

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3}$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy} & (1.1) \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

прологарифмируем

$$\lg(y^{5\lg x}) = \lg(y^{2\lg xy} \cdot x^{\lg x})$$

$$5\lg x \cdot \lg y = 2\lg(xy) \cdot \lg y + \lg^2 x$$

$$5\lg x \cdot \lg y = 2\lg y (\lg x + \lg y) + \lg^2 x;$$

$$5\lg x \cdot \lg y = 2\lg y \lg x + 2\lg^2 y + \lg^2 x$$

$$\lg^2 x - 3\lg y \lg x + 2\lg^2 y = 0$$

$$m^2 - 3mn + 2n^2 = 0$$

Пус-т: $\lg x = m, \lg y = n$

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = 3n \\ m_1 \cdot m_2 = 2n^2 \end{cases} \quad \begin{cases} m = n \\ m = 2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y \\ \lg x = 2\lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases} \\ x > 0 \\ y > 0 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая, исходящих из системы

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{2} \quad \begin{cases} x=y \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \\
 & \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\
 & \quad x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \quad -4x^2 + 8x = 0 \quad | :(-4) \\
 & \quad x^2 - 2x = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{— посторонний корень}
 \end{aligned}$$

Из первой имеем $\boxed{(2;2)}$

$$\begin{aligned}
 & \textcircled{3} \quad \begin{cases} x=y^2 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases} \\
 & \quad x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\
 & \quad y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \\
 & \quad y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \quad | :y > 0 \text{ (из системы)} \\
 & \quad y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0
 \end{aligned}$$

Воспользуемся схемой Горнера

	1	-2	-7	12
y=2	1	0	...	...
y=3	1	1	-4	0

нет! $\Rightarrow (y-3)(y^2+y-4)=0$

да!

Рассмотрим: $y^2+y-4=0 \quad D=1+16=17$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ не подходит!} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

если $y=3$ то $x=9$

если $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$, то $x = \frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из второй имеем $(9:3)$ и $\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Ответ: $(2:2) : (9:3) : \frac{\left(\frac{9-\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\sqrt{2}}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

Воспользуемся преобразованием доп. угла.

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 4x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 11x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right) \text{ по формулам приведения}$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 11x\right)$$

$$-2 \sin \frac{14x - \frac{\pi}{4} - 11x}{2} \cdot \sin \frac{14x + 11x + \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \neq 0 & (1) \\ \sin\left(\frac{-25x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} : 3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \sin\left(\frac{-25x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) ; \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{-25x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 3x}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{\frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{\frac{5\pi}{4} + 3x}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} - \frac{\frac{5\pi}{4} + 3x}{2}}{2}\right) = 0 \quad | :2$$

$$\sin\left(\frac{22x + \frac{3\pi}{2}}{4}\right) \cos\left(\frac{28x - \pi}{4}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{22x + \frac{3\pi}{2}}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{28x - \pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{22x + \frac{3\pi}{2}}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{28x - \pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x + \frac{3\pi}{2} = 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 28x - \pi = 2\pi + 4\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x = -\frac{3\pi}{2} + 4\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 28x = 3\pi + 4\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-\frac{3\pi}{2}}{22} + \frac{4\pi k}{22}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{4\pi m}{28}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

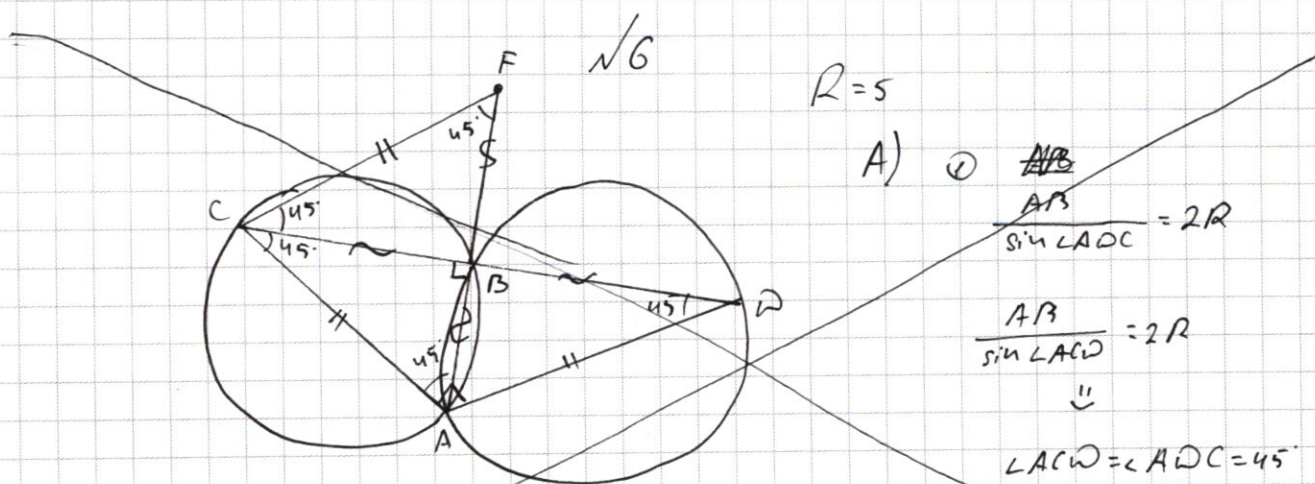
$$y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2 = CF$$

$$x^2 + y^2 =$$

Ответ: $\frac{-\frac{3\pi}{2}}{22} + \frac{4\pi k}{22}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{3\pi}{28} + \frac{4\pi m}{28}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$$



$$R = 5$$

A) ① $\frac{AB}{\sin \angle ADC} = 2R$

$$\frac{AB}{\sin \angle ACD} = 2R$$

"

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\overset{\text{""}}{AD} = AC$$

② $\frac{AD}{\sin \angle ABW} = 2R$ $\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2R$ $AC = AD$ $\angle CBA + \angle ABW = 180^\circ$

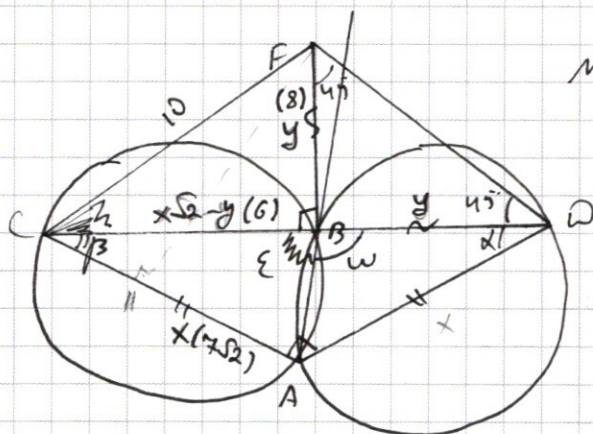
$$\Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB - \text{диаметр} \Rightarrow AB = BC = BD = BF \Rightarrow \triangle CBF - \text{пр}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ ~~$\Delta ACF - n/y$~~ n/y $AC = CF$

④ тк. $\angle ABO = 90^\circ$, то AO — диаметр $AO = 2R = 10 = CF$

~~(5) $CD = 10\sqrt{2} \Rightarrow$~~



$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 45^\circ$$

A) ① $R=5$
 $\pi_{yc\pi b} \angle AOC = \alpha$

$$\angle ACD = \beta$$

ω 7 514.

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = 2R$$

② ~~Don't worry~~ A/B : $\frac{AD}{\sin W} = 2R$ $\frac{AC}{\sin E} = 2R$ $W + E = 180^\circ$

$$\begin{cases} \sin W = \sin E & (TR \text{ } \cancel{AD=AC}) \\ E + W = 180^\circ \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \quad AB = 2R \sin \alpha = \frac{10}{2} \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

① $ABDE \sim CBDF$ по 2 углам $\angle B$ и $\angle D$

(4) $FD \perp AD$ $AC \perp AD \Rightarrow CA \parallel FD$

⑤ Blegium $BQ = BF = y$ $AC = AD = x$ $BC = x\sqrt{2} - y$

⑥ $w_3 \triangle ABC$ $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos \alpha = AB^2$

$$x^2 + y^2 - \frac{2xy\sqrt{2}}{2} = AB^2 \quad x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = AB^2$$

$$\textcircled{7} \quad CF^2 = y^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt{2}xy = \\ = 2(x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy) = 2AB^2 \\ CF = AB\sqrt{2} = \underline{10}$$

$$\text{B)} \quad x\sqrt{2} - y = 6 = BC$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y = x\sqrt{2} - 6 \\ 50 = x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy \end{cases}$$

$$50 = x^2 + (x\sqrt{2} - 6)^2 - \sqrt{2}x(x\sqrt{2} - 6) = \\ = x^2 + 2x^2 - 12x\sqrt{2} + 36 - 2x^2 + 6\sqrt{2}x = x^2 - 6\sqrt{2}x + 36 \\ x^2 - 6\sqrt{2}x - 14 = 0$$

$$D = 72 + 56 = 128 = 2^7 = 2 \cdot 2^6$$

$$\begin{cases} x = \frac{6\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} < 0 \\ x = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2} \end{cases}$$

$$y = 8$$

$$\textcircled{2} \quad \text{Пусть: } \angle FCB = \alpha \quad \text{тогда } S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ + \alpha)$$

$$\text{из } \triangle CFB \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$$

Ответ. А) 10

Б) 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

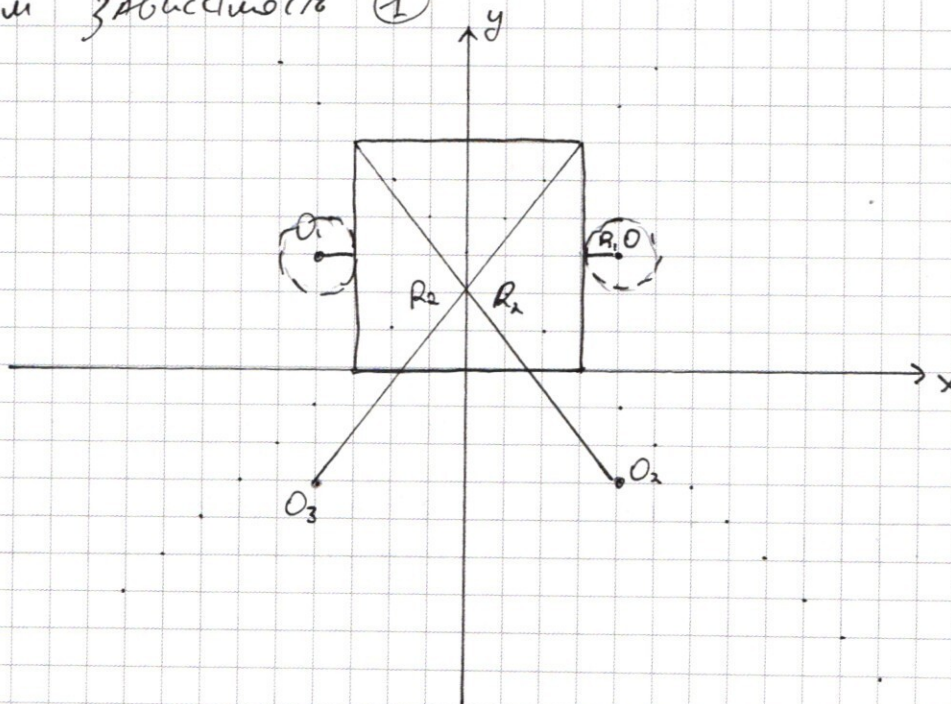
$\sqrt{5}$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y=6 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ x=-3 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ x=3 \end{cases} \\ & \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \\ y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) ОТРАЖЕННАЯ ОТ ТЧ С
радиусом $\sqrt{a}=R$
с центром O в точке
 $O: (4; 3)$. Вследствие
преобразования модуля, у
оси-ти ~~появится~~ появятся осцил-
ляции с центрами $O_1; O_2; O_3$

Построим зависимость (1)



Все ок-ти сестрицы будут иметь одинаковый радиус $R = \sqrt{a}$

I случай. $O_1 \sim O$ касаются сторон AB и BC
при $a = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}$

при последующем ~~увеличении~~ увеличении радиуса до значения $\sqrt{58}$ система имеет более 2 р-и, после значения $\sqrt{58}$ "вклад" в кол-во решений будут вносить ок-ти O_2 и O_3

II случай: ок-ти O_2 и O_3 пройдут через верхние вершины A и C .

$$R_2 = \sqrt{130} = \sqrt{a} \quad \underline{a = 130}$$

P.S. ок-ти O_2, O_3 не могут проходить одновременно через обе верхние вершины A и C , в силу симметрии.

P.P.S. случай, когда O_2 и O_3 пройдут через нижние вершины B и D не подходит, т.к. дополнительных решений будет давать O_1 и O .

Ответ: $a = 1$ и $a = 130$

№1

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, \text{ если } a - \text{цифра числа}$$

$$\text{то } a \in \mathbb{N} \\ a \in [0:9]$$

нельзя использовать ни 0 ни 9, иначе произведение будет крат.

использовать ни 0 ни 9 можно 2 набора цифр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I набор { 5 : 5 : 5 : 3 : 3 : 3 : 3 + 2 единицы

II набор { 5 : 5 : 5 : 3 : 9 : 3 + 3 единицы

Всего чисел будет 1680.

$$N = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 1680$$

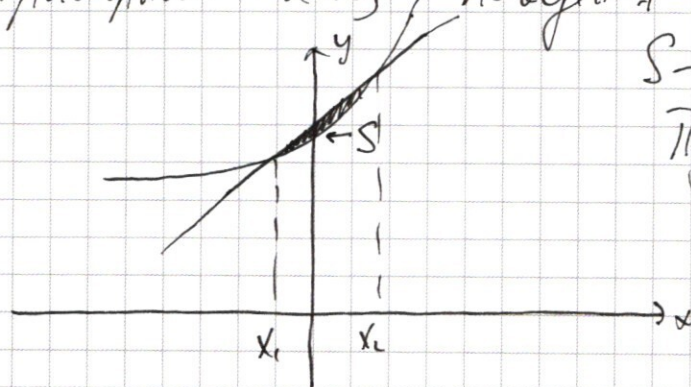
Ответ: 1680 чисел.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

№4

неравенства задают области
под/над кривыми на
плоскости

Примерный график, построения функций (не в масштабе)



S-область рассуждения

Пусть графики пересекаются
в 2 точках x_1 и x_2

$$\underline{x_1 < x_2}$$

Тогда можно рассмотреть ~~ниже~~ площадь области S

$$\text{Площадь области} = \int_{x_1}^{x_2} ((2^{64} - 1)x + 70 - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} (2^{64} - 1)x dx + \int_{x_1}^{x_2} 2^x dx + \int_{x_1}^{x_2} (70 - 3 \cdot 2^{65}) dx =$$

$$= \left(\frac{(2^{64}-1)x^2}{2} - \frac{2^x}{\ln 2} + (70 - 3 \cdot 2^{65})x \right) \Big|_{x_1}^{x_2}$$

Также эту же площадь ~~не~~ можно посчитать по формуле Пика

Площадь области $= B + \frac{F}{2} - 1$, где B - количество "внутренних" целых решений, F - количество "граничных" целых решений, взятых только с прямой $y = 70 + (2^{64}-1)x$

Точка x_1 находится подбором $x_1 = 6$
После точки x_2 графики не встретятся, ввиду своей монотонности

Далее, если определить x_2 , то можно рассмотреть интервал от x_1 до x_2 , и соответственно, решив диофантово уравнение $y - x(2^{64}-1) = 70$, найти целочисленные решения на соответствующем графике прямой

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-y+3+x+y-3+x-6=0$$

$$\cos x + \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$y-3-x+y-3+x-6=0$$

(1)

$$\sin x - \sin y = 2$$

$$2y =$$

$$-y+3+x-y+3-x-6=0$$

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin(11x + \varphi) + \sqrt{2} \sin(3x - \varphi) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$-y-3-x-y-3-x-6=0$$

$$-2x = 6$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ + 4 \\ \hline 56 \\ + 22 \\ \hline 138 \end{array}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}$$

$$5 \lg x \lg y = \lg(y^{2 \lg xy} \cdot x^{\lg x}) = \lg 2 \lg(xy) \cdot \lg y + \lg^2 x$$

$$2(\lg x + \lg y) \cdot \lg y + \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y + \lg^2 x = 5 \lg x \lg y$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

	1	-2	-7	12
$x=2$	1	0		
$y=3$	1	1	-4	

$$\cos(11x + 3x) = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$\sin \omega - \sin \varepsilon = 0 \quad 2 \sin \frac{\omega + \varepsilon}{2} \sin \frac{\omega - \varepsilon}{2} = 0$$

$$\frac{\omega + \varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\omega - \varepsilon}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\omega + \varepsilon = \pi + 2\pi k$$

$$\omega - \varepsilon = 0$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 11x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) + \sqrt{2} \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 11x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) + \sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 11x$$

$$\sin \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x + 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 11x - 3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 11x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = \cos 11x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) = \cos 11x -$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 11x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 11x \right)$$

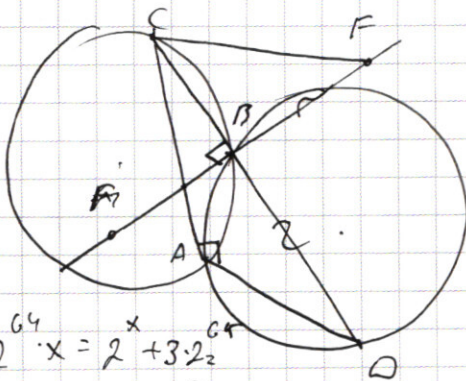
$$\cos 11x - \cos \left(\frac{\pi}{4} + 11x \right) = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 \sin \frac{11x - \frac{\pi}{4} - 11x}{2} \cdot \sin \frac{11x + \frac{\pi}{4} + 11x}{2} = \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} = 2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos$$

$$\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = \sin \left(\frac{\pi - 3x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

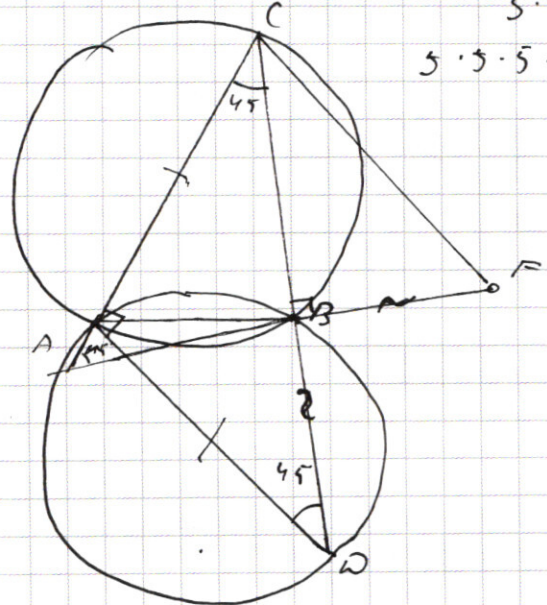
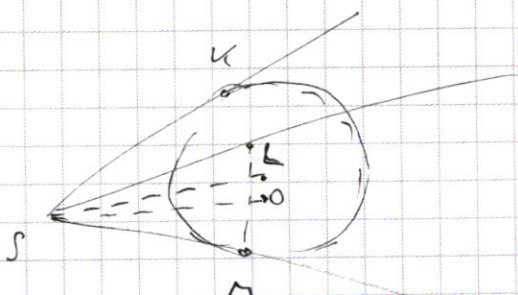
$$\sqrt{10+9}$$



$$40 - x + 2 \cdot x = 2 + 32$$

$$40 - x - 2x = 2(6 - x)$$

$$40 + 91 = \sqrt{130}$$



$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 15} \\ 30 \overline{) 15} \\ 34 \overline{) 15} \\ 5 \overline{) 15} \\ 17 \overline{) 15} \\ 15 \overline{) 15} \\ 35 \overline{) 15} \\ 24 \overline{) 15} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3 \\ 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 30 \\ \hline 1630 \end{array}$$