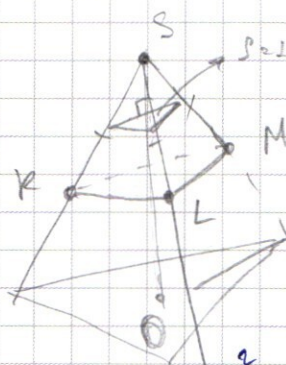
$$\lg(u-y) \cdot (5\lg y - \lg(u-y)) = 2\lg y \cdot (\lg(u-y) - \lg y)$$

$$5(5\beta - 5) = 2\beta(5 - 5)$$

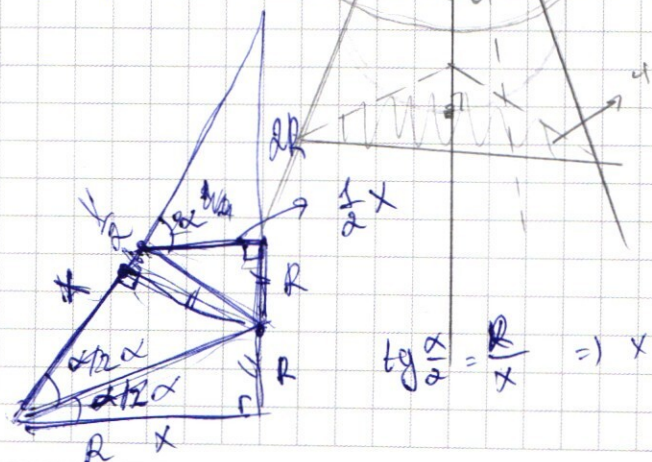
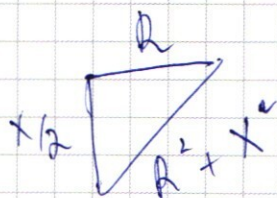
$$5\sigma\beta - \sigma^2 = 2\beta\sigma - 2\beta^2$$

$$2\beta^2 + 3\beta\gamma - \gamma^2 = 0$$

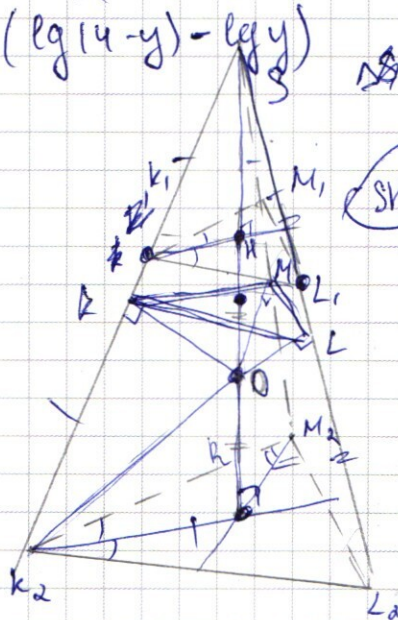
$$\mathcal{D} = 9f^2 + 8f^2 = 17f^2$$



$$R^2 + \frac{x^2}{u} = R^{2+x^2}$$

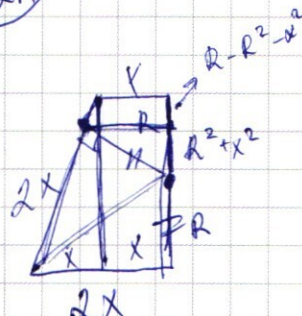


$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{x} \Rightarrow x = R / \tan \frac{\alpha}{2}$$

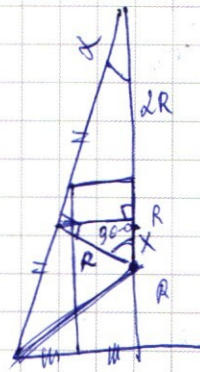


$$\Delta k_1 M_1 \sim \Delta k_2 L_2 M_2$$

$$SH = 2R$$



$$x = R \sin \alpha$$



$$S = k_L \cdot k_C$$

~~$$I = R_L \cdot R_C \sin$$~~

$$4 = R^2 + \frac{R^2}{4 \tan^2 \alpha} = R^2 \left(1 + \frac{1}{4 \tan^2 \alpha} \right)$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

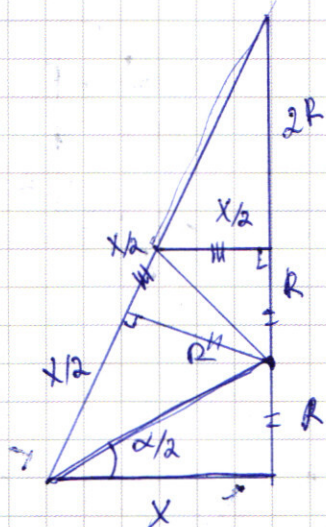
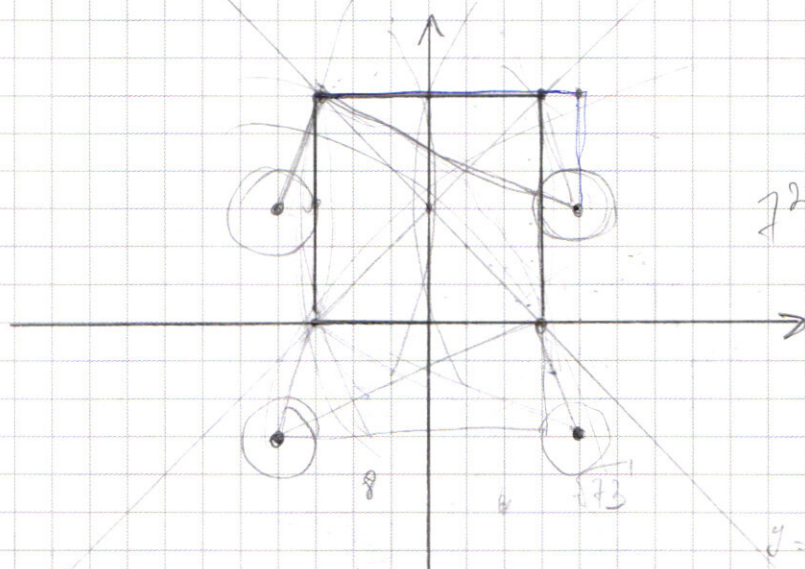
$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

$$a=1 \text{ 2реш}$$

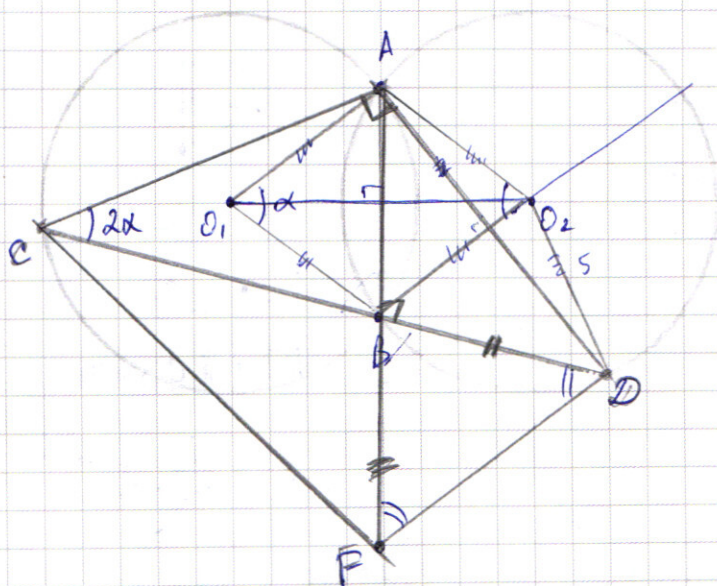
$$7^2+3^2=49+9=58$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4R}{R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$X = \frac{R}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5 5 5 3 3 3 1 1

8!

8!

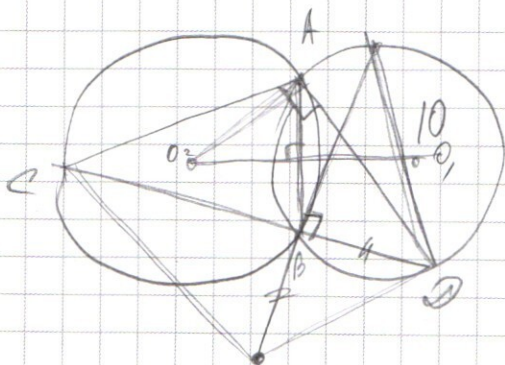
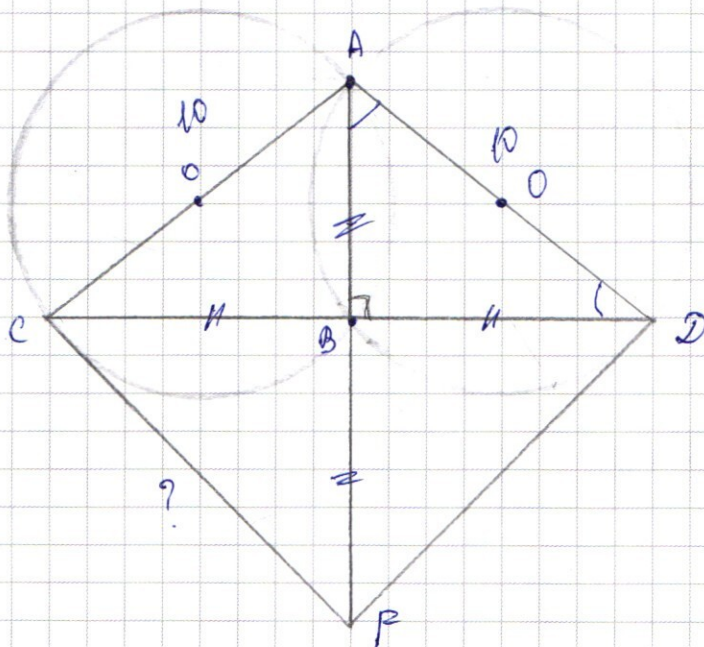
$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{672}{120} = 56$$

$$C_8^3 = 56$$

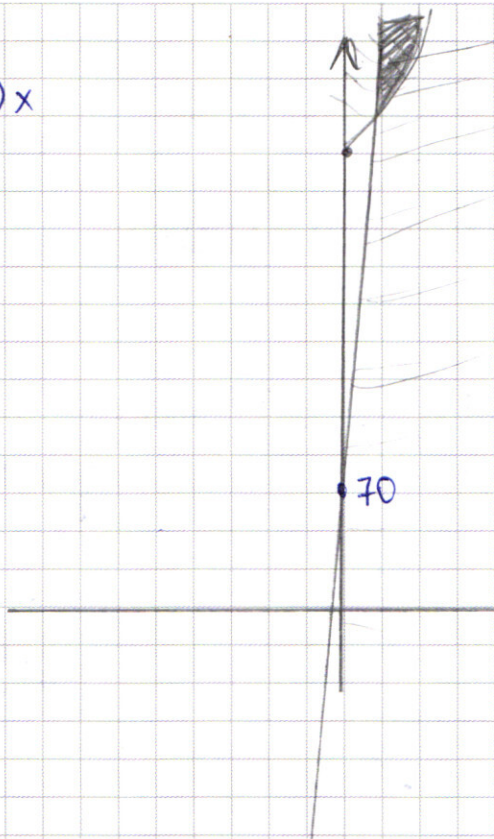
$$C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{6x}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$



$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$



$$\begin{array}{r} 12 \cdot 12 : 4 \\ 55 \ 33 \ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15.5 \\ 5 \quad 5 \\ 5 \quad 5 \\ 5 \quad 5 \\ 5 \end{array}$$

$$C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 10$$

$$a = \frac{C_8^3 \cdot C_7^2 \cdot C_6^2}{8! \cdot 7! \cdot 6!}$$

$$\frac{8! \cdot 7! \cdot 6!}{5! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y' = 2^x \ln 2 \cdot 2^{65}$$

$$-2\sin 4x - \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$-2\sin 4x - \sqrt{2} (\overset{\cos}{3x+4x}) + \sqrt{2} (\overset{\sin}{3x+4x}) = 0$$

$$-2\sin 4x - \sqrt{2} (\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x - \sin 4x \cos 3x - \sin 3x \cos 4x) = 0$$

$$-2\sin 4x - \sqrt{2} (\sin 4x (-\sin 3x - \cos 3x) + \cos 4x (\cos 3x - \sin 3x)) = 0$$

$$\sin 4x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \sin 7x \right) = 0 \quad ?$$

$$\sin 4x - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$



$$\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\frac{11}{2}x = \frac{4\pi}{8} + \frac{\pi}{8} + \pi k = \frac{5\pi}{8} + \pi k$$

$$x = \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{11} \pi + \frac{2}{11} \pi$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(1) x = \frac{6y}{2} = 3y$$

$$(2) x = \frac{-2y + 8}{2} = 4 - y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$\lg \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} = \lg y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$(3y)^{\lg \left(\frac{y^4}{3} \right)}$$

$$\frac{8}{2} - \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (2y + 4)^2 + 4(3y^2 - 12y) = 0$$

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 0$$

$$= 16y^2 - 32y + 16 = 0$$

$$16(y^2 - 2y + 1) = 0$$

$$16(y - 1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y + 4 + 4(y - 1)}{2} & (1) \\ x = \frac{2y + 4 - 4(y - 1)}{2} & (2) \end{cases}$$

$$ODZ: x > 0 \quad xy > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$4 - y > 0$$

$$0 < y < 4$$

$$\lg 3y \cdot \lg \left(\frac{y^4}{3} \right) = \lg y \cdot 2 \lg(3y^2)$$

$$(\lg 3 + \lg y)(4 \lg y - \lg 3) = 2 \lg y (\lg 3 + 2 \lg y)$$