

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

3
8
14
19
25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 $3375 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$ возможные наборы цифр:

N-кол-во чисел

1) $[5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; 1]$
2) $[5; 5; 5; 9; 3; 1; 1; 1]$

1) $N_1 = C_8^3 \cdot C_5^3$

(3 пятёрки распределить на 8 мест, 3 тройки на оставшиеся 5 мест)

2) $N_2 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot P_2$ (3 пятёрки на 8 мест, 3 единицы на 5 мест, на любой порядок из оставшихся 2 цифр)

$$N = C_8^3 \cdot C_5^3 (P_2 + 1) = \frac{8! \cdot 5! \cdot 3}{3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 14$$

Ответ: 14 чисел

№ 5 $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

$((|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad \{ a < 0 \Rightarrow \emptyset \} \Rightarrow a \geq 0$

рассмотрим первое равенство по модулям:

1) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$y-3-x+y-3+x=6$

$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \\ y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$

$y-3-x-y+3-x=6$

$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < 3-x \\ x = -3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$

$-y+3+x+y-3+x=6$

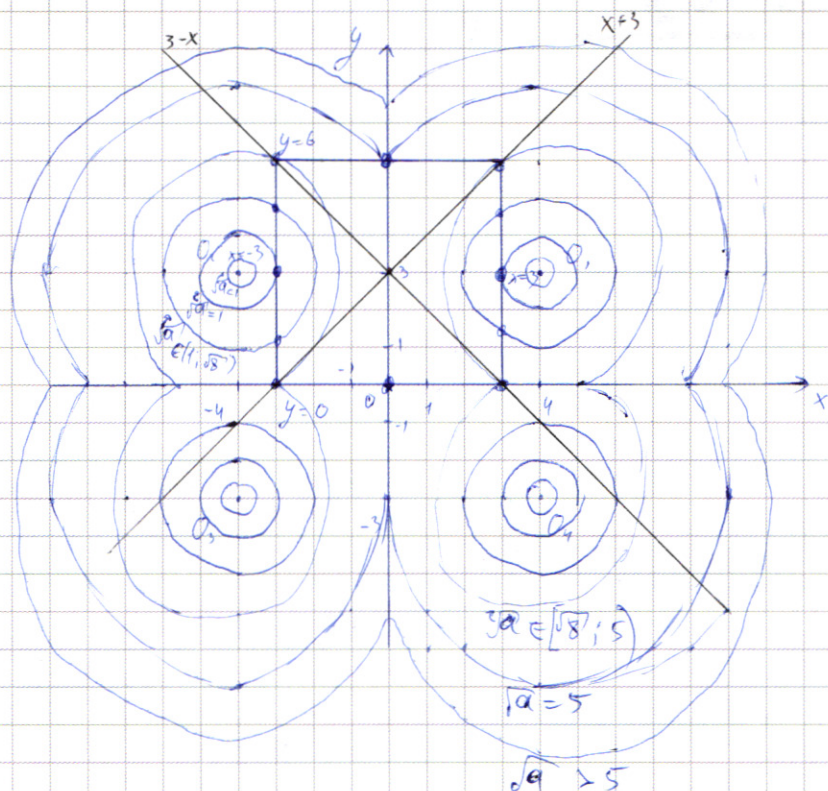
$\begin{cases} x < x+3 \\ y \geq 3-x \\ x = 3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \end{cases}$

$-y+3+x-y+3-x=6$

$\begin{cases} y < x+3 \\ y < 3-x \\ y = 0 \end{cases}$

График второго равенства - окружность с центром в точке $O_1(0; 0)$, огранич. своей четвертью с радиусом $= \sqrt{a}$



$\sqrt{a} > 5$
 $\sqrt{a} < 1 \Rightarrow 0 \text{ решений}$
 $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow 2 \text{ решения}$
 $\sqrt{a} \in (1; 5) \Rightarrow 4 \text{ решения}$
 $\sqrt{a} = 5 \Rightarrow 2 \text{ решения}$
 $\sqrt{a} > 5 \Rightarrow 0 \text{ решений}$
 $\Rightarrow \text{система имеет 2 реш.}$
 при $\begin{cases} a = 1 \\ a = 5 \end{cases}$

Ответ: $a \in \{1, 5\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$k \neq \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{64} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

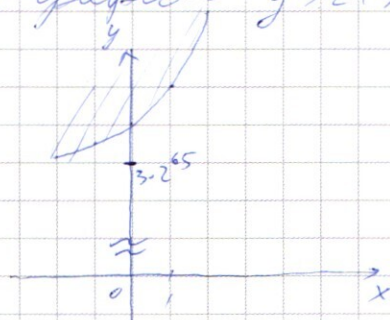
$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 6 \cdot 2^{64} \\ y \leq (70 - x) + x \cdot 2^{64} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{для } x = k \text{ кол-во решений } n_k =$$

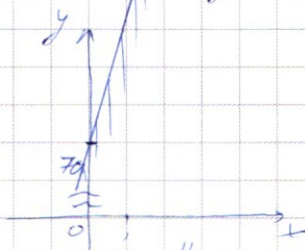
$$= (2^k + 6 \cdot 2^{64}) - ((70 - k) + k \cdot 2^{64})$$

~ графика $y > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$:



$$f(x)'' > 0 \text{ на } x \in \mathbb{R}$$

(т.к. $y \leq$ целого числа)
 $y >$ целого числа)
~ график для $y \leq (70 - x) + x \cdot 2^{64}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$



$$f(x)'' = 0 \text{ на } x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ графики имеют не более одного двукратного пересеч.
(1) реш. существуют при *

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ не более, чем одному промежутку.

из графиков очевидно, что при $x \leq 0$ - нет реш.

рассмотрим n_k при $x > 0$:

$$n_1 = 2 + 6 \cdot 2^{64} - 68 - 2^{64} = 5 \cdot 2^{64} - 67$$

$$n_2 = 4 + 6 \cdot 2^{64} - 68 - 2 \cdot 2^{64} - 4 \cdot 2^{64} - 64$$

$$n_3 = 8 + 6 \cdot 2^{64} - 67 - 3 \cdot 2^{64} = 3 \cdot 2^{64} - 59$$

$$n_4 = 16 + 6 \cdot 2^{64} - 66 - 4 \cdot 2^{64} = 2 \cdot 2^{64} - 50$$

$$n_5 = 32 + 6 \cdot 2^{64} - 65 - 5 \cdot 2^{64} = 1 \cdot 2^{64} - 33$$

$$n_6 = 64 + 6 \cdot 2^{64} - 64 - 6 \cdot 2^{64} = 0 \cdot 2^{64} - 0 \quad (n_6 = 0 \Rightarrow \text{при } x > 6 \text{ нет реш. (y \in \mathbb{Z})})$$

$$\sum n_k = 15 \cdot 2^{64} - 273$$

$$\text{Ответ: } 15 \cdot 2^{64} - 273 \text{ пар}$$

$$1) \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$2) x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$2) x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$$

$$x_1 = y+2 - 2y+2 = 4-y$$

$$x_2 = y+2 + 2y-2 = 3y$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

$$1) \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^2 \lg xy$$

$$\lg \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = \lg (y^2 \lg xy)$$

$$\lg x \lg \frac{y^5}{x} = 2 \lg y \lg xy$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2 \lg y (\lg x + \lg y)$$

$$\lg x^2 + 2 \lg y^2 - 3 \lg x \lg y = 0$$

$$\lg x (\lg x - \lg y) + 2 \lg y (\lg y - \lg x) = 0$$

$$(\lg x - \lg y) (\lg x - 2 \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2 \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-4=0 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right); (\sqrt{3}; 3)$$

$$x=y:$$

$$1) x+x=4 \Rightarrow x=y=2$$

$$\left(\frac{2^5}{2} \right)^{\lg 2} = y^2 \lg 2-2$$

$$(2; 2) - \text{решение}$$

$$2) x-3x=0 \quad x=y=0$$

$$\left(\frac{0^5}{0} \right)^{\lg 0} = 0$$

$$(0; 0) - \text{не абс. реш.}$$

$$x=y^2:$$

$$1) y^2+y-4=0$$

$$D = 1+16=17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right) - \text{решение}$$

$$2) y^2-3y=0$$

$$y=0 \quad x=0 - \text{но абс. реш.}$$

$$y=3$$

$$x=\sqrt{3} - \text{реш.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 Дано:

a) $R = 5$

$B \in CD$

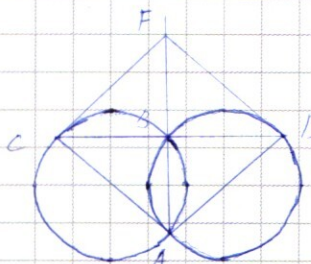
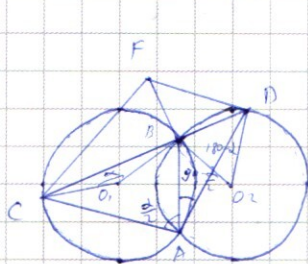
$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

$CF = ?$

b) $BC = 6$

$S_{\triangle ACF} = ?$



Решение:

1) $\text{Вокругности равны} \Rightarrow BA \text{ отсекает}$
 $\text{равные дуги на обеих окружностях} \Rightarrow \angle BCA = \angle BDA$
 $\Rightarrow \triangle ADC - \text{равнобедр.}$

2) $\triangle ADC - \text{равноб.} \Rightarrow AC =$

$AD \Rightarrow \triangle ADC - \text{равноб.} \Rightarrow AC = AD$

$\text{окр-ти равны} \Rightarrow AC \text{ и } AD \text{ отсекают}$
 $\text{равные дуги} \Rightarrow$

$$BF \perp CD \Rightarrow CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$$

$$\angle CO_1B = 2 \Rightarrow \angle CAB = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BAD = 90 - \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\angle BCD = 180 - 2$$

$$CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2$$

$$BD^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 4R^2 + 2R^2 \cos 2 - 2R^2 \cos 2 = 4R^2$$

$$CF = 2R = 10$$

a) Ответ: ~~10~~ $CF = 10$

$$d) \text{ и } CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2$$

$$BD^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2$$

$$BD^2 = 2R^2 + 2R^2 - CB^2$$

$$BD^2 = 4R^2 - CB^2 = 100 - 36 = 64 = 8^2$$

$$BD = 8 \Rightarrow BF = 8 \Rightarrow FD = 8\sqrt{2}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BFD \Rightarrow \frac{BF}{AC} = \frac{FD}{AD}$$

$$e) CD = 14 \Rightarrow AC = AD = 7\sqrt{2}$$

$$2) \angle FDB = 45^\circ, \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow FD \perp AD \Rightarrow FD \parallel AC$$

$\Rightarrow ADFC$ - ~~прямоугольн.~~ ~~параллелограмм~~ ~~трапеция~~ ~~трапеция~~

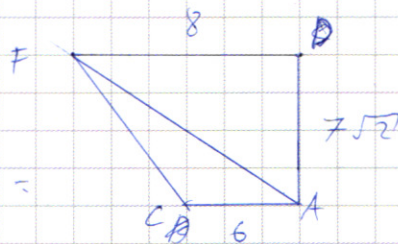
$$\Rightarrow S_{ACF} = S_{ACFD} - S_{ADF} =$$

$$= \frac{AC + FD}{2} \cdot AD - \frac{FD \cdot AD}{2} =$$

$$= \frac{AD \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} AD \cdot AC =$$

$$= 21\sqrt{2}$$

$$8) \text{ Ответ: } 21\sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ 87 \\ \underline{75} \\ 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 27 \\ \underline{875} \\ 250 \\ \underline{2375} \end{array}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

грен

$$\cos 11x - \cos 3x = 5$$

$$\cos 11x - \cos 3x = \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$(\cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 11x \sin 3x - \sin 3x) = 0$$

$$\cos 11x - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 11x \left(1 - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}}\right) - \cos 3x \left(1 + \frac{\cos 11x}{\sqrt{2}}\right) = \sin 11x \left(1 - \frac{\sin 4x}{\sqrt{2}}\right) - \sin 3x \left(1 + \frac{\sin 11x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\cos 14 + \sin 14}{\cos 3} = \cos 14$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad x =$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$y \leq 70 + 2^{64}x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x$$

$$2^x + x = 42^{64} (6 - x) - 70 = 0$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

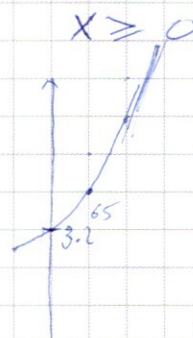
$$N = C_8^3 + C_5^3 + C_{83}^3 + C_5^3 + P_2$$

$$y > 2 + 8 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 2068 + 2^{64}$$

$$y = 2 + 8 \cdot 2^{64} - 68 - 2^{64}$$

$$y - 3 - x = 4 \cdot 500^{64} - 68$$



$$\frac{8!}{3! 5!} = \frac{5!}{3! 2!}$$

$$\frac{C_5^3}{\frac{5!}{3! 2!}} = \frac{C_5^2}{\frac{5!}{2! 3!}}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)/x \end{cases}$$

$$x=1 \dots$$

$$x=2 \dots$$

$$x=6$$

$$x=3$$

$$y > 64 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$x=4$$

$$y \leq 64 + 6 \cdot 2^{64} \Rightarrow 0$$

$$x=5$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\cancel{x^2 - 2xy + y^2} - 4y^2 -$$

$$\cancel{x^2 - 2xy} -$$

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (3-2)^2$$

$$x = y + 2 - 2y + 2 = 4 - y$$

$$x = y + 2 + 2y - 2 = 3y$$

$$(x+y-4)(x-3y) = 0$$

$$\frac{\log_b a}{a}$$

$$\begin{matrix} \lg x = a \\ \lg y = b \end{matrix}$$

$$\log_b b = 0$$

$$\lg \frac{y^5}{x} \cdot \lg x = 2 \lg x y \cdot \lg y$$

$$(5 \lg y - \lg x) \lg x = (2 \lg x + 2 \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg x^2 = 2 \lg x \lg y + 2 \lg y^2$$

$$2b^2 - 2ab + a^2 - ab = 0$$

$$2b(b-a) + a(a-b) = 0$$

$$2b^2 + a^2 - 3ab = 0$$

$$2b(b-a) = a(b-a)$$

$$\geq 0$$

$$4 - 0 = 4 \quad (2b-a)(b-a) = 0$$

$$\leq 4$$

$$2$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y \cdot \lg x}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x \cdot \lg x \cdot y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x \cdot 2 \lg y}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2$$

$$c^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2$$

$$2R^2 \cos 2 = 2R^2 - c^2$$

$$CF = ?$$

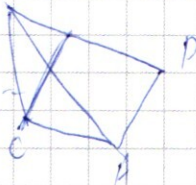
$$\frac{\alpha}{2} = 180 - \frac{360 - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$CB + BD = \cos 2$$

$$\frac{DF \cdot DA}{2}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{3}{x} = \frac{3\sqrt{2}}{3} \cdot AD \cdot \frac{AC + FD}{2} = A$$



$$\frac{BD}{AD} = \frac{FD}{CD}$$

$$CF = \sqrt{(AC - DF)^2 + AD^2}$$

$$CN \cdot CF =$$

$$CF = 10$$

$$AB = 6$$

$$2\sqrt{x^2 + DF^2 - 2xDF + x^2}$$

$$CE^2 = DB^2 + CB^2$$

$$CBD^2 = 4R^2 - CB^2$$

$$CD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2$$

$$CF = 10$$

$$CB^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2$$

$$BC = 6$$

$$CF = 2R^2$$

$$S_{AEF} = ?$$

$$BD^2 = 25 + 50 \cdot \frac{8}{25}$$

$$CF =$$

$$BD^2 = 50 - 16$$

$$CB^2 = R^2 - 2R^2 \cos 2$$

$$6^2 =$$

$$36 = 25 +$$

$$36 = 25 - 50 \cos 2$$

$$BD =$$

$$BD =$$

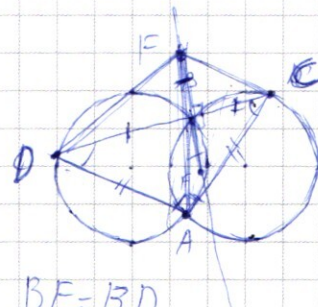
$$-\frac{16}{50} = \cos 2$$

$$BD^2 =$$

$$BD^2 = 50 - 16 = 34$$

$$\cos 2 = -\frac{8}{25}$$

$$BD = 3$$



$$BF = BD$$

$$BF \perp BD$$

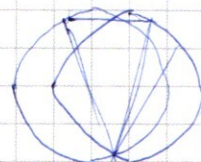
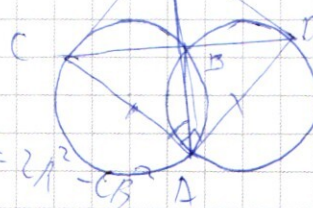
$$CA \perp AD$$

$$CA = AD$$

$$CB = DB \Rightarrow$$

$$CF = \frac{CD}{\sqrt{2}}$$

$$CF = AC$$



$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$