

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2. \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \tan 7x = -1 \Rightarrow 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = -2 \sin 4x \quad (1) \end{cases}$$

$$(1): 2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) + 2 \sin 4x = 0$$

$$-2 \sin(7x - \frac{\pi}{4}) + 2 \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x - \sin(7x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x) \cos(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi k \\ \frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k \\ \frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi m \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases} \quad k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases} \quad n, k, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi m}{11} \end{cases} \quad n, k, m \in \mathbb{Z}$$

$$3. \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(1): \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \quad \begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\lg\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg(y^2 \lg xy)$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$5 \lg x = 2 \lg y$$

$$\lg y = 2 \lg x$$

$$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

Второе,

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 8x = 0 \\ x = y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = y = 2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -2 & -7 & 12 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array} \quad x = y^2$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0 \\ x > 0 \text{ и } y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 3 \\ y^2 + y - 4 = 0 \\ D = 1 + 16 = 17 \\ x > 0 \text{ и } y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

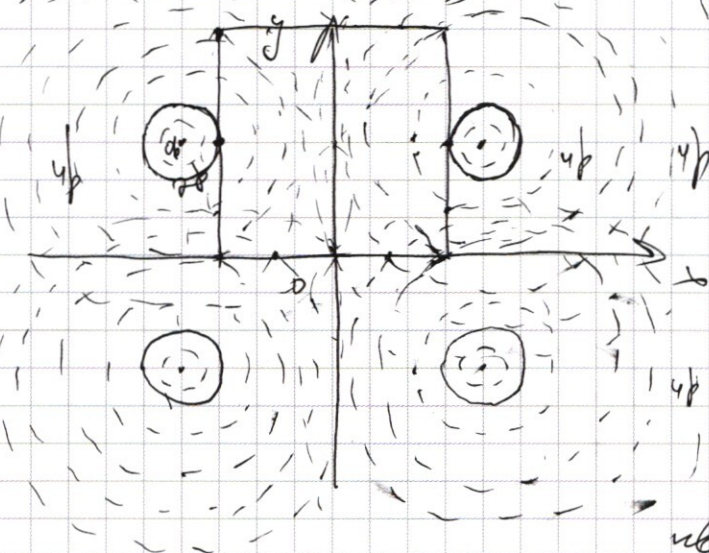
$$\begin{cases} x = y^2 \\ x > 0, y > 0 \\ y = 0 \\ y = 3 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 9 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Order: (2; 2); (9; 3); ~~(0; 0)~~ $\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ - квадрат с у. (0;3) и полуосью 6
 $(|x|-4)^2 + (y-3)^2 = a$ - кр. $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$, симметрич. отн.
 оси Ox , а также отн. оси Oy - т.е. 4 окр-ги с у. (4;3),
 (-4;3), (4;-3) и (-4;-3) и $R = \sqrt{a}$



До того, как 2 окруж-
 в I и IV четвертях кас-
 аются квадрата, сим-
 метрии не будет. При кас-
 тии будет 2р. До и после
 того как окр-ги из II и
 III четвертей перейдут за
 кв., будет 2р сим., но.

на окр-ги из I и IV не пересекут пересечения
 квадрата; Тогда всеобщий раз будет 2р сим.,
 когда окр-ги из II и III пересекут вершины
 кв. (3;6) и (-3;6)

Найдём этот a : ~~$a = \sqrt{r^2(4;3;3;3)}$~~ $a = \sqrt{r^2(4;3;3;3)} = 1$
 $a = \sqrt{r^2(4;-3;-3;6)} = \sqrt{49 + 81} = \sqrt{130}$

Тогда система имеет 2р сим.

при $a = 1$ и $a = \sqrt{130}$

Ответ: $a = 1$
 $a = \sqrt{130}$

1. $3375 = 5^3 \cdot 3^3$ - 6 цифр, значит, нужно добавить еще 2 единицы.

Всего вариантов размещения 8 единиц:

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

Из оставшихся 6 чисел нужно разместить, например 2 "5", тогда "3" будут уже определены

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$$

Всего всего вариантов $28 \cdot 20 = 560$

Ответ: 560.

2. $y > 2^x + 3 \cdot 2^{64}$ (1) Стенночно:

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \quad (2)$$

Найдем их: $70 + (2^{64} - 1) \cdot x = 2^x + 3 \cdot 2^{64}$

$$64 + 6 + (2^{64} - 1) \cdot x = 2^x + 6 \cdot 2^{64}$$

$$(2^{64} - 1) \cdot x = (2^{64} - 1) \cdot 6 + 2^x - 2^6$$

$$(2^{64} - 1)(x - 6) = 2^6(2^{x-6} - 1)$$

$$\text{Подбором: } \begin{cases} x = 6 \\ x = 70 \end{cases}$$

Т.к. верхняя граница вышележа то как-то точек для каждой абсциссы равно $y_2(x) - y_1(x)$

Всего точек: $63 \cdot 70 + (2^{64} - 1)(7 + 69) - (2^2 + \dots + 2^{69}) - 63 \cdot 3 \cdot 2^6$

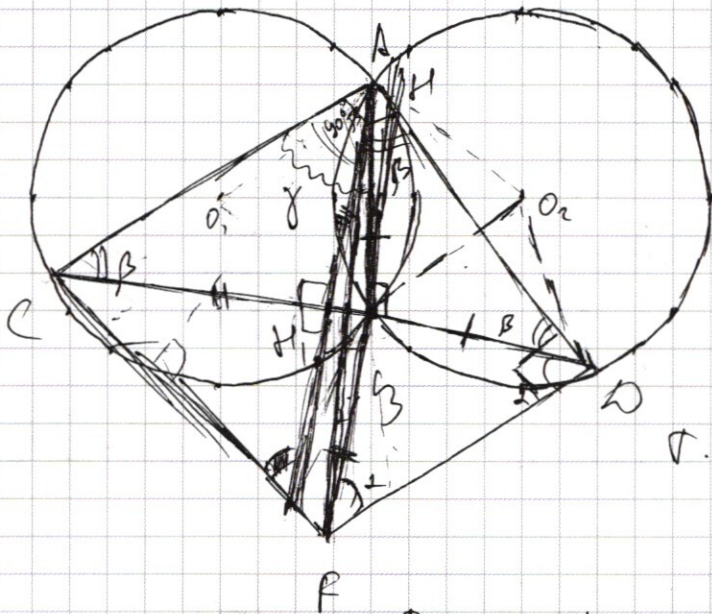
$$= 63(70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1) \frac{63}{2} (7 + 69) - \frac{(2^{80} - 1)}{2 - 1} - \frac{2^8 - 1}{2 - 1}$$

$$= 63(70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1) \cdot 38 - (2^{64} - 1) - 255$$

$$= 63 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \cdot \frac{63}{2} (7 + 69) - \frac{2^2(2^{63} - 1)}{2 - 1} - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65} = \boxed{67 \cdot 2^5 + 61 \cdot 2^{69}}$$

Ответ: $67 \cdot 2^5 + 61 \cdot 2^{69}$ точек

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



a) $FB = BD \Rightarrow \Delta FBD$ - gleichschenkelig

$$\Rightarrow \angle BFD = \angle FDB = 2$$

∵ $R_1 = R_2$, ∴ $\overline{AB}^{(\omega_1)} = \overline{AB}^{(\omega_2)}$

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle CDA = \beta$$

Proveden $AH, \perp CD$, тогда
 $\angle CAH = 90^\circ - \beta$, $\angle HAD = 90^\circ - (90^\circ - \beta) = \beta$
 $AH \perp CD$

$$\begin{aligned} \text{т. к. } AH, \perp CD & \Rightarrow AH, \parallel BH \Rightarrow \\ BH \perp CD & \Rightarrow \angle H, AD = \angle BHD = \beta \end{aligned}$$

Wegen $\angle + \beta + (\angle + \beta) = 180^\circ$

$$2\alpha + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\angle + \beta = 90^\circ$, no (in $\triangle RBA$)

$\beta = 45^\circ \Rightarrow$ ~~SAD~~ ~~Berechnung~~

$$\angle ADB = 90^\circ$$

$\angle CAB = \gamma$, тогда $\angle DAB = 90^\circ - \gamma$
 По т. синусов $BD = 2R \sin(90^\circ - \gamma) =$
 $= 2R \cos \gamma$
 Аналогично $AC = 2R \sin \gamma$

2) ~~ADBC - квадрат,~~

~~$H \equiv A, H_1 \equiv B \Rightarrow$~~

$$PC = PD = BD \sqrt{2}$$

(Luz. Phosphor.)

R - A CBF no r. Hughes

$$CF = \sqrt{2R^2 \sin^2 \theta + 2R^2 \cos^2 \theta}$$

$$= \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\angle CAD = 90^\circ$

12.0

$\angle ADB = 90^\circ$

~~_____~~

~~IV~~ - success

~~CA 1 PK 1~~

4/11/19

$$\Rightarrow \cancel{30} \neq 5$$

~~Aug. 1. 1899~~

[illegible]

--	--	--	--	--	--

Черновик ☒

Оставьте галочку в нуле.

$$\angle BO_2D = \angle BAO$$

(вписанный угол)

~~Br~~ ~~PC~~ $\approx 10^9$

$$8) BC = b \Rightarrow b = 2R \sin \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{b}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

$$BD = 2R \cos \gamma = 2R \sqrt{1 - \sin^2 \gamma} = 2 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8$$

$$\text{По теореме ДП: } DF = BD = 8\sqrt{2}$$

$$\angle BAD = 90^\circ - \gamma$$

$$\angle ABD = 180^\circ - (90^\circ - \gamma + 45^\circ) = 45^\circ + \gamma$$

$$\text{По т. синусов: } \frac{AD}{\sin(45^\circ + \gamma)} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \gamma)}$$

$$AD = (\sin 45^\circ \cdot \sin \gamma + \cos \gamma \cdot \cos 45^\circ) \cdot \frac{8}{\cos \gamma} =$$

$$= \left(\frac{3}{5\sqrt{2}} + \frac{4}{5\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{8}{\frac{4}{5}} = \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot 8 = 7\sqrt{2}$$

$$\text{По т. Пифагора: } AF = \sqrt{DF^2 + AD^2} = \sqrt{2(64 + 49)} = \sqrt{226}$$

По т. синусов:

$$\frac{AC}{\sin(180^\circ - \gamma - 45^\circ)} = \frac{BC}{\sin \gamma} \Rightarrow AC = \cos(45^\circ - \gamma) \cdot \frac{6}{3} \cdot 5 =$$

$$= \left(\frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}} \right) \cdot 2 \cdot 5 = 7\sqrt{2} \quad \angle ACF = 0$$

По т. Десятого $\sqrt{2}$ ~~По т. синусов $\frac{AE}{\sin \theta}$~~

$$\text{По т. Герона } S = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{226} + 7\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{7\sqrt{2} - \sqrt{226}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{226} + 7\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{7\sqrt{2} - \sqrt{226}}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\frac{288 - 226}{4} \cdot \frac{226 - 8}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4} \cdot \frac{218}{4}} = \frac{8}{4} \sqrt{218} = 2\sqrt{218}$$

Ответ: $2\sqrt{218}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 1.3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$5^2 \cdot 3^3 = 28 \cdot 20 = 560$$

$$C_2^8 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

$$C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = 20$$

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin(-7x) \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ 2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 7x) &= \sqrt{2} \cos 14x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ 2 \sin 4x \cos(7x + \frac{\pi}{4}) &= 2 \cos 14x \end{aligned}$$

$$(\cos 7x - \sin 7x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x = 1 & 7x = \frac{\pi}{4} + \pi n \rightarrow x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x + \sin 7x \end{cases}$$

$$\sin 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin 4x = 0$$

$$2 \sin(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{11}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$\frac{3}{2}x = -\frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}k$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 7x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq 7x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{3\pi}{28} \leq x \leq \frac{\pi}{28}$$

$$\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi m$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}m$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\lg x \lg \left(\frac{y^5}{x}\right) = 2 \lg xy \lg y, \quad y > 0, \text{ т.ч. } xy > 0$$

$$\lg x (\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$\lg x \cdot \lg y \Rightarrow \lg x = a$$

$$\lg y = b$$

$$5ab - a^2 = 2ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \end{cases}$$

$$-1x^2 + 8x = 0$$

$$-4x(x-2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y^3 + y^2 - 4y = 0$$

$$y(y^2 + y - 4) = 0$$

$$y = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 3$$

$$x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$1 \cdot 16 - 2 \cdot 8 - 7 \cdot 4 + 12 \cdot 3 = 0$$

$$16 - 16 - 28 + 36 = 0$$

$$x = y = 0$$

$$x = y = 2$$

$$81 - 54 - 63 + 36 = 0$$

$$117 - 117 = 0$$

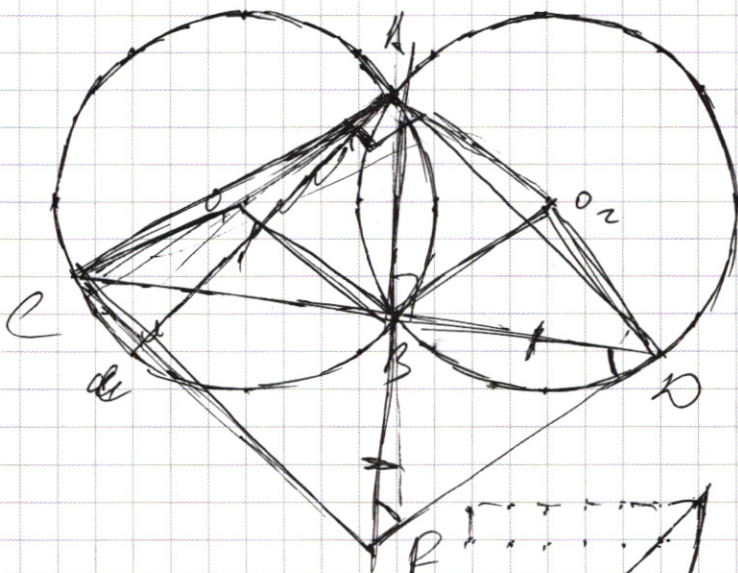
$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & -7 & 12 & 0 \\ & 3 & 1 & 1 & -4 & 0 & 0 \end{array}$$

$$y(y^2 + 2y - 4) = 0$$

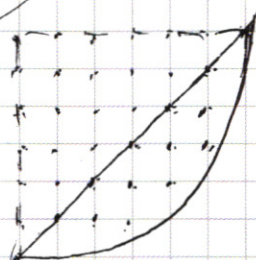
$$D = 4 + 16 = 20$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

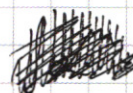
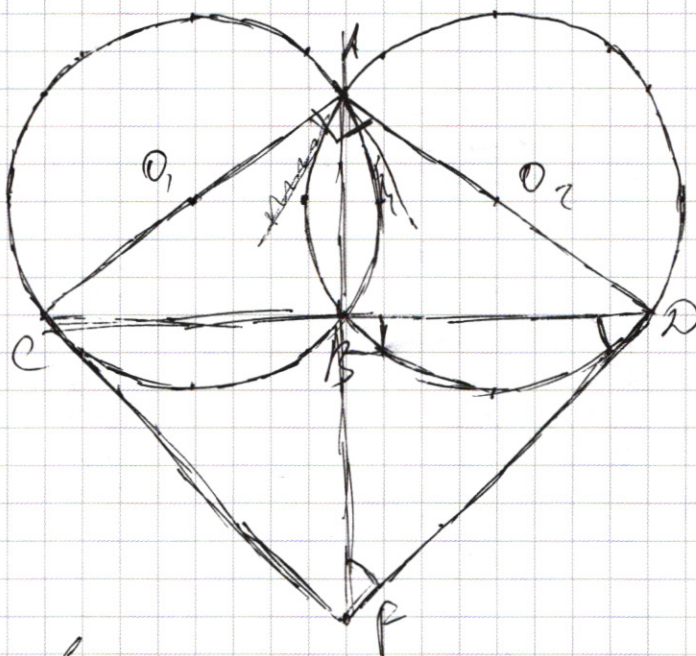
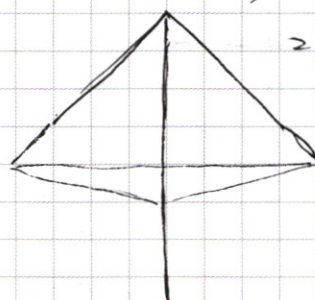
$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 25$ - 4 окруж. с $R=5$
 $3a=4$, $x_1=3$, $x_2=-3$
 $1 + (|y|-3)^2 = 5$
 $|y|-3=2$ $|y|=5$ $y=\pm 5$
 $|y|-3=-2$ $|y|=1$ $y=\pm 1$ $49+81=130$
 $x=\pm 6$ $y=\pm 1$ $y=\pm 5$
 $16+9=25$ $x=\pm 3$
 $(3;4)$ $(5;5)$ $2^{70} + 3 \cdot 2^{65} - 2^6 - 3 \cdot 2^{65}$
 $\frac{2^x}{\ln 2} + 3 \cdot 2^{65} - 70x$
 $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$
 $(6; 70)$ 64
 $(3;3)$ $(4;3)$
 $a=\sqrt{1} \approx 1$
 $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64}-1)x$
 $70 + 3 \cdot 2^{65} - 6 = 2^6 + 3 \cdot 2^{65}$
 $(6; 2^6(1+3 \cdot 2^{59}))$
 $(70; 2^{64}(2^5+3))$
 $2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + 2^{64}x - x$
 $2^x = 70 - x + 2^{64}(x-6)$
 $2^x - 2^6 = 6 - x + 2^{64}(x-6)$
 $2^6(2^{x-6}-1) + (x-6) = 2^{64}(x-6)$
 $2^6(2^{x-6}-1) = (2^{64}-1)(x-6)$
 $x=6$
 $x=70$



$$\frac{1}{2} \cdot 36 = 18$$



$$\begin{aligned} & 6 \sin(-11x) + 8 \sin 3x = \\ & 6 \sin(-4x) \cos 2x + 8 \sin 2x \cos 2x = \\ & 2 \sin 4x \cos 2x \end{aligned}$$



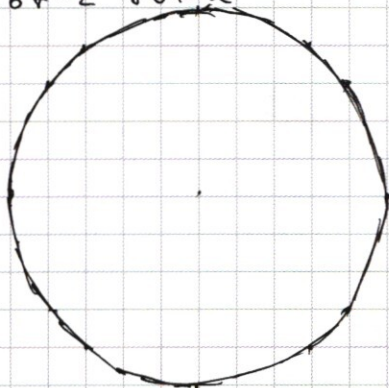
$$\left(70x + \frac{(2^{64}-1)x^2}{2} - \frac{2x}{\ln 2} - 3 \cdot 2^{65}x \right) \Bigg|_6^{70}$$

$$70 \cdot \frac{(2^{64}-1)}{2} - \frac{2 \cdot 70}{\ln 2} - 3 \cdot 2^{65} \cdot 70 - \left(6 \cdot \frac{(2^{64}-1)}{2} - \frac{2 \cdot 6}{\ln 2} - 3 \cdot 2^{65} \cdot 6 \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$63 \cdot 2^5 + 63 \cdot 2^{69} - 2^{20} + 2^7 =$$

$$= 67 \cdot 2^5 + 61 \cdot 2^{65}$$



$$2^{64} - 2^7 = 2^7(2^{57} - 1)$$

$$2^{64} - 2^7 = 2^7(2^{57} - 1)$$

$$2^{64} - 2^7 = 2^7(2^{57} - 1)$$

~~2^{64}~~

$$x=7: > 2^7 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\leq 20 + (2^{64} - 1) \cdot 2$$

$$20 + 2 \cdot 2^{64} - 2 - 2^7 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 63 - 128 + 2^{64} = 2^{64} - 65$$

$$\begin{array}{r} 186 \\ - 65 \\ \hline 121 \end{array} \quad \begin{array}{r} 451 \\ - 186 \\ \hline 265 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 512 \\ - 61 \\ \hline 451 \end{array}$$

$$x=8: > 2^8 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\leq 20 + (2^{64} - 1) \cdot 8 =$$

$$20 + 2^{64} - 2^3 - 2^8 - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 20 - 256 + 2^{64} - 2^{65} - 186$$

$$20 + 9 \cdot 2^{64} - 9 - 2^9 + 3 \cdot 2^{65} = 3 \cdot 2^{64} + 61 - 512 =$$

$$= 3 \cdot 2^{64} - 451$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ - 20 \\ \hline 236 \end{array}$$

$$20 + (2^{64} - 1) \cdot 9$$

$$2^{64}(1 + \dots + 63) - (2^7 + \dots + 2^{63}) + 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 =$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 9 \\ + 8 \cdot 9 \end{array}$$

~~2^{64}~~

~~63 \cdot 20~~

~~2^{64}~~

$$63 \cdot 20 - 63 \cdot 3 \cdot 2^{65}$$

$$63 \cdot 2^{17} (2^{64} - 1) \cdot 32 \cdot 26$$

$$\begin{array}{r} 26 \cdot 2 \\ 38 \cdot 2 \\ 19 \cdot 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 255 \cdot 5 \\ 51 \cdot 3 \\ 17 \cdot 1 \end{array}$$

2^4

$2, \dots, 69$

$2^2, \dots, 2^{63}$

$2^7 \cdot 15$

$15 \cdot 18$

$$32 + 19 \cdot 2^{65} - 3 \cdot 2^{65} =$$

$$= 32 + 16 \cdot 2^{65} = 32 + 2^{69}$$

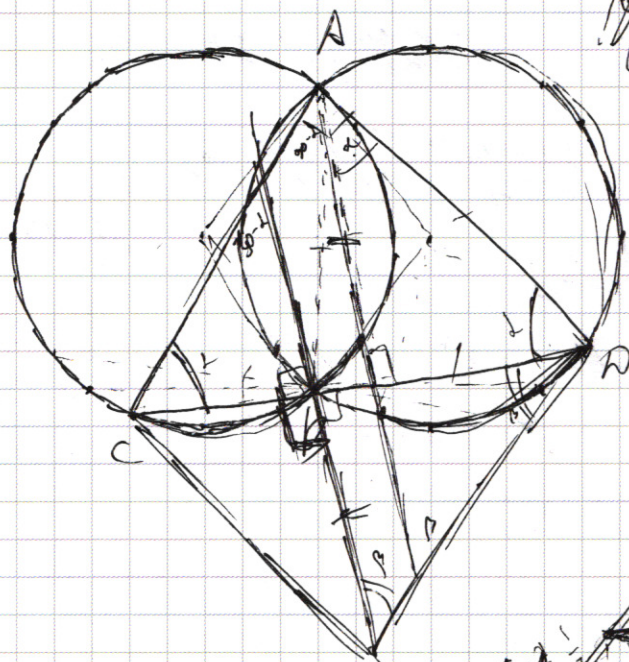
$$= \frac{2^7(2^{64} - 1)}{2 - 1} = 2^7(2^{64} - 1)$$

$$256 \cdot 1 = 255$$

$$63 \cdot 20 + (2^{64} - 1) \cdot 63 \cdot 38 - 2^{20} + 2^7 - 63(3 \cdot 2^{65}) =$$

$$= 63(20 + 2^{64} \cdot 38 - 38 - 3 \cdot 2^{65}) = 63 \cdot 32 + 63 \cdot 2^{69} - 2^{20} + 2^7$$

108



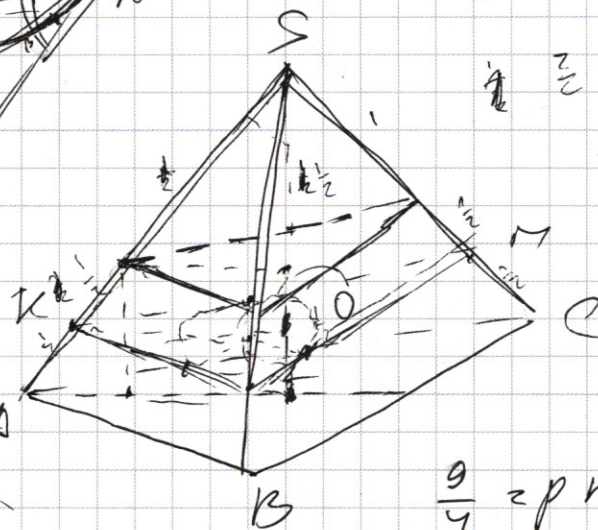
$2\alpha + \beta + 2\alpha + \beta = 180^\circ$
 $2\alpha + \beta = 90^\circ$
 ~~$2\alpha + \beta = 90^\circ$~~

$2\alpha = \beta$

$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}$

$\frac{9}{4}$



$\frac{9}{4} = pr$

$r = \frac{9}{4p}$

$\frac{218}{109} = 2$

$5\sqrt{2}$

$8\sqrt{2}$

$\sqrt{2(25+64)} =$

$3\sqrt{2} \cdot 89 =$

CP^2

$\sqrt{25+25-50\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= \sqrt{50\frac{20-\sqrt{2}}{2}} =$

$= 5\sqrt{2-\sqrt{2}} \cdot k$

