

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

~~3+5+5+6+9~~ 24

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ЗЗ.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

Рассмотрим первое уравнение:

$$\frac{(y^5)^{\lg x}}{x^{\lg x}} = (y^2)^{(\lg x + \lg y)} (=)$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot 100 (=)$$

$$y^{3 \lg x} = 1000 (=) y^{\lg x} = 10 (=) \boxed{y = x}$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 (=) \text{ (т.к. } x=y \text{ из первого)}$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 (=)$$

$$-4x^2 + 8x = 0 (=) -x^2 + 2x = 0 (=) x(2-x) = 0$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Проверим одз: $x=0$ не входит, т.к. в первом уравн. x в знаменателе; $x=2$ - входит.

Ответ: $x=2, y=2$

$$4 - 8 - 8 - 12 + 24 = 0$$

№5

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

два решения

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

1) Второе уравнение - четыре окружности с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами $(\pm 4, \pm 3)$

2) Первое уравнение: (разберём 4 случая)

1. $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}$ в этом случае $(y-3-x) + (y-3+x) = 6 \Leftrightarrow 2y-6=6 \Leftrightarrow \boxed{y=6}$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

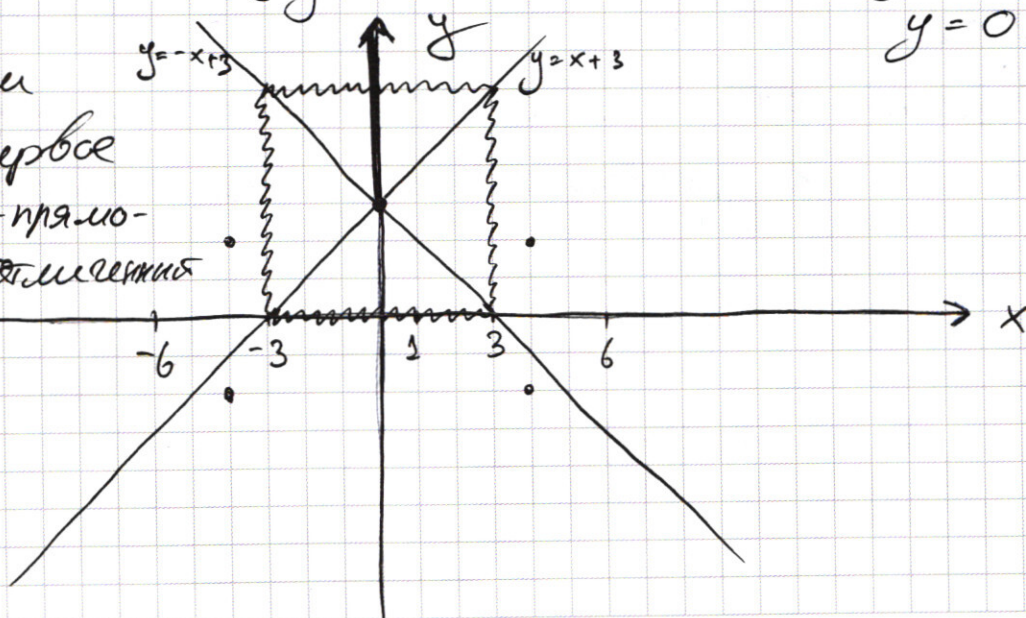
2. $\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$ тогда $(y-3-x) + (-y+3-x) = 6 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x=-3}$

3. $\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$ тогда $-y+3+x + y-3+x = 6 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x=3}$

4. $\begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq -x+3 \end{cases}$ тогда $-y+3+x - y+3-x = 6 \Leftrightarrow -2y+6=6 \Leftrightarrow y=0$

3) Построим график. Первое уравнение - прямоугольник, отрезки

вертикальные
и горизонтальные.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

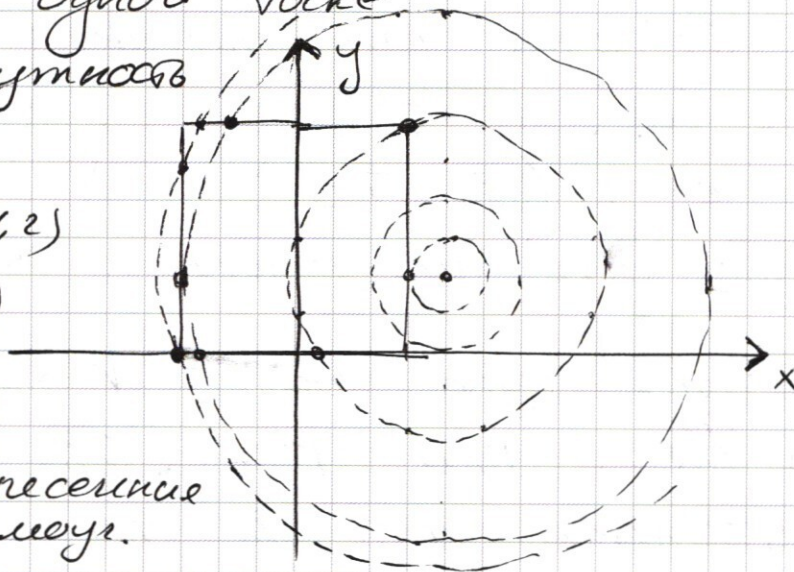
4) Четыре окружности должны иметь ровно две точки пересечения с прямоугольником.

Система симметрична относительно прямой $x=0$. Значит, или две точки лежат на прямой $x=0$, или по каждую сторону ровно по одной точке.

5) Рассмотрим окружность с центром $(4, 2)$

(где окр. с центром $(-4, 2)$ всё симметрично)

r - радиус, $r = \sqrt{a}$



$r < 1$ - нет точек пересечения с прямоугольником.

$r = 1$ - 1 точка

$r \in (1, 2)$ - две точки.

Когда $r = 4\sqrt{2}$ или $r = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$, одна из точек лежит на прямой $x=0$. Но другая не лежит, то есть в этих случаях будет хотя бы ~~две~~ три точки пересечения, учитывая окр. $(-4, 2)$, эти случаи не подходят.

$r = 2$ - три точки

$r \in (2, \sqrt{2^2 + 2^2}) = (2, \sqrt{8})$ - четыре точки.

$r = \sqrt{53}$ - три точки.

$r \in (\sqrt{53}, \sqrt{7^2 + 4^2}) \Leftrightarrow r \in (\sqrt{53}, \sqrt{65})$ - две точки

$r = \sqrt{65}$ - одна точка

$r > \sqrt{65}$ - нет точек пересечения.

6) Рассмотрим окружности с центрами $(4, -2)$
 $(-4, -2)$

Пусть $r = \sqrt{a}$ - радиус.

Тогда

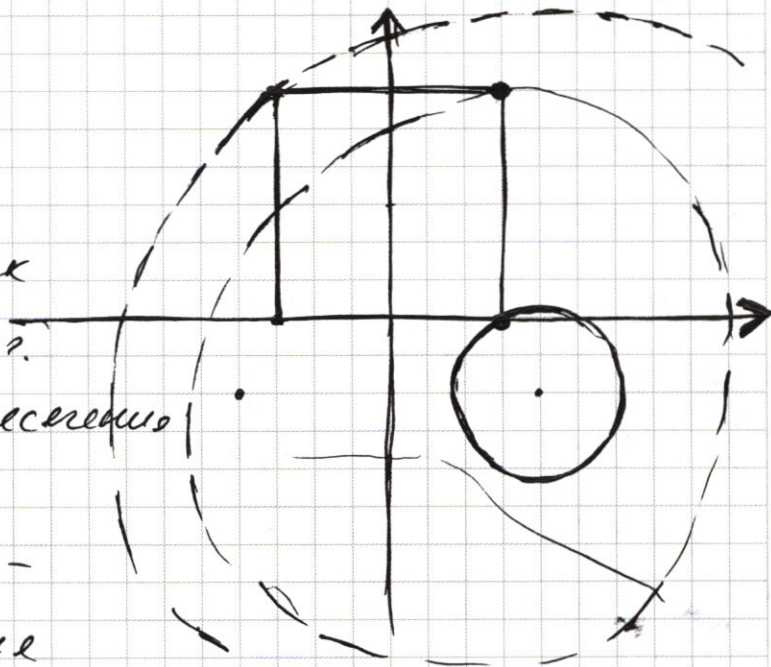
$r < \sqrt{2^2 + 5} = \sqrt{9} = 3$ - нет точек

пересечения с прямой?

$r = 3$ - одна точка пересечения

$r \in (3, \sqrt{8^2 + 2^2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r \in (3, \sqrt{68})$ -
две точки пересечения



$r = \sqrt{68}$ - одна точка ; $r > \sqrt{68}$ - нет точек.

2) Итак, при $r \neq 1, \sqrt{65}, 5, \sqrt{113}$ точек пересечения хотя бы три только для одной пары окружностей. Значит, ответом могут являться только какие-то из этих чисел.

$r = 1$ - подходит. Две точки для первой пары окружностей и none - для второй.

$r = 5$ - шесть точек пересечения, не подходит.

$r = \sqrt{65}$ - хотя бы четыре точки, не подходит.

$r = \sqrt{113}$ - подходит. Две точки для второй пары и none для первой.

Ответ. $a = 1$ или $a = 113$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

§ 1.

$3325 = 3^3 \cdot 5^3$. Восемизначное число может состоять из ~~восьми~~ цифр 3, 3, 5, 5, 1

1) три тройки, три пятёрки, две единицы!

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 56 \cdot 10 = 560$$

2) одна двоячка, одна тройка, ~~две~~ ^{три} единицы; ^{три} пятёрки

$$C_8^2 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 20 =$$

$$= 56 \cdot 20 = 1120$$

3) Всего: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел

$$\begin{array}{r} + 56 \\ 2 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1120 \\ + 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

§ 6(a)

1) Пусть $\angle BAD = \alpha$. Тогда $\angle CAB = 90^\circ - \alpha$

2) По теореме синусов,

$$BD = 2 \cdot 5 \sin \alpha = 10 \sin \alpha$$

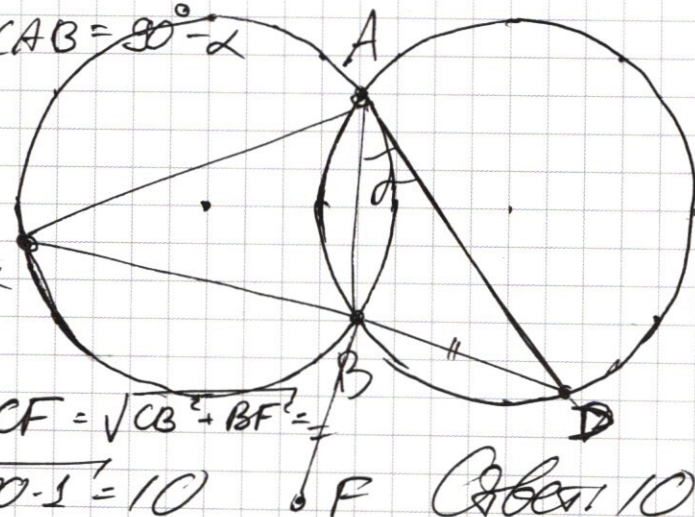
$$CB = 2 \cdot 5 \cdot \sin(90^\circ - \alpha) = 10 \cos \alpha$$

$$3) BF = BD = 10 \sin \alpha$$

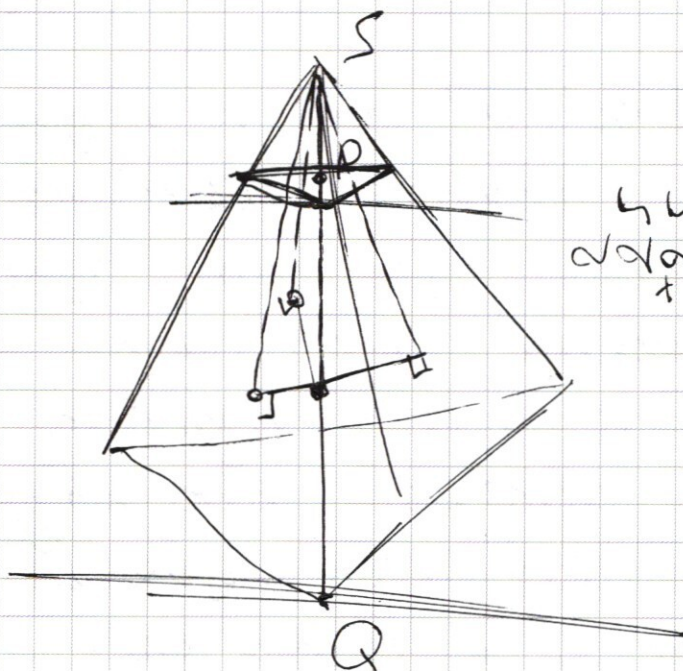
4) По теореме Пифагора, $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} =$

$$= \sqrt{(10 \sin \alpha)^2 + (10 \cos \alpha)^2} = \sqrt{100 \cdot 1} = 10$$

Ответ: 10

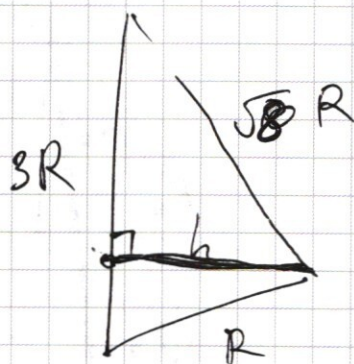


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 55 \\ 222 \\ + \\ \hline 120 \\ 50 \\ \hline 625 \end{array}$$

$$\sqrt{(3R)^2 + R^2} = \sqrt{10} R$$



$$\frac{h}{\sqrt{10} R} = \frac{R}{3R}$$

$$\frac{h}{\sqrt{10}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x}{x+R}$$

$$\begin{array}{r} x \\ x+2R \\ \hline x \\ 2R \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{8}{9} R$$

$$h = \frac{\sqrt{10}}{3} R$$

§ 4

1) Пусть P, Q - точки пересечения (SO) и сферы, $SP < SQ$; тогда P, Q принадлежат сечению, касающемуся сферы и перпендикулярное SO .

2) $SK = SL = SM = \sqrt{SO^2 - R^2}$, где R - радиус сферы. Из симметрии, плоскость (KLM) перпендикулярна SO . Значит, пирамиды, образованные сечениями (проходящими через P , проходящими через Q и (KLM)) подобны, площади сечений относятся как квадраты отрезков прямой (SO) , лежащих между S и плоскостями. (т.к. высоты трёх пирамид лежат на прямой (SO)).

3) Пусть $(SO) \cap (KLM) = T$.

Найдём ST . $MT \perp ST$

Пусть $SP = x$, тогда $SO = x + R$

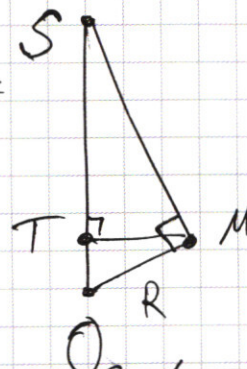
$SQ = x + 2R$

~~$$\frac{ST}{SM} = \cos(\angle OSM) = \frac{SO}{OS}$$~~

~~$$ST = \frac{SM^2}{OS} = \frac{\sqrt{(x+2R)^2 - R^2}}{x+R} = \frac{x^2 + 4xR + 4R^2 - R^2}{x+R} = \frac{x^2 + 4xR + 3R^2}{x+R}$$~~

$$4) \frac{1}{4} = \left(\frac{SP}{SQ}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+2R}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2 + 4xR + 4R^2}$$

5) Пусть Sx - искома площадь. Тогда $Sx/S = ST^2/x^2$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) Из пункта 4, $4x^2 = x^2 + 4xR + 4R^2$

$$x^2 + 4xR + 3R^2 = 4x^2 - R^2$$

$$ST = \frac{4x^2 - R^2}{x + R} \quad 3x^2 - 4xR - 4R^2 = 0$$

$$D = (4R)^2 + 4 \cdot 4R^2 \cdot 3 = (16 + 48)R^2 = 16(1+3)R^2 = 64R^2$$

$$x = \frac{4R \pm 8R}{6}$$

$$\begin{cases} x = 2R \\ x = -\frac{4}{6}R \end{cases} \text{ - невозможно, т.к.}$$

x и R - положительные

Итак, $x = 2R$

2) Тогда $ST = \frac{4(2R)^2 - R^2}{2R + R} = \frac{16R^2 - R^2}{3R} = \frac{15R^2}{3R} = 5R$

8) Из пункта 5, используя площадь

$$S_x = \frac{ST^2}{x^2} = \frac{(5R)^2}{(2R)^2} = \frac{25}{4} = \frac{625}{100} = 6.25$$

2) Тогда $OS = x + R = 3R$; $SP = 4R$

$$SM = \sqrt{SO^2 - OM^2} = \sqrt{(3R)^2 - R^2} = \sqrt{8}R$$

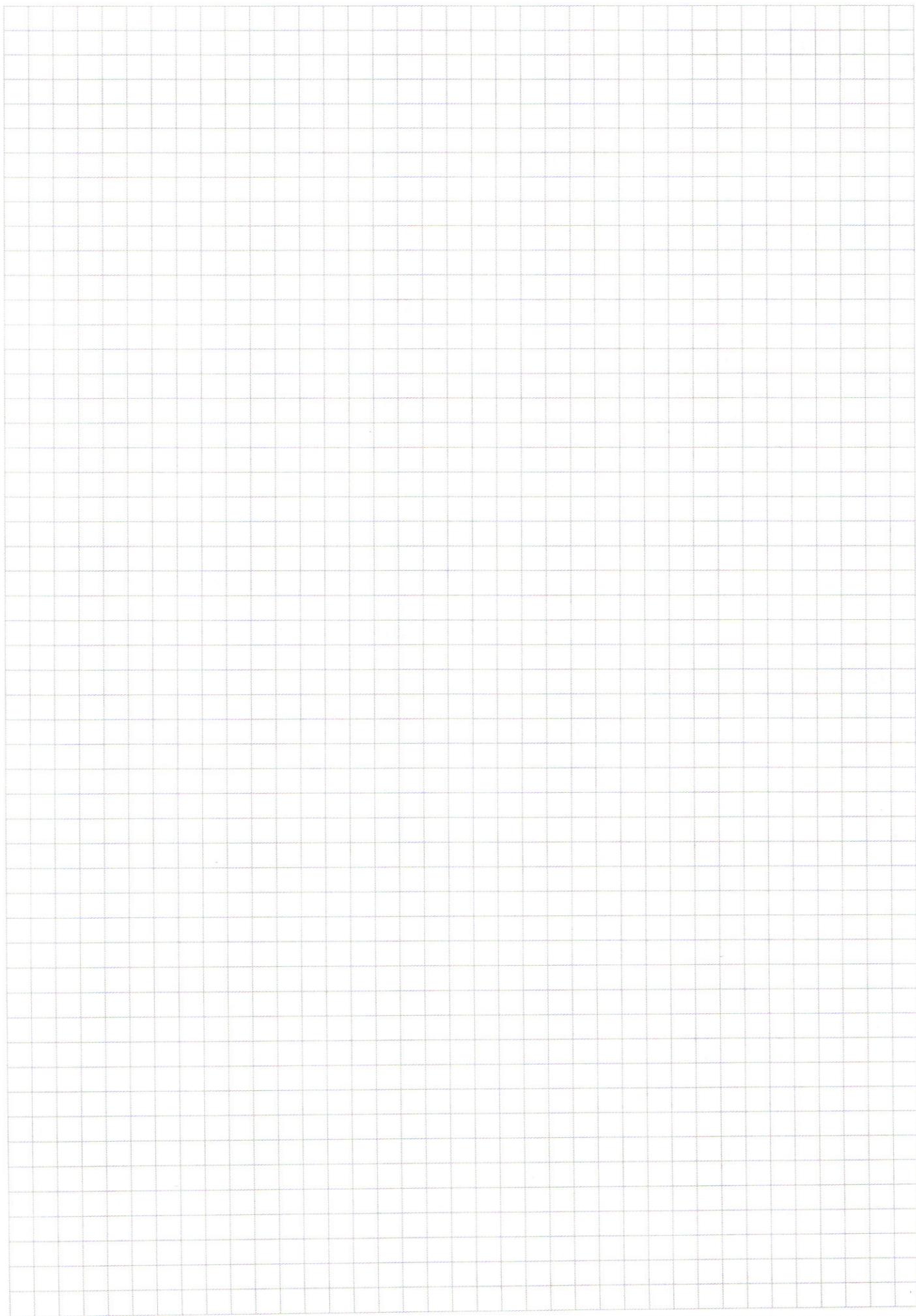
$$\cos(\angle OSM) = SM/OS = ST/SM = \sqrt{8}R/3R = ST/\sqrt{6}R$$

$$ST = \sqrt{8}R \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{8}{3}R$$

8) $\frac{1}{S_x} = \frac{SP^2}{ST^2} = \frac{(2R)^2}{\left(\frac{8}{3}R\right)^2} = 4 / \frac{64}{9} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$S_x = \frac{16}{9}$ - искомая площадь Ответ: $\frac{16}{9}$

отношение
площадей
искомой
и известной



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) = \cos x = \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \cos y =$$

$$11-3=8$$

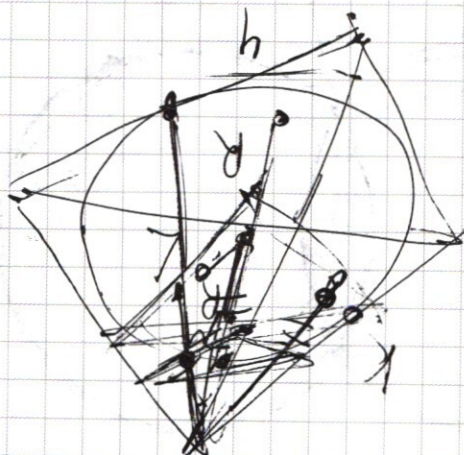
$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \right) = \sin x = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \frac{\cos x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} \right) = \sin y = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \frac{\sin x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 16 \\ \hline 65 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 37 \\ 51 \\ 51 \\ \hline 5135 \\ 61 \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ 25 \\ \hline 87 \\ 25 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 3} \\ 12 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$3375 = 25 \cdot 45 \cdot 3 = 25 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3^3$$

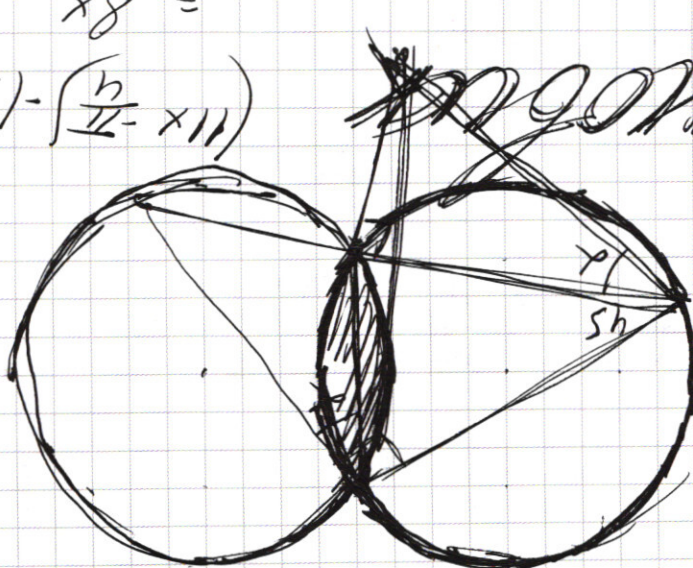
$$\sin 4x = \left(\frac{y}{x} - x \right) \cos 14x$$

$$\sin 8x \cos 14x = \frac{2}{14x - \frac{y}{x}}$$

$$\sin \left(14x - \frac{y}{x} \right) \cos 8x$$

$$\sin 14x = \left(\frac{y}{x} - x \right) \cos 14x$$

$$8x = \left(\frac{y}{x} - x \right) - \left(\frac{y}{x} - x \right) \cos 14x$$



$$\frac{y}{x} = \cos 14x$$

$$\frac{y}{x} = \cos 14x$$

$$10 \cos 14x = 6$$

$$10 \cos 14x = 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

82.

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 14x \\ (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) &= \sqrt{2} \cos 14x \\ 2 \cos 7x \cos 4x - 2 \cos 7x \sin 4x &= \sqrt{2} (2 \cos^2 7x - 1) \\ \sqrt{2} (\cos 7x) (\cos 4x - \sin 4x) &= 2 \cos^2 7x - 1 \\ -\cos 7x \cdot 2 \cdot \sin(4x - \frac{\pi}{4}) &= 2 \cos^2 7x - 1 \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 3x \cos 11x - \sin 3x \sin 11x)$$

$$\cos 3x (\sqrt{2} \cos 11x + 1) + \sin 3x (-\sqrt{2} \sin 11x - 1) = \cos 11x - \sin 11x$$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg(xy) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y \\ (x^2 - 2xy + y^2) - 4y^2 - 4x + 12y = 0 \end{array} \right.$$

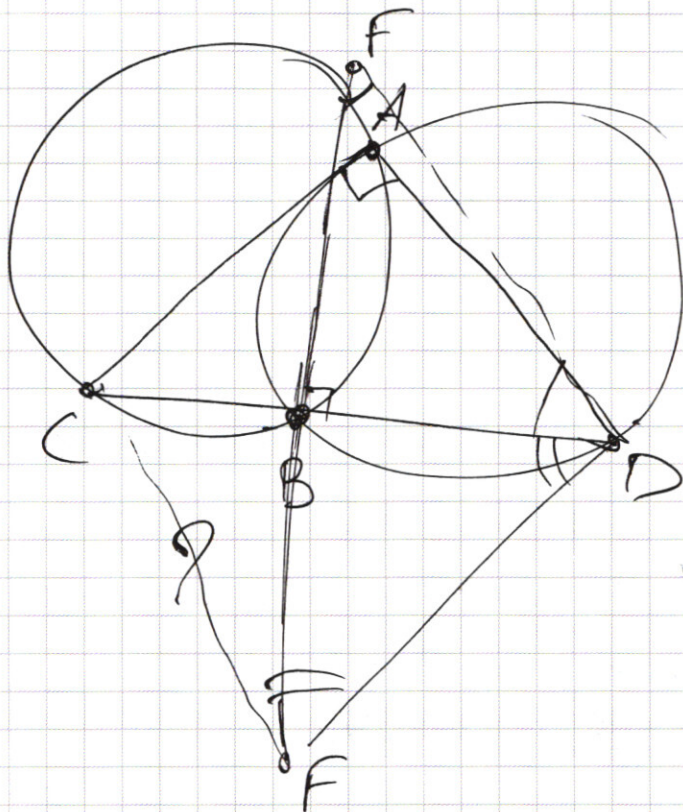
$$\left\{ \frac{y^5 \lg x}{10} = y^2 \lg x \cdot 100 \right.$$

$$[(x-y)^2 - (4y^2 - 12y + 9)] - 4x + 9 = 0$$

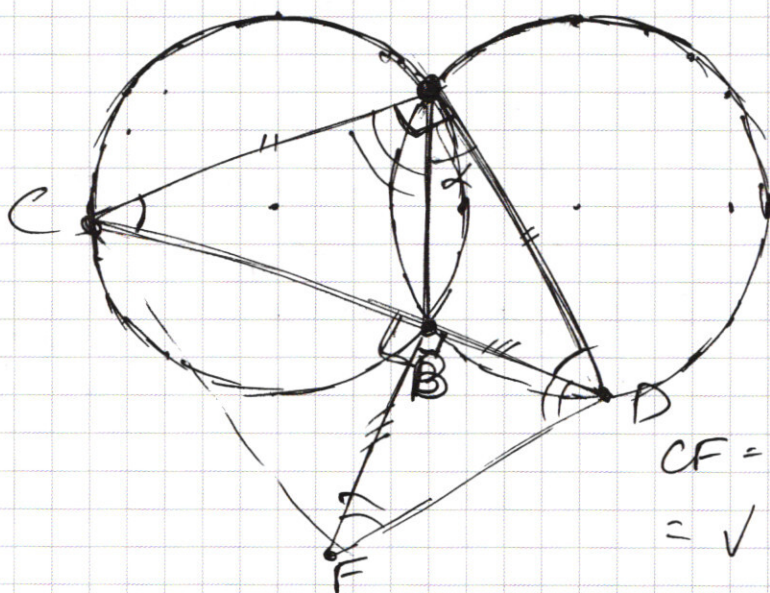
$$\left\{ y^3 \lg x = 1000 \right.$$

$$\left\{ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \right.$$

$$y^{\lg x} = 10 \Rightarrow x = y$$



$$\begin{array}{r} 64 \\ 49 \\ \hline 113 \end{array}$$



$$BD = 10 \sin \alpha$$

$$CB = 10 \sin (90^\circ - \alpha) = 10 \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{BD^2 + CB^2} = \sqrt{\quad}$$