МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \quad (1) \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0 \quad (2) \end{cases}$ ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ x\cdot y>0 \end{cases} \to \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Прологарифмируем (1): $\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2\lg xy}$

$\lg x\left(\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)\right) = 2\lg xy \cdot \lg y$

$\lg x(5\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y)\cdot \lg y$

$5\lg(x)\lg(y) - \lg^2(x) = 2\lg(x)\cdot\lg(y) + 2\lg^2(y)$

$\lg^2(x) + 2\lg^2(y) - 3\lg(x)\cdot\lg(y) = 0$

$2\lg^2(y) - 3\lg(x)\cdot\lg(y) + \lg^2 x = 0$

Замена: $\lg(y) = z$, $t = \lg(x)$

$2z^2 - 3t\cdot z + t^2 = 0$

$D = 9t^2 - 4\cdot 2t^2 = t^2$

$z_1 = t$

$z_2 = \frac{1}{2}t$

$z = \frac{1}{2}t$

~~$\log y = \frac{1}{2}\lg$~~

$\lg y = \frac{1}{2}\lg x$

1) $y = \sqrt{x}$

$z = t$

$\lg y = \lg x$

2) $y = x$

Подставим 1) в (2)

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$

$y(y-3)(y^2+y-4) = 0$

$y = 0 \notin ОДЗ$ $y = 3 \in ОДЗ$ $y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \notin ОДЗ$ $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \in ОДЗ$

№1

3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$\underbrace{555}\,\underbrace{33311}$

(5, 3, 1)

3 3 3 2 2 2 1 1

(5, 9, 17, 3)

4 3 2 2 1 1 1 1

3 5 5 5 1 1 1 9

5 1 1 1

1

9

$5 \cdot 27 \cdot 8 = 216$

1233

133 (133)

313 (313)

331 (331)

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$$\left(\frac{\frac{\sqrt{17}-1}{2}^{5}}{\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2}\right)^{2\lg\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)} = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{2\lg\frac{\sqrt{17}-1}{2}^{3}}$$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{6\lg\ldots} = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^{6\ldots}$$

№3
$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x + 3y^2 + 12y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

(2) $x^2 - x(2y+4) + 3y^2 + 12y = 0$

$D = (2y+4)^2 - 4(3y^2+12y) = 4y^2 + 16 + 16y - 12y^2 - 48y = -8y^2 - 32y + 16 = -8(y^2 + 4y - 2)$

$$x_1 = \frac{2y+4-\sqrt{-8(y^2+4y-2)}}{2} = y+2-\sqrt{-2(y^2+4y-2)}$$

$\cancel{-8y^2} + 32y \cancel{+16}$

$x_2 = y+2+\sqrt{-2(y^2+4y-2)}$

$5\lg x \lg y - \lg^2 x = 2\lg x \lg y + 2\lg^2 y$

$\lg \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg y^{2\lg xy}$

$\lg x(\lg y^5 - \lg x) = 2\lg xy \lg y$

$\lg x(5\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y)\lg y$

$\times 56$

56×20

112

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} y=3 \\ x=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Теперь подставим 2) в 2: $x^2-2x^2-4x-3x^2+12x=0$

$-4x^2+8x=0$

$x(x-2)=0$

$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

$x=0 \notin ОДЗ$ $x=2\in ОДЗ$

Ответ: $x=9, y=3$; $x=\frac{9-\sqrt{17}}{2}, y=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$; $x=2, y=2$.

№5

$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 & (1) \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a & (2) \end{cases}$

(1) задаёт на пл-ти XOY квадрат с центром в т $(0;3)$ и стороной, длина которой равна 6

(2) $(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

при $x\ge 0$ и $y\ge 0$: $(x-4)^2+(y-3)^2=a$. Это ур-е задаёт окр-ть в I четверти с $R=\sqrt{a}$ и с коорд. центра равной $(4;3)$.

при $x\ge 0$ и $y<0$: $(x-4)^2+(y+3)^2=a$. Это ур-е задаёт окр-ть в IV четверти с $R=\sqrt{a}$ и с коорд. центра равной $(4;-3)$

при $x<0$ и $y\ge 0$: $(x+4)^2+(y-3)^2=a$. Это ур-е задаёт окр-ть во II четверти с $R=\sqrt{a}$ и с коорд. центра равной $(-4;3)$

при $x<0$ и $y<0$: $(x+4)^2+(y+3)^2=a$. Это ур-е задаёт окр-ть в III четверти с $R=\sqrt{a}$ и с коорд. центра равной $(-4;-3)$

$y=6$

$|-3+x|+|3+x|=6$

$x>3 \rightarrow 2x \cancel{-3+3} = 6$

$x=3$ X

$|y-5|+|y-1|=6$

$y>5$

$y-5+y-1=6$

$2y=12$

$y=6$

$R=5$

$\angle CAD=90^\circ$

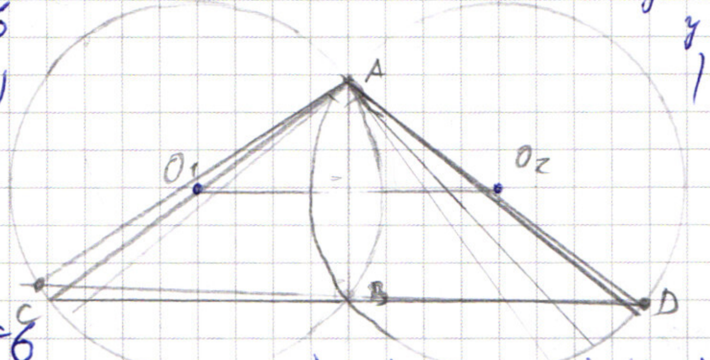
$|y-(3+x)|+|y-(3-x)|=6$

$|y-(3+x)|+|y+(x-3)|$

1) $\begin{cases} y<(3+x) \\ y<(3-x) \end{cases}$

$(3+x)-y+(3-x)-y=6$

$3+x-2y+3-x=6$



$|6-3-3|+$

$+|6-3+3|$

$|0-3-1|+$

$+|0-3+1|$

$|6-3-0|+|6-3+0|$

$|\cancel{3-3}+3|+|\cancel{3-3}-3|$

$y-x-3=0$

$y=x+3$

$y+x-3=0$

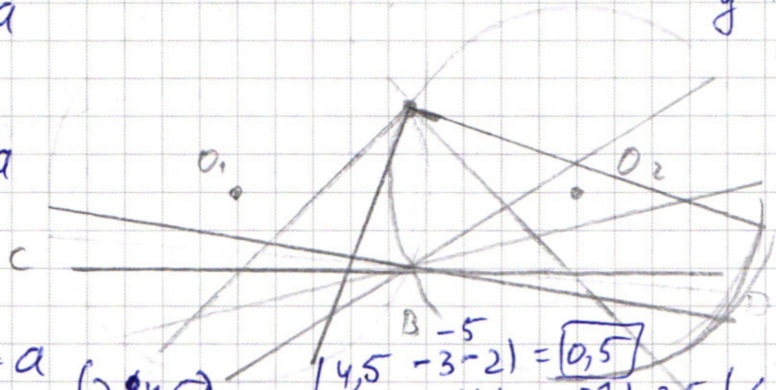
$y=3-x$

$(|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a$

при $x\geq 0$ $y\geq 0$

$(x-4)^2+(y-3)^2=a$

$(4;3)$ $\sqrt{a}$



$y=5$

$|5-3-x|+|5-3+x|=$

$|2-x|+|2+x|=6$

$|2+3|+|2-3|$

$x\geq 0$ $y<0$

$(x-4)^2+(y+3)^2=a$

$(4;-3)$ $\sqrt{a}$

$|4{,}5-3-2|=\boxed{0{,}5}$

$y\ (4{,}5-3+2)=3{,}5$

$(2;4{,}5)$

$|6-3+1|+|6-3-1|=$

$=4+2$

$\boxed{a=1;25}$

$(-3;-3)$

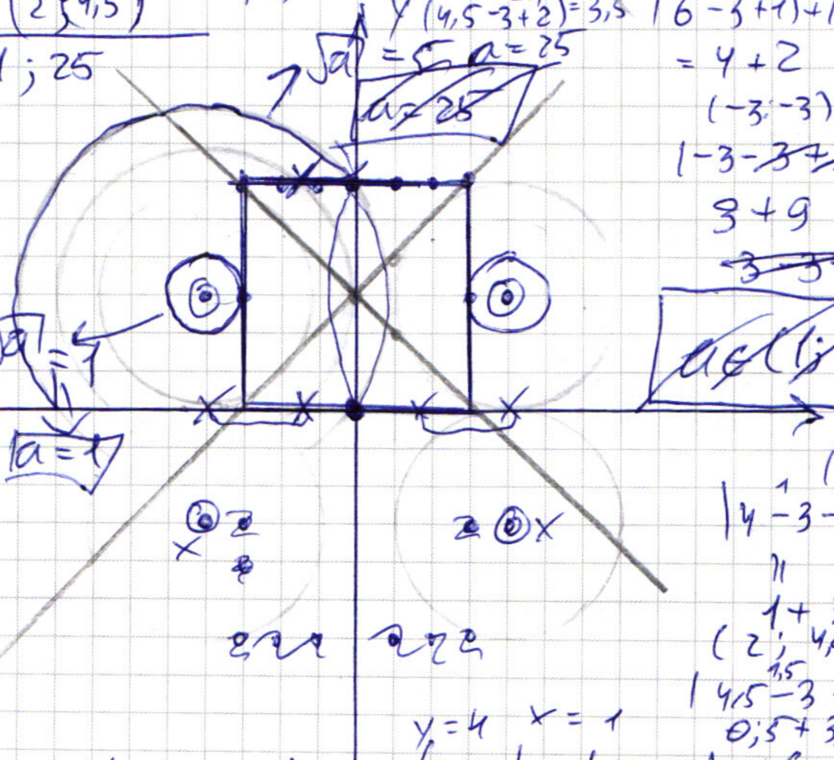
$|-3-\cancel{3+3}|+|-3-3-3|$

$3+9$

$x<0$ $y\geq 0$

$(x+4)^2+(y-3)^2=a$

$(-4;3)$ $\sqrt{a}$



$\sqrt{a}=5$ $a=25$

$\boxed{a=25}$

$\sqrt{a}=1$

$\boxed{a=1}$

$\boxed{a\in(1;25)}$

$x=1$

$y=1$

$|1-3-1|+|1-3+1|=6$

$3+1=6$ X

$x=1$

$|y-4|+|y-2|=6$

при $y>4$

$y-4+y-2=6$

$2y-6=6$

$2y=12$

$y=6$

при $y<4$ и $y>2$

$4-y+y-2=6$ X

при $y<2$

$4-y+2-y=6$

$-2y=0$ $y=0$

$(2;4)$

$|4-3-2|+|4-3+2|$

$1+3=4$

$(2;4{,}5)$

$|4{,}5-3-2|+|4{,}5-3+2|$

$0{,}5+3{,}5=4$

$x=\frac{1}{2}$ $|y-3\frac{1}{2}|+|y-2\frac{1}{2}|$

$(3;3)$

$|3-3-3|+|3-3+3|=6$

$y=4$ $x=1$

$|4-4|+|4-2|=6$

$x=4$ $y=3$

$|3-3-4|+|3-3+4|\geq 6$

☑ черновик ☐ чистовик

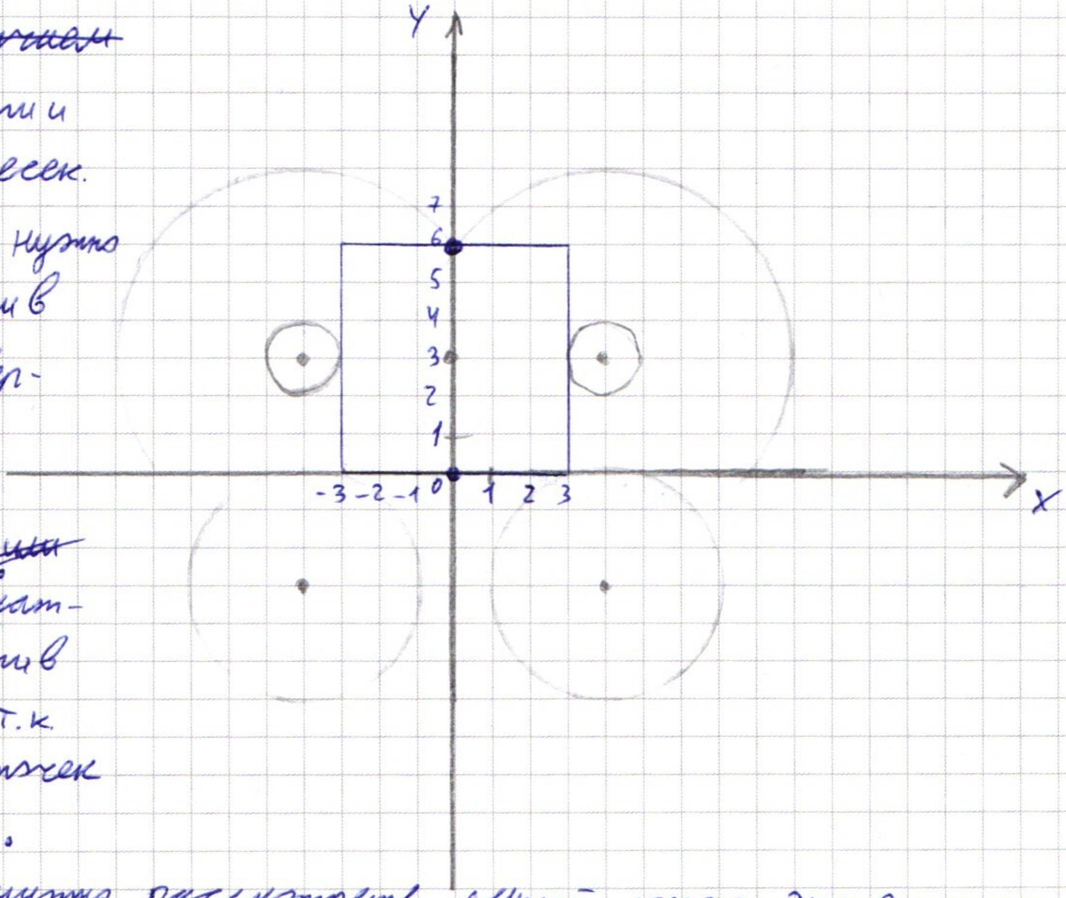
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~Итого получаем~~

Чтобы окр-ти и квадрат пересек. в 2х точках, нужно чтобы окр-ти в I и во II четвертях пересек. в 2х точках на квадрате, ~~или~~ (я не рассматриваю окр-ти в III и IV четв. т.к. у них нет точек леж. на OX).



Кроме того нужно рассмотреть случай, когда эти 2 окр-ти касались квадрата ~~ровно в 1~~ в разных точках, и этих точек было ровно 2. Первый случай происходит тогда, когда $\sqrt{|a|} = R = 5$. ~~тогда~~ Тогда окр-ти в I и во II четвертях пересек. квадрат в т ~~В~~ с коорд. (0;0) и в т с коорд (0,6). Второй случай возможен только тогда, когда $\sqrt{|a|} = 1$ и окр-ти кас. квадрата в т(3;3) и т(-3;3).

Другие случаи не возможны, т.к. при $R \in (1;5)$ окр-ти пересек квадрат в 4х точках, а при $R > 5$ и $R < 1$ не пересек. квадрат вообще. Итого $\sqrt{|a|} = 1 \Rightarrow a = 1$ и $\sqrt{|a|} = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = 25$

Ответ: $a = 1$; $a = 25$

№ 2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x \quad | : \sqrt{2}$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 11x\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x\right) = \cos 14x$

$\sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$

$2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\cos 4x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x\right)\cos 4x = (\cos 7x - \sin 7x) \cdot$
$\cdot (\cos 7x + \sin 7x)$

$-\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)\cos 4x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

I случай $\cos 7x - \sin 7x = 0$. т.к. $\sin 7x \neq 0$, то:

$\cos 7x - \sin 7x = 0 \quad | : \sin 7x$

$\operatorname{ctg} 7x - 1 = 0$

$\operatorname{ctg} 7x = 1$

$\cancel{7x =}$ $\cancel{7x = \pi}$

$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z}$

II случай $-\sqrt{2}\cos 4x = \cos 7x +$
$+ \sin 7x \quad | : \sqrt{2}$

$-\cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x$

$-\cos 4x = \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$

$-\cos 4x = \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0$

$2\cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 4x}{2}\right)\cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2}\right) = 0$

$\cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

1) $\cos\left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

2) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}$

$\frac{3x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi l,\ l \in \mathbb{Z}$

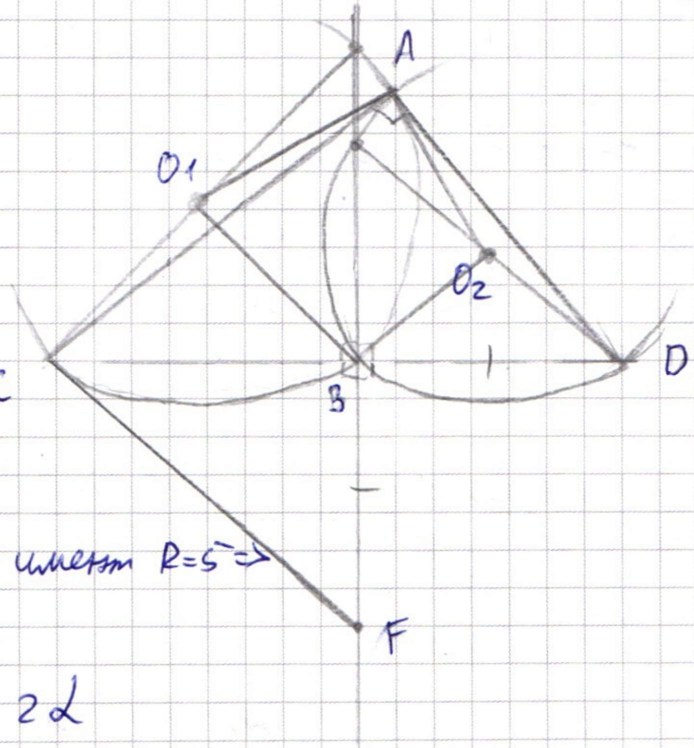
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $3x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11},\ n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3},\ l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11},\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3},\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

№6



Дано:

$R = 5$

$\angle CAD = 90^\circ$

а) CF - ?

б) $S_{\triangle ACF}$ если $BC = 6$

Решение: а) Окр-ти имеют $R = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ они одинаковы.

$\angle AO_2B = \angle AO_1B = 2\alpha$

AO_1BO_2 - ромб

$\angle ACD = \angle ADC$ - как впис. углы $= \alpha$

$\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Т.к. $\triangle ACB$ впис. в окр, то $10 = R =$ $= \frac{BC}{2\sin\alpha}$; $BC = 2R\sin\alpha$

Аналог. из $\triangle ABD$ $BD = 2R\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2R\cos\alpha$

$BF = FD = 2R\cos\alpha$ Из п/уг. $\triangle BCD$ по т. Пифаг. $CF^2 =$ $= BC^2 + BF^2$ и $R^2\sin^2\alpha + 4R^2\cos^2\alpha = 4R^2$

$CF = 2R = \cancel{20}\ 10$ – Ответ.

б) Если $BC = 6$, то $2R\sin\alpha = 6$;

~~$\sin\alpha = \frac{\cancel{6}}{10} = 0,6 \quad \cos\alpha = 0,8$~~ $\sin\alpha = 0,6$, $\cos\alpha = 0,8$

Из п/уг $\triangle BCF$: $\cos\angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{6}{10} = 0,6 =$

$= \sin\alpha$, ~~[illegible]~~

~~$CD = 2R(\sin\alpha + \cos\alpha) = 2\cdot 10\cdot(0,6+0,8) = 28\ 14$~~

~~т.к. Окр-ти имеют $R=5$ и $\angle ACB = \angle ADB$~~

$CD = 2R(\sin\alpha + \cos\alpha) = 10\cdot(0,6+0,8) = 14$

$AC = \frac{\sqrt{2}}{2}CD = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 14 = 7\sqrt{2}$

$S_{ACF} = \frac{1}{2}AC\cdot CF = \frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot 10 = \cancel{35}\ 35\sqrt{2}$ – Ответ

№ 1 Для начала скажем, что $3375 = 3^3\cdot 5^3$. Следовательно восемь цифр ~~при перемножении~~ числа будут три 3, три 5 две 1 или 1 девятка, 3 пятёрки, 1 тройка и 3 единицы.

~~Посчит. 1ый случай: $\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}$~~

~~$3\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 27\cdot 8 = 216$ вариантов~~

Посчит. 1ый случай: $\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 8!$, но т.к. мы считаем 3ки 3 раза, то получ. $\frac{8!}{3!}$, кроме того мы счит 5 3 раза и 2ки 2 раза. Итого $\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 2} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{3} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2 =$

$= \underline{560}$ случ.

2 случ.: $\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}$

$\frac{8!}{3!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4 = 1120$ случ

Итого получ. ответ: 1680 случ.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{3375 = 3^3 \cdot 5^3}$

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x)$

$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 11x)$

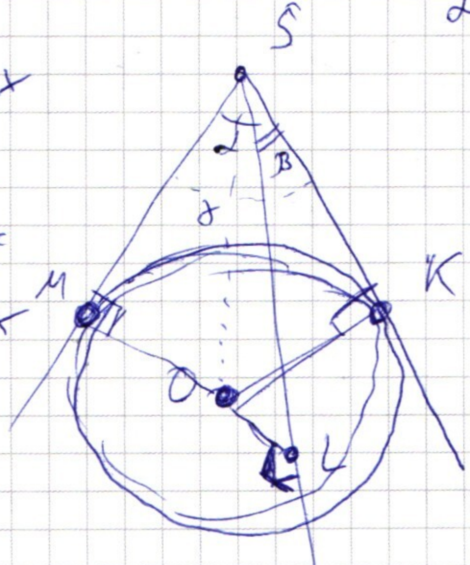
$\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 11x) - \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \sin 11x - ?$

$9261 \,|\, 3, 3, 3, 7^3 \quad 3^3$

$\underline{3}\ \underline{3}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1}\ -?$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma$



$\sqrt{2}\left(\sin(\frac{\pi}{4} - 11x) - \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 11x - \cos\frac{\pi}{4}\sin 11x - \right.$

$\left. - \sin\frac{\pi}{4}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x\right) =$

$= \cos 11x - \sin 11x - \cos 3x + \sin 3x$

$\cancel{\cos 11x - \cos 3x +}$

$\cos 11x - \sin 11x -$

$\cancel{\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = -\cos 14x}$

$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$\cos 11x - \sin 11x - (\cos 3x - \sin 3x)$

$\cos 14x = \cos(11x + 3x) = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

a

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cancel{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 11x - (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x = \cos 14x$

$\sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$\cancel{2\sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 14x}$

$\cancel{2\sin(7x)\cos\left(\frac{8x + \frac{\pi}{2}}{2}\right) = \cos 14x}$

$\cancel{2\sin(7x)\cos(4x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x}$

$\cancel{2\sin(7x)\cdot(\cos 4x \cos\frac{\pi}{4} - \sin 4x \sin\frac{\pi}{4}) = (\cos^2 7x - \sin^2 7x)}$

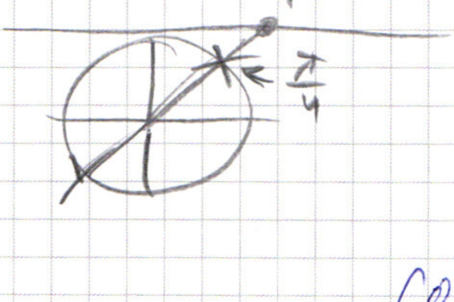
$\cancel{2\sin(7x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x - \sin 4x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x}$

$2\sin\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{11x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 14x$

$2\sin(7x - \frac{\pi}{4})\cos 4x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$

$2(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 7x)\cos 4x = (\cos 7x - \sin 7x)\cdot(\cos 7x + \sin 7x)$

$-\sqrt{2}(-\sin 7x + \cos 7x)\cos 4x = (\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$



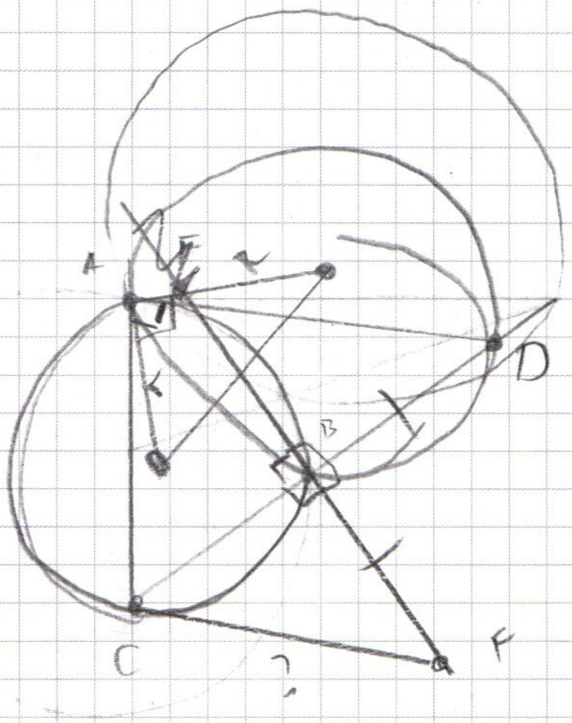
$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{4\pi + \pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-\lg^2 x = -3\lg x \lg y + 2\lg^2 y$

ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ ~~x≠0~~

$\lg x = t \quad \lg y = z$

$2z^2 - 3tz + t^2 = 0$

$D = 9t^2 - 4\cdot 2t^2 = t^2$

$z_1 = \frac{3t-t}{4} = \frac{1}{2}t$

$z_2 = \frac{3t+t}{4} = t$

$\lg y = \frac{1}{2}\lg x$

1) $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \to x = y^2$

$\lg y = \lg x$

2) $y = x$

1) ~~$x^2 - 2x\sqrt{x}$~~

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$

$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$

$y = 0$

$y=1$: $1 - 2 - 7 + 12 = 13 - 9$ ✗

$y = 2$: $8 - 8 - 14 + 12$ ✗

$y = 3$ ✓

$27 - 18 - 21 + 12 = 39 - 39$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y-3 \\ \underline{y^3 - 3y^2} & \overline{y^2 + y - 4} \\ y^2 - 7y & \\ \underline{y^2 - 3y} & \\ -4y + 12 & \\ \underline{-4y + 12} & \\ 0 & \end{array}$$

$y(y-3)(y^2+y-4) = 0$

$D = 1 + 4\cdot 4 = 17$

$y = 0$ ✗ $\quad y = 3$ ✓ $\quad y_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ✗ $\quad y_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ✓

1) $\boxed{\begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \end{cases}}$ $\quad \boxed{\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 \end{cases}}$

2) $x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$

$-4x^2 + 8x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0$ ✗ $\quad \boxed{x = 2}$

2) $\boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}}$

$(2^4)^{\lg 2} = 2^{2\lg 4}$

$2^{4\lg 2} = 2^{4\lg 2}$ ✓

$\left(\frac{3^5}{3^2}\right)^{\lg 3^2} = 3^{2\lg 3^3}$

$3^{6\lg 3} = 3^{6\lg 3}$ ✓

$\frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4} = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)