

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 6$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 2

$$\begin{aligned} \cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) &= \sqrt{2} \cos(14x) \\ -2\sin(7x)\cos(4x) - 2\sin(4x)\cos(7x) &= \sqrt{2} \cos(14x) \\ -2(\sin(4x)(\sin(7x) + \cos(7x))) &= \sqrt{2}(\cos(7x) - \sin(7x))(\cos(7x) + \sin(7x)) \\ (\cos(7x) + \sin(7x))(\sqrt{2}(\cos(7x) - \sin(7x)) + 2\sin(4x)) &= 0 \\ (\cos(7x) + \sin(7x))(\cos(7x) - \sin(7x) + \sqrt{2}\sin(4x)) &= 0 \end{aligned}$$

①  $\cos(7x) + \sin(7x) = 0$

$\cos(7x) = -\sin(7x)$ ,  $\cos(7x) \neq 0$  (противоположные тригонометрические функции)

$\operatorname{tg}(7x) = -1$

$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n - \text{целое}, \quad x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n - \text{целое}$

②  $\cos(7x) - \sin(7x) = -\sqrt{2} \sin(4x) \quad | : \sqrt{2}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(7x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(7x) = -\sin(4x)$

$\cos \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin(4x) = 0$

$2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)\right) = 0$

а)  $\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)\right) = 0$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \pi k, k - \text{целое}, \quad \frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi k, k - \text{целое}$

$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, k - \text{целое}, \quad x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k - \text{целое}$

б)  $\cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right)\right) = 0$

$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \frac{\pi}{2} + \pi m, m - \text{целое}, \quad \frac{\pi}{4} - 11x = \pi + 2\pi m, m - \text{целое}$

$11x = \frac{-3\pi}{4} - 2\pi m, \quad x = \frac{-3\pi}{44} - \frac{2\pi m}{11}, m - \text{целое}$

Ответ:  $x_1 = -\frac{\pi}{28} + \pi n$ ,  $n$ -целое,  
 $x_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}$ ,  $k$ -целое,  
 $x_3 = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi m$ ,  $m$ -целое.

✓ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^{2\lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Решение

$x > 0, y > 0$

$$x^2 - x(2y+4) - (3y^2-12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16(y^2 - 2y + 1) = (4(y-1))^2$$

①  $D = 0$

$$4(y-1) = 0, y = 1$$

$$x = \frac{2y+4}{2} = y+2, y=1, x=3$$

Проверим

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(3)} = 1^{2\lg(3)}$$

$$\frac{1}{3^{\lg(3)}} = 1 \quad (\text{прологифицируем это выражение})$$

$$-\lg^2(3) = \lg(1)$$

$$-\lg^2(3) = 0 - \text{ложно}$$

$\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$  - не является решением системы

②  $D > 0$

$$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} = y+2 \pm 2(y-1)$$

$$x_1 = y+2+2y-2 = 3y, x_2 = y+2-2y+2 = 4-y$$

$$y-1 > 0, y > 1 \quad (\text{из } D > 0) \quad y > 1 (*)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При  $x = 3y$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(x)} = y^2 \lg(3y^2) \quad \text{транспонирование}$$

это выражение

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg(x) = 2 \lg(y) \lg(xy)$$

$$5 \lg(y) \lg(x) - \lg^2(x) = 2 \lg^2(y) - 2 \lg(y) \lg(x) = 0$$

$$\lg^2(x) - 3 \lg(x) \lg(y) + 2 \lg^2(y) = 0$$

$$(\lg(x) - \lg(y))(\lg(x) - 2 \lg(y)) = 0$$

при  $x = 3y$

$$\lg(3y) = \lg(y)$$

$3y = y$ ,  $y = 0$  - не удовлетворяет условию (\*)

$$\lg(3y) = \lg(y^2)$$

$$3y = y^2, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 3$$

$y_1 = 0$  - не удовлетворяет условию (\*)

$y_2 = 3$  - удовлетворяет условию (\*)

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$$

При  $x = 4 - y$

$$\lg(4 - y) = \lg(y), \quad 4 - y = y, \quad y = 2 \text{ - удовлетворяет условию (*)}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\lg(4 - y) = y^2, \quad y^2 + y - 4 = 0, \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ - не удовлетворяет условию (*)}$$

$$y_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - \text{удовлетворяет условию (*)}$$

$$x_2 = 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{8+1-\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ:  $x_1 = 9, y_1 = 3; x_2 = 2, y_2 = 2; x_3 = \frac{9-\sqrt{17}}{2}, y_3 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ .

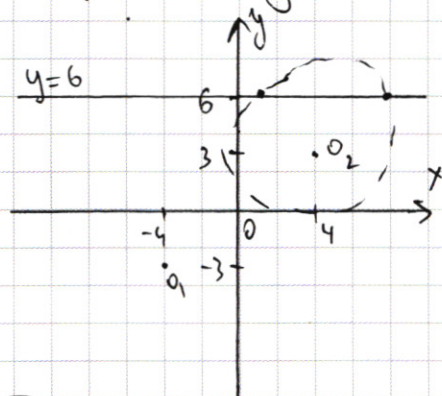
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

Найти все  $a$ , чтобы было решение  
 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$  - две окружности с центрами в  
 точках  $O_1(4; 3), O_2(-4; -3)$  и радиусами  $R = \sqrt{a}$

I случай

$$|y-3-x| = y-3-x, |y-3+x| = y-3+x$$

$$y-3-x + y-3+x = 6, 2y = 12, y = 6$$



$$\sqrt{a} > 3$$

$$a > 9$$

$$\sqrt{a} < 9$$

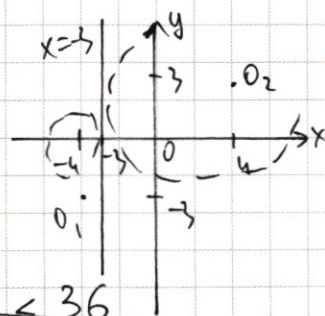
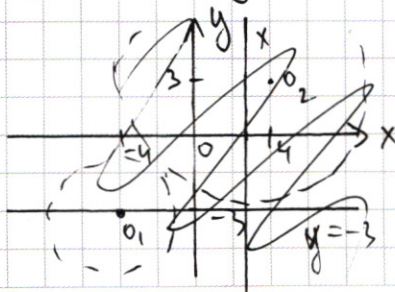
$$a < 81$$

$$9 < a < 81$$

II случай

$$|y-3-x| = y-3-x, |y-3+x| = -y+3-x$$

$$y-3-x - y+3-x = 6, -2x = 6, x = -3$$



$$\sqrt{a} < 6, a < 36$$

$$\sqrt{a} \geq 1, \sqrt{a} \neq 7$$

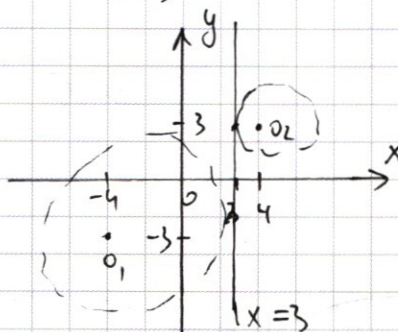
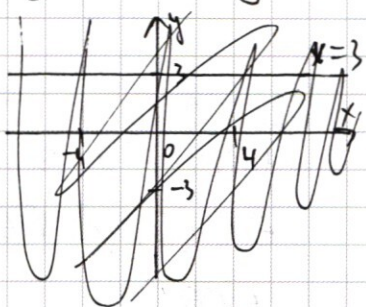
$$1 < a < 49$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

III случай

$$|y-3-x| = -y+3+x, |y-3+x| = y-3+x$$

$$-y+3+x + y-3+x = 6 \quad 2x = 6, x = 3$$



$$\sqrt{a} > 1$$

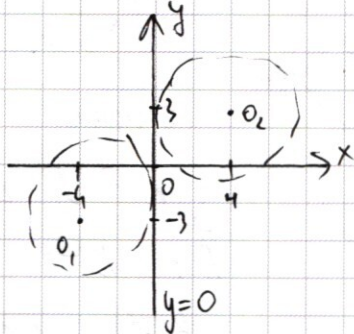
$$\sqrt{a} < 7$$

$$1 < a < 49$$

IV случай

$$|y-3-x| = -y+3+x, |y-3+x| = -y+3-x$$

$$-y+3+x - y+3-x = 6 \quad y = 0$$



$$\sqrt{a} = 4, a = 16$$

$$\begin{cases} 9 < a < 81 \\ 1 < a < 49 \\ a = 16 \end{cases}$$

Ответ:  $a = 16$

~1

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Можно представить ~~восьмизначное~~ ~~восьмизначное~~ восьмизначное число

①  $3; 3; 3; 5; 5; 5; 1; 1$

$n_1$  — кол-во возможных чисел

$$n_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 10 \cdot 8 \cdot 7 = 560$$

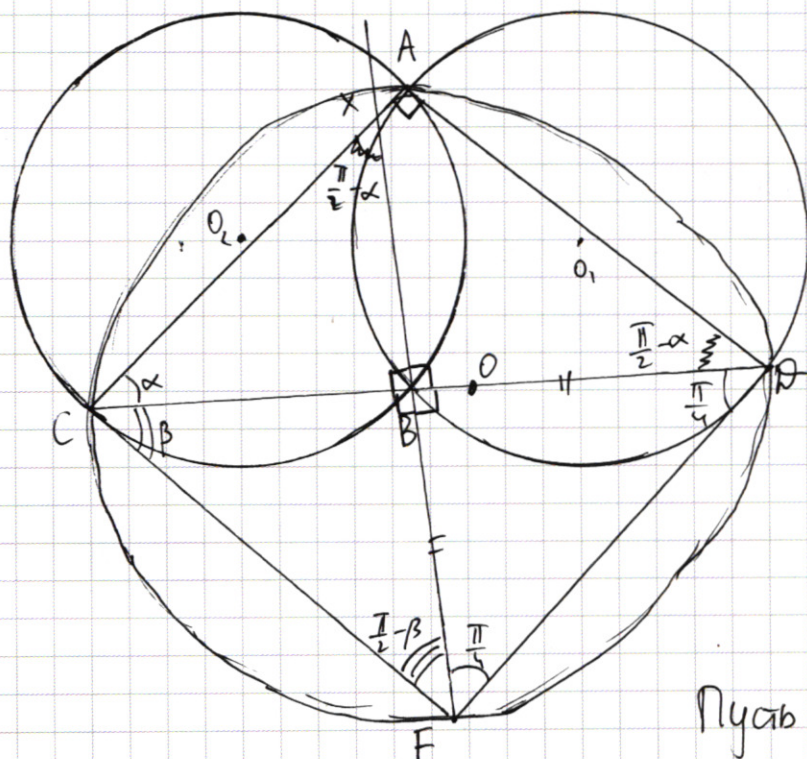
②  $9; 3; 5; 5; 5; 1; 1; 1$

$$n_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = 20 \cdot 8 \cdot 7 = 1120$$

$$N = n_1 + n_2 = 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680.

~ 6



Дано:  $\omega(O_1; R)$   
 $\omega(O_2; R), R=5$

$C \in \omega(O_2; R), D \in \omega(O_1; R)$

$B \in CD$   
 $BF \perp CD$   
 $|BF| = |BD|$

а)  $BC = 6$

Найти: а)  $|CF|$  - ?

б)  $S(ACF)$

Решение

Из  $\triangle FBD, \angle FBD = \frac{\pi}{2}$

$BF = BD$

$\angle BFD = \angle BDF = \frac{\pi}{4}$

Пусть  $\angle XCB = \alpha, \angle BCF = \beta$

Рассм  $CADF$ -четырёхугольник

$$\angle CAD + \angle CFR = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} - \beta$$

$$\angle ACF + \angle ADF = \alpha + \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \beta$$

$$\frac{5\pi}{4} - \beta = \frac{3\pi}{4} + \beta, \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Опишем около  $CADF$ -окружность  $\omega(O; R)$

$O \in CD, OC = OD$  (по св. вписанного прямоугольного треугольника)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle CFP$  — прямоугольный и вписанный в  $\omega(O; r)$

$\triangle CFP = \triangle CAP$  (так как вписаны в одну окружность и имеют общую сторону и один прямой угол)

$CAPF$  — квадрат ( $CF = FP$ ,  $\angle CFP = \angle FCA = \angle CAP = \frac{\pi}{2}$ )

Тогда получим, что  $PA \perp BF$ ,  $CP \perp AB$

$$\angle CBA = \frac{\pi}{2} \text{ (вписанный)}, \angle CO_2A = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

$O_2 \in CA$  аналогично,  $O_1 \in AD$

$$CA = AD = 2R = 10 \text{ (из условия)}$$

$$CF = 10$$

$$\delta) BC = 6$$

$$BA = \sqrt{CA^2 - CB^2} = \sqrt{64} = 8$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 2BA \cdot CB = 48$$

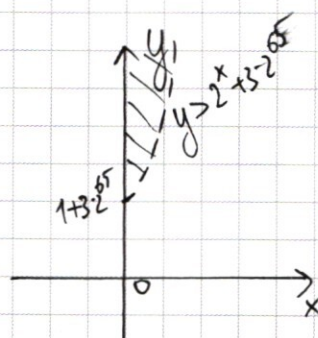
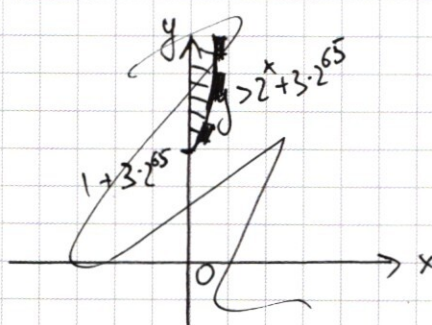
Ответ: а)  $|CF| = 10$ , б)  $S_{ACF} = 48$

✓ 7

Найти члны  $(x; y)$  удовлетворяющие системе.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$



$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1)x$$

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x - 2^{64} + 1$$

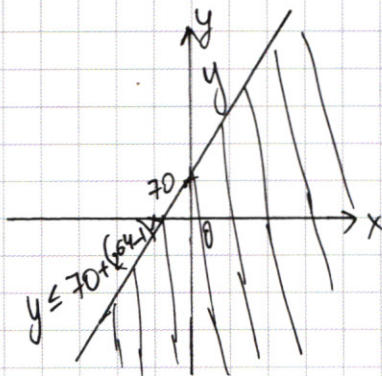
$$2^x \ln(2) - 2^{64} + 1 = 0$$

$$2^x \ln(2) = 2^{64} - 1$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln(2)}$$

$$2^x = 2^{\log_2 \left( \frac{2^{64} - 1}{\ln(2)} \right)}$$

$$x = \log_2 \left( \frac{2^{64} - 1}{\ln(2)} \right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten work on graph paper showing calculations and diagrams.

**Top Left:** Calculations involving  $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1) \times$  and  $2^x \ln(2) = \ln(2^{2^{64}}) = 2^{64} \ln(2)$ .

**Top Center:** A small table of numbers:

|    |    |   |
|----|----|---|
| 33 | 75 | 3 |
| 11 | 25 | 3 |
| 3  | 75 | 3 |
| 12 | 5  | 5 |
| 25 | 5  | 5 |
| 5  | 5  | 5 |

**Top Right:** Calculation ①:  $33355511$ ,  $n = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 7 \cdot 8}{1}$ .

**Middle Right:** Calculation ②:  $93715551$ ,  $n = \frac{8!}{3! \cdot 3!} =$ .

**Bottom Left:** Calculations involving  $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1) \times$  and  $2^x \ln(2) - 2^{64} - 1 = 0$ .

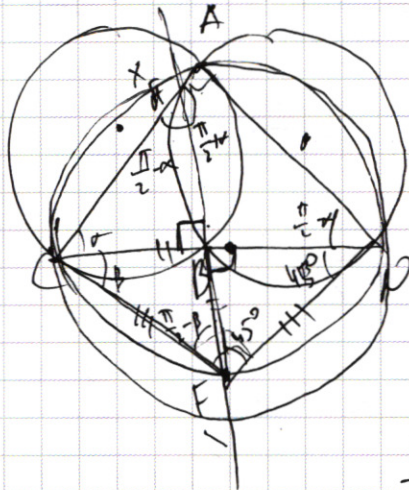
**Bottom Center:** A diagram showing a coordinate system with axes  $x$  and  $y$ , and a curve labeled  $69 + 64$ .

**Bottom Right:** A diagram showing a coordinate system with axes  $x$  and  $y$ , and a curve labeled  $69 + 64$ .



$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ & 25 \\ & 5 \\ & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$\angle = \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{CX}{CD} = \frac{XB}{DA} = \frac{CB}{CA}$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\beta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{4} = 2\pi$$

$$\frac{7\pi}{4}$$

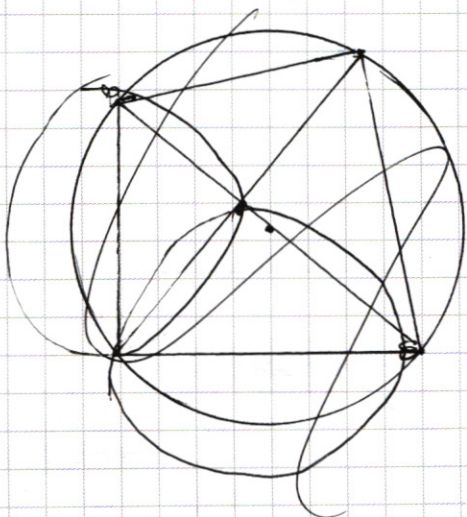
$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{4} + \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha = 2\pi$$

$$\frac{7\pi}{4} + \beta = 2\pi, \text{ then } \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = \frac{\pi}{2} - \alpha + \alpha \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \beta + \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2}$$

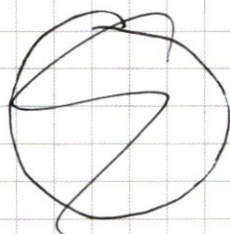
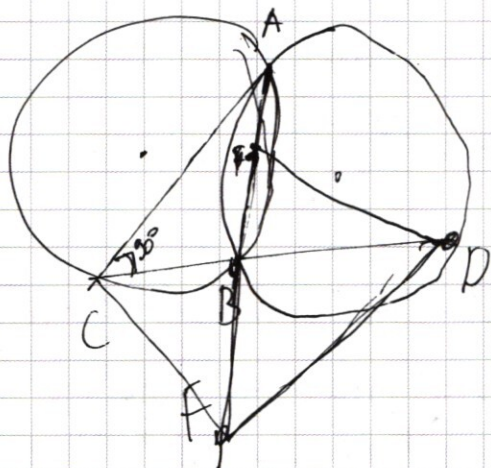
$$\beta + \frac{\pi}{4} - \beta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$



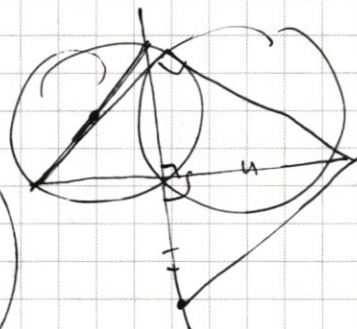
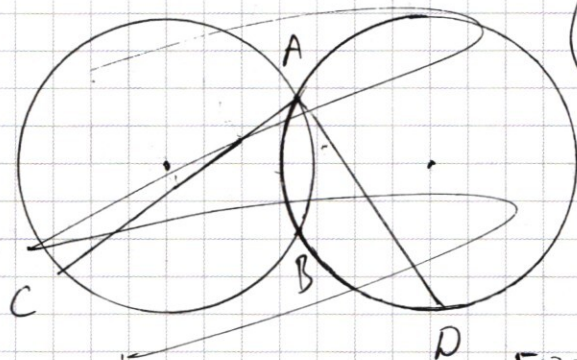
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

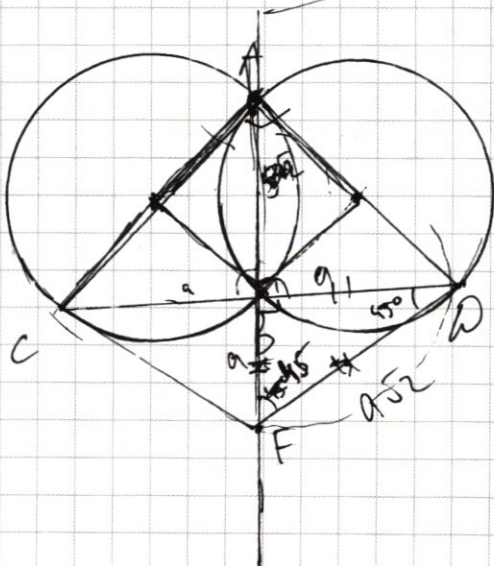
$$BF = BW$$



$$\angle CAD = \frac{11}{2}$$



$$50 = a^2 b$$



Пусть  $x = 3y$ ,  $x \neq 0, y \neq 0$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^2 \lg(xy) \quad 5 \lg(y) \lg(x) - \lg^2(x) - 2 \lg^2(y) - 2 \lg(y) \lg(x) = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^2 \lg(3y^2) \quad 5 \lg(y) \lg(3y) - \lg^2(3y) - 2 \lg^2(y) - 2 \lg(y) \lg(3y) = 0$$

$$\lg(3y) \quad a^2 - 3ab + 2b^2 \quad \lg^2(3y) - 3 \lg(y) \lg(3y) + 2 \lg^2(y) = 0$$

$$a^2 - 2ab - 2ab + 2b^2 \quad a^2 - 2ab - ba + b^2$$

$$a(a-b) - 2b(a-b) \quad a = b - 2b \quad a = -b$$

Пусть  $x = 4-y$

$$(\lg(3y) - \lg(y))(\lg(3y) - 2 \lg(y)) = 0$$

$$\lg\left(\frac{3y}{y}\right) = 0 \quad \text{норм}$$

$$\lg(3y) - 2 \lg(y) = 0$$

$$\lg(3y) = 2 \lg(y^2)$$

$$3y = y^2$$

$$y(y-3) = 0$$

$$y = 0, y = 3$$

$$y = 3$$

$$x = 9$$

$$5 \lg(y) \lg(4-y) - \lg^2(4-y) - 2 \lg^2(y) - 2 \lg(y) \lg(4-y) = 0$$

$$\lg^2(4-y) - 3 \lg(y) \lg(4-y) + 2 \lg^2(y) = 0$$

$$(\lg(4-y) - \lg(y))(\lg(4-y) - 2 \lg(y)) = 0$$

$$\lg(4-y) = -\lg(y)$$

$$\lg(4-y) = \lg\left(\frac{1}{y}\right) \quad 4-y = \frac{1}{y}$$

$$4y - y^2 = 1, \quad y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$D = 16 - 4 = (2\sqrt{3})^2$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \dots$$

$$\lg(4-y) = \lg(y)$$

Пусть

$$\lg(4-y) = \lg(y) \quad 4-y = y \quad 4 = 2y, \quad y = 2, \quad x = 4-2 = 2$$

$$\lg(4-y) = \lg(y^2), \quad y^2 = 4-y, \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17, \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$(9 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 1)$$

$$(3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 8 & \cdot & 7 & \cdot & 6 & \cdot & 5 \\ \hline 56 & & 30 & & 12 & & 2 \end{array}$$

$$8064$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 168 \\ \hline 168 \\ 480 \\ 960 \\ \hline 4032 \end{array}$$

$$33355511$$

$$\begin{array}{r} 87654321 \\ \times 46 \\ \hline 87654321 \end{array}$$

$$4032$$

$$2 \cdot C_9^3 + 0 \cdot C_9^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 9!}{7! \cdot 2!} = 56$$

$$C_8^3 = \frac{2 \cdot 8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2}{3 \cdot 2} =$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^{2 \lg(xy)}$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg(x) = 2 \lg(y) \lg(xy)$$

$$\lg(y) \lg(x) - \lg^2(x) = \lg(1) \cdot 2 \lg(y) \lg(x) + \lg(y) \lg(x)$$

$$5 \lg(y) \lg(x) - \lg^2(x) - 2 \lg^2(y) - 2 \lg(y) \lg(x) = 0 \quad - \lg^2(3)$$

$$\text{пусть } \lg(y) = a, \lg(x) = b$$

$$5ab - a^2 - 2a^2 - 2ab = 0$$

$$5ab - a^2 = (a-b)^2 \quad a(5b-a) = (a-b)^2$$

$$a(5b-a) \neq 0$$

$$x^2 - a \cdot x(2y+4) - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) =$$

$$= (4(y-1))^2$$

$$x_{1,2} = \frac{2y+4 \pm 4(y-1)}{2} = y+2 \pm 2(y-1), \quad x_1 = y+2+2y-2 = 3y$$

$$x_2 = y+2-2y+2 = 4-y$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$

$$a_1, a_2, \dots, a_8 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$(3, 5), (9, 1)$$

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\frac{2y+4}{2} = 3$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(x)} = \frac{1}{3^{2\lg(3)}}$$

$$\cos(11x) - \cos(3x) = \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 5 & 5 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 5 & 5 & 5 & & & & \\ 5 & 5 & 5 & & & & \\ 5 & 5 & 5 & & & & \\ 5 & 5 & 5 & & & & \end{array}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^{2\lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(3)} =$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right) \cdot \lg(x) = \lg(y) \cdot 2\lg(xy)$$

$$\lg(y^5) \lg(x) - \lg^2(x) = 2\lg^2(y) + 2\lg(x) \lg(y)$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad x^2 - 4x + 4 - 4 - (3y^2 - 2 \cdot 3y \cdot 2 + 4) + 4 =$$

$$= 2xy \quad x^2 - 4x + 4 - 3(y^2 - 4y + 4) + 12 = 2xy$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 = 2xy - 8$$

$$(x-2-\sqrt{3}y+2\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}) = 2xy-8$$

$$+2xy \quad 28$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ 70 + 2^{64} \cdot x - x \geq y \end{cases}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$x(x-1) - 3y(y-4) - 2xy = x(x-1-2y) - 3y(y-4)$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg(3)}$$

$$\lg(3) \left( 3^{-\lg(3)} \right)$$

$$- \lg(3) \lg(3) \lg$$

$$- \lg(3)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \pm (\pi + \arccos(\sin(4x))) + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \pm \left( \pi + \frac{\pi}{2} - 4x \right) + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \pm \left( \frac{3\pi}{2} - 4x \right) + 2\pi n$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{\pi}{4} + 7x = \frac{3\pi}{2} - 4x + 2\pi n$$

$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{\pi}{4} + 7x = -\frac{3\pi}{2} + 4x + 2\pi n$$

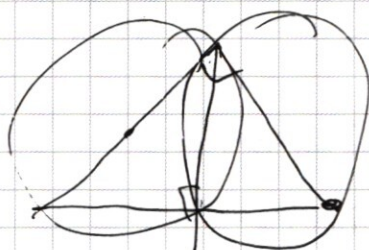
$$3x = -\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$3x = -\frac{7\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{7\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$\frac{6\pi}{4}$$

N 2



$$\cos(11x) - \cos(3x) = -2 \sin(7x) \sin(4x)$$

$$\sin(4x) - \sin(3x) = 2 \sin(4x) \cos(7x)$$

$$-\sqrt{2} \cos(11x) + 2 \sin(4x) (\cos(7x) + \sin(7x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(11x) + 2 \sin(4x) \cos(7x) + 2 \sin(7x) \sin(4x) = 0$$

$$\cos^2(7x) - \sin^2(7x) + \sqrt{2} \sin(4x) (\cos(7x) + \sin(7x)) = 0$$

$$(\cos(7x) + \sin(7x))(\cos(7x) - \sin(7x)) + \sqrt{2} \sin(4x) (\cos(7x) + \sin(7x)) = 0$$

$$(\cos(7x) + \sin(7x))(\cos(7x) - \sin(7x) + \sqrt{2} \sin(4x)) = 0$$

$$\cos(7x) = \sin(7x) \quad \cos(7x) \neq 0$$

$$\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

$$\cos(x) + \sin(y)$$

$$\frac{\pi}{2} - x$$

$$\begin{cases} \tan(7x) = 1 \\ 7x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}$$

$$\cos(7x) - \sin(7x) + \sqrt{2} \sin(4x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(7x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(7x) = -\sin(4x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = -\sin(4x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin(4x) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\arccos(\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin(4x) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) + \sin(4x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = -\sin(4x)$$

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \pm \arccos(-\sin(4x)) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + 7x = \pm (\pi - \arccos(\sin(4x)) + 2\pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(\sin(x)) = \arccos(\sqrt{1 - \cos^2(x)})$$

$$\arccos(\sin(x)) \quad 7x = \pm (\pi -$$

$$\arccos(\sin(\frac{\pi}{6})) = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

$$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$$

15

$$\sqrt{1 - \cos^2(x)}$$