МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФ[

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$

Значит, в числе могут встречаться цифры 1, 3, 5, 9, а точнее могут встречаться числа из наборов цифр:

1) 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5
2) 1, 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5.

1) Количество 8ми значных чисел из набора 1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5 —

$- C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{\cancel{5!} \cdot 3!} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot \cancel{2}} =$

$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560.$

(C_8^3 - количество способов выбрать 3 из 8 мест для „пятёрок"
C_5^3 - места для „троек")

2) набор 1, 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8!}{3! \cdot \cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3! \cdot \cancel{2!}} \cdot \cancel{2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2}} = 56 \cdot 20 =$

места для „пятёрок"; места для „единиц"; место для „тройки"

$= 560 \cdot 2 = 1120$

Итого: $560 + 1120 = 1680$.

Ответ: 1680.

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\left.\begin{matrix} x>0 \\ xy>0 \\ x\neq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ y>0. \end{cases}$

На ОДЗ ~~верн~~ равносильны следующие преобразования уравнения (1).

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\cdot(\lg x + \lg y)}$$

$$y^{5\lg x} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{y^{2\lg x}} = y^{3\lg x} = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

Прологарифмируем данное выражение по основанию 10:

$$\lg\left(y^{3\lg x}\right) = \lg\left(y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}\right)$$

$$3\lg x \cdot \lg y = \lg\left(y^{2\lg y}\right) + \lg\left(x^{\lg x}\right) =$$

$$= 2\lg y \cdot \lg y + \lg x \cdot \lg x = 2\lg^2 y + \lg^2 x.$$

$$3\lg x \cdot \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2 x \quad (3)$$

~~во~~ Пусть $\lg x = 0 \Rightarrow x = 10^0 = 1$.

Тогда $3\cdot 0 = 2\lg^2 y + 0 \Rightarrow \lg y = 0 \Rightarrow y = 1$.

Подставим в (2):

$1 - 2 - 4 - 3 + 12 = 13 - 9 \neq 0. \Rightarrow x \neq 1$ и $y \neq 1 \Rightarrow \lg x \neq 0 \Rightarrow$ можем разделить (3) на $\lg^2 x$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (Продолжение)

$3\lg x \cdot \lg y = 2\lg^2 y + \lg^2 x \quad \Big| : \lg^2 x$

$3 \cdot \left(\frac{\lg y}{\lg x}\right) = 2\left(\frac{\lg y}{\lg x}\right)^2 + 1.$

Замена: $t = \frac{\lg y}{\lg x}$

$3t = 2t^2 + 1$

$2t^2 - 3t + 1 = \cancel{2t}\, 0$

$(2t-1)(t-1) = 0.$

1) $2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\lg y}{\lg x} = \frac{1}{2}$

$\begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix} \Big| \Rightarrow \frac{\lg y}{\lg x} = \log_x y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow x^2 = y^4$

Подставляем в (2):

$y^4 - 2 \cdot y^2 \cdot y - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0.$

$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0.$

$y \cdot (y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0.$

2) $t=1$

$\left.\begin{matrix} x>0 \\ x\neq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\lg y}{\lg x} = \log_x y = 1 \Rightarrow x^1 = y \Rightarrow \underline{x=y}$

Подставляем в (2):

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0.$

$-4x^2 + 8x = 0$

$4x(2-x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} x=0 \text{ – не подходит под ОДЗ} \\ x=2 \Rightarrow y=2. \Rightarrow \end{matrix}\right.$

$\Rightarrow \underline{(2;2) \text{ – решение.}}$ (по ОДЗ подходит)

$\left(\frac{2^5}{2}\right)^{\lg 2} = 2^{2\cdot 2\lg 2}$

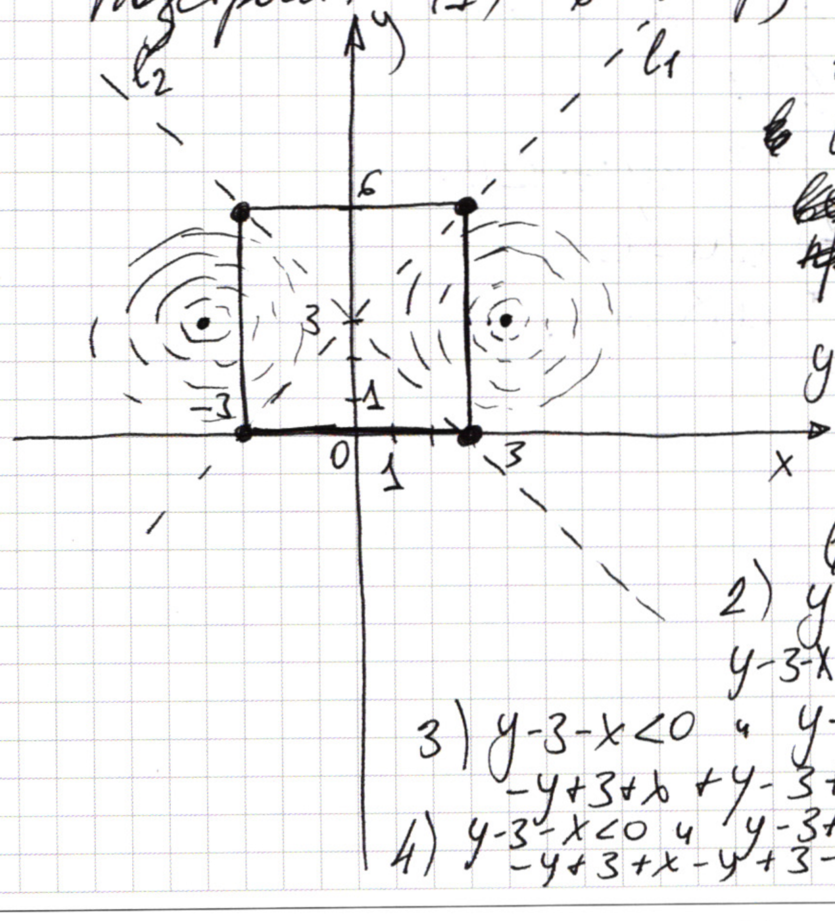
$2^{4\lg 2} = 2^{4\lg 2}$ (+).

Ответ: (2;2)

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (2) \end{cases}$$

Подстроим (1) в координатах $y(x)$.



$l_1: y-3-x=0.$

$l_2: y-3+x=0.$

1) $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x \geq 0$

$y-3-x+y-3+x = 6$

$2y-6=6$

$\underline{y=6}.$

этот участок находится выше l_2 и l_1.

2) $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x<0$

$y-3-x-y+3-x = -2x = 6$

$x=-3.$

3) $y-3-x<0$ и $y-3+x\geq 0$

$-y+3+x+y-3+x = 2x = 6 \Rightarrow \underline{x=3}$

4) $y-3-x<0$ и $y-3+x<0$

$-y+3+x-y+3-x = -2y+6 = 6 \Rightarrow \underline{y=0}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5 (Продолжение)

Получаем квадрат с вершинами в точках $(-3;0)$, $(-3;6)$; $(3;6)$; $(3;0)$.

~~Уравнение (2) при $a \le 3$ описывает 4 окружности с~~

При $a<0$ множество решений (2) пустое т.к. сумма двух квадратов ≥ 0.

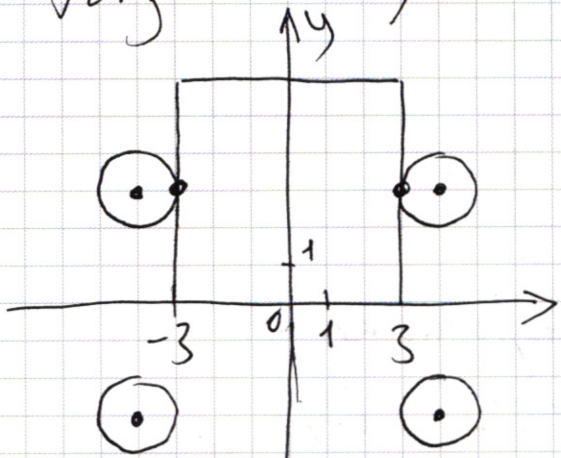
$$a=0 \Rightarrow \begin{cases} |x|-4=0 \\ |y|-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 4 \\ y=\pm 3. \end{cases}$$ — 4 точки:

$(4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$.

При $0<a\le 9$ ур-е (2) описывает 4 окружности с центрами в $(4;3)$; $(4;-3)$; $(-4;3)$; $(-4;-3)$ и радиусами $\sqrt{a}$.

Рассмотрим окружности с центрами в $(4;3)$ и $(-4;3)$. Картинка симметрична относительно оси ~~Ox~~ OY $\Rightarrow$ окружности с центром в $(4;3)$ и в $(-4;3)$ имеют одинаковое число пересечений с квадратом. ~~В~~ Нижние окружности при $a<9$ квадрат не пересекают. То есть, чтобы решений было 2 окружность с центром в $(4;3)$ должна касаться стороны квадрата и окр. с центром в $(-4;3)$ касается его.

Тогда в сумме решений 2.



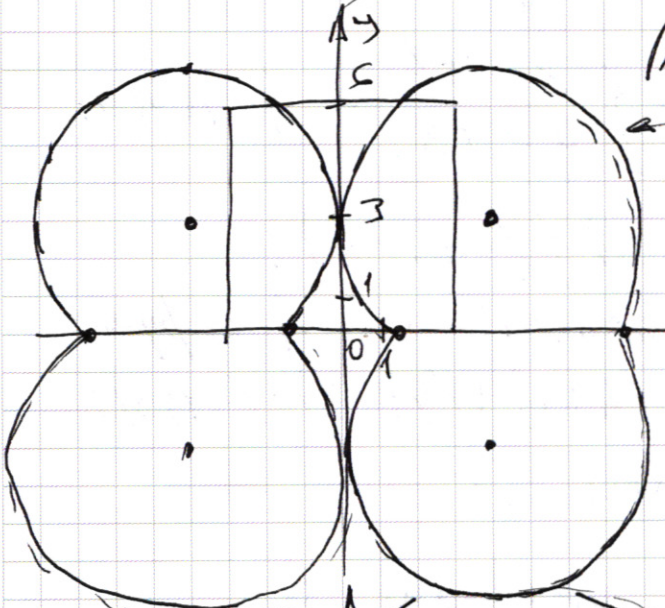
Это достигается при $\underline{a=1}$

При $0<a<1$ окружности не имеют общих точек с квадратом

при $1<a<9$ – 4 точки. ⇒

⇒ 4 решения.

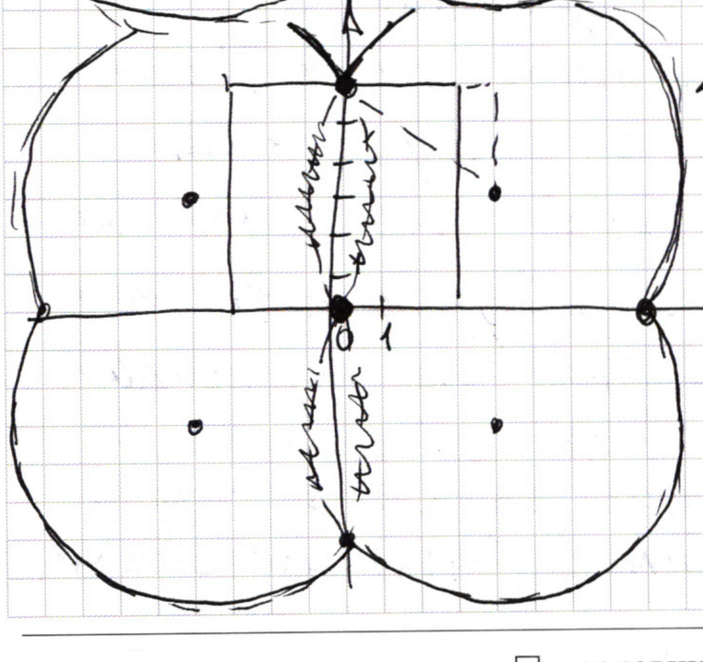
При $a>9$ окружности становятся неполными, так как ~~от~~ каждая окружность должна оставаться в своей четверти.



Примерная картинка при $a>9$.

~~Сто~~ 4 решения.

Расширяем окружности до того момента как ~~их~~ их пересечения на нижней стороне квадрата будут совпадать.



То есть все 4 окружности пересекаются в точке $(0;0)$ и 2 верхние пересекаются в точке $(0;6)$.

Снова 2 решения: $(0;0)$ и $(0;6)$

радиус окр. – 5 ⇒

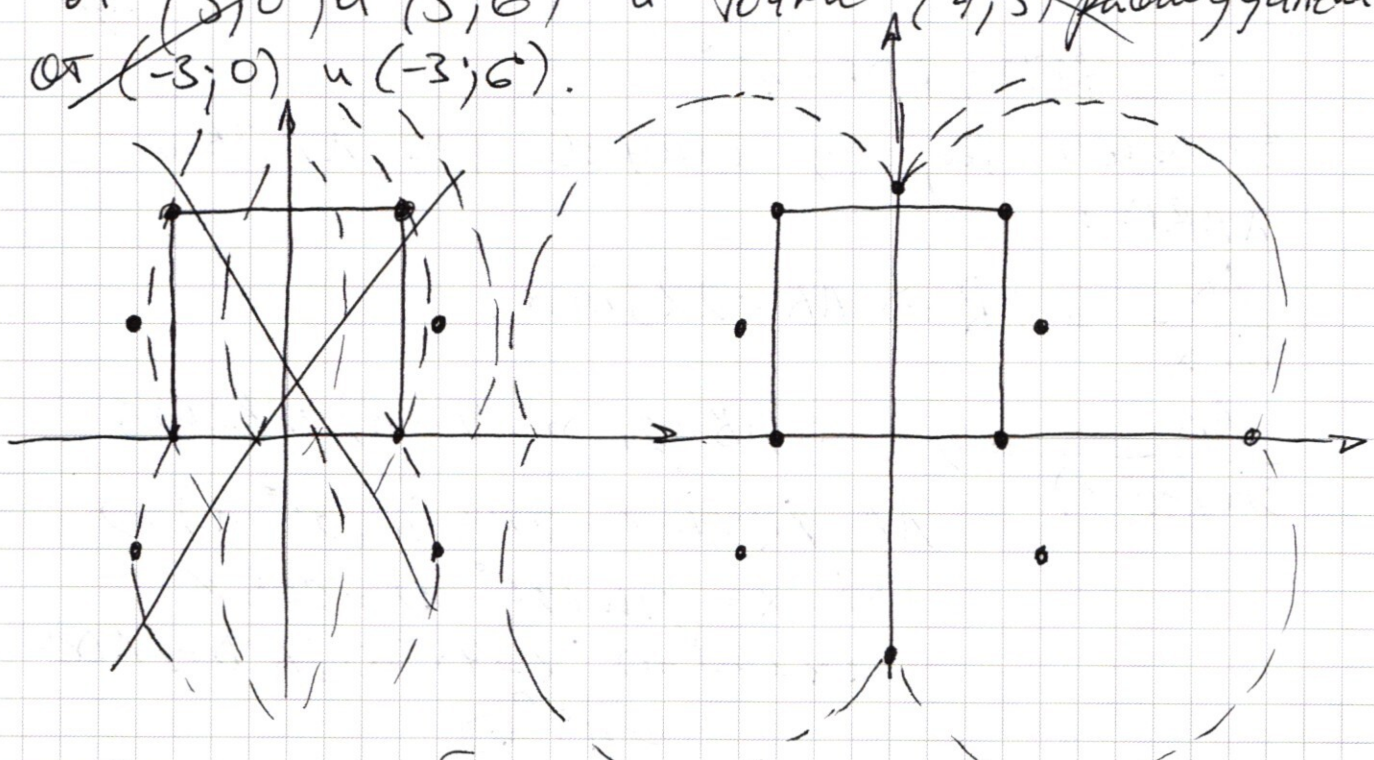
⇒ $\underline{a=25}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

N5 (Продолжение)

~~Далее расширяем окружности: решений снова 4. ~~Расст~~ Крайние точки где будут пересекаться окружности и квадрат - его вершины. Там решений тоже будет 4. (Так как точка (-4;3) равноудалена от (3;0) и (3;6) и точка (4;3) равноудалена от (-3;0) и (-3;6).~~



При дальнейшем увеличении радиуса ~~окружностей~~ дуги перестают пересекаться с квадратом и решений нет.

Ответ: $a = 1; 25$

~~N~~ N6

а) Дано:

$R=5$

$w_1 \cap w_2 = A, B$

$C \in w_1$ $D \in w_2$

$B \in [CD]$

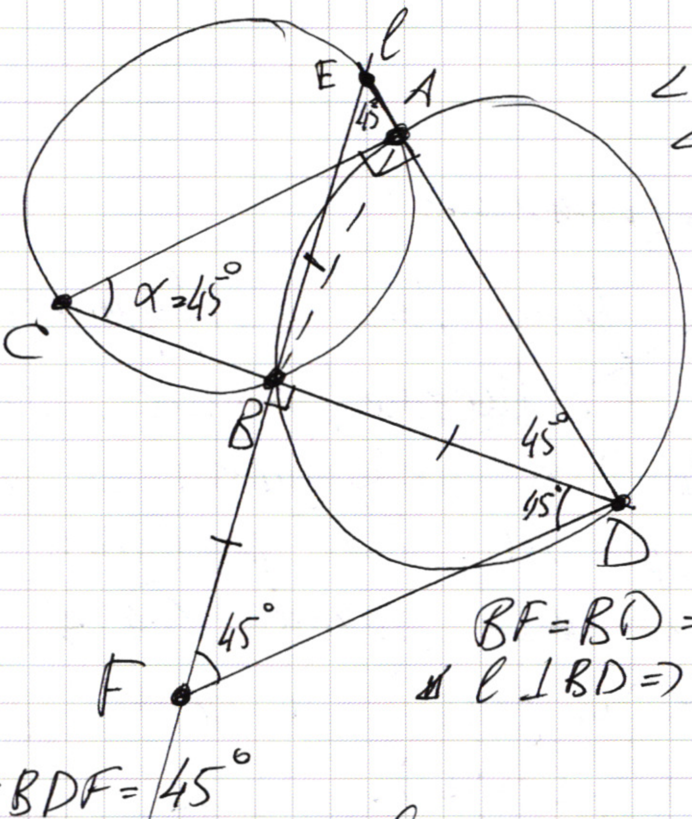
$\angle CAD = 90^\circ$

$l \perp CD$ $B \in l$

$F \in l$ / $BF = BD$

$A, F \div CD$

$CF - ?$



$\angle ACD = \alpha$

$\angle CAD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - \alpha$.

(равнобедренный)

$BF = BD \Rightarrow \triangle BDF$ - р/б

$l \perp BD \Rightarrow$ ~~BF~~ $\angle FBD = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

Запишем теорему синусов для $\triangle ACB$ и $\triangle ABD$:

$$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow AB = 2R\sin\alpha.$$

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ-\alpha)} = 2R \Rightarrow AB = 2R\sin(90^\circ-\alpha) = 2R\cos\alpha$$

$AB = 2R\sin\alpha = 2R\sin(90^\circ-\alpha) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \sin(90^\circ-\alpha) = \cos\alpha$.

$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACD$ - р/б

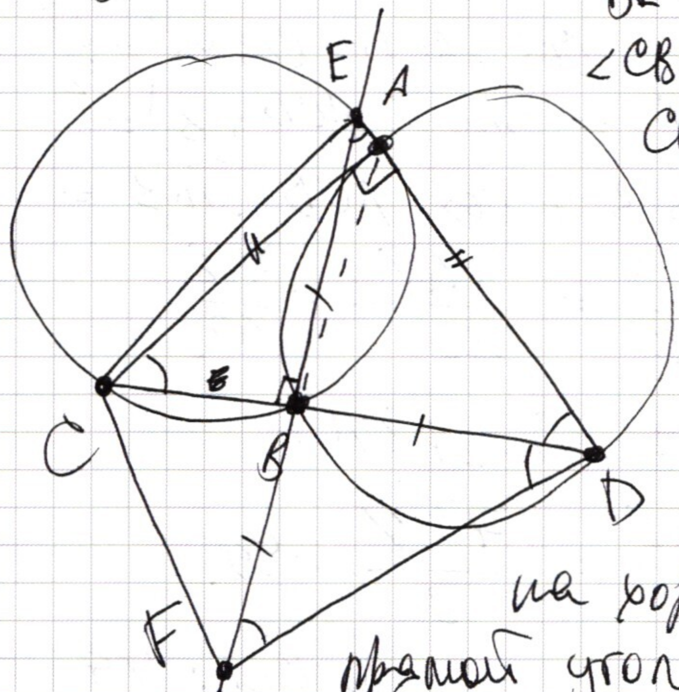
$\angle CDA = 45^\circ$ и $\angle FDB = 45^\circ \Rightarrow \angle FDE = 90^\circ \Rightarrow \angle FED = 45^\circ$ ($E = l \cap AD$). Так как $\angle BCA$ и $\angle FED$ равны и опираются на AB то точка $E \in w_1$.

$\angle EDF$ - р/б прямоуг. $\triangle$ и BD - высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD$ - медиана

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6 (Продолж.).



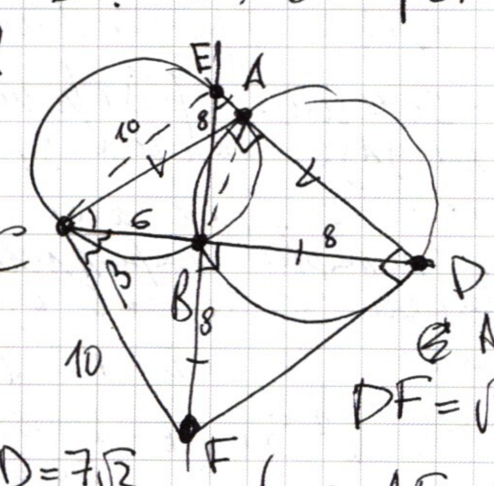
$BE = BF$
$\angle CBF = \angle CBE = 90^\circ$
CB – общая сторона
$\Rightarrow \triangle CBE = \triangle CBF$ по 2м сторонам и углу между ними $\Rightarrow$
$\Rightarrow CE = CF$

на хорду CE опирается прямой угол $\angle CBE$ $\Rightarrow$ CE – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow CE = 2R = 2\cdot 5 = 10 \Rightarrow CF = CE = 10.$

Ответ: 10.

б) $CB = 6$. $\Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 =$
S_{ACF} – ?
$= BD = EB$.



$CD = CB + BD = 6 + 8 = 14$.

$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{2}\,AC$ (т.к. $\triangle ACD$ – р/б и $\angle CAD = 90^\circ$)

$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}} = \frac{2\cdot 7}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot 7$.

$DF = \sqrt{2}\cdot 8$ (т.к. $\triangle FBD$ – р/б и $\angle FBD = 90^\circ$)

$AC = AD = 7\sqrt{2}$
$DF = \sqrt{2}\cdot 8$
$\triangle AFD$ – прямоуг.
AF – гипотенуза

$\Rightarrow AF = \sqrt{AD^2 + FD^2} = \sqrt{49\cdot 2 + 2\cdot 64} =$
$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{\underbrace{49+64}_{113}} = \sqrt{226}$

$AF = \sqrt{226}$ $\angle FCB = \beta$

$AC = 7\sqrt{2}$ $\sin\beta = \frac{8}{10}$ $\cos\beta = \frac{6}{10}.$

$CF = 10.$

$\sin\angle ACD = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\angle ACD = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

~~$\sin\angle FA$~~ $\sin\angle FCA = \sin(\angle ACD + \beta) =$

$= \sin\angle ACD \cdot \cos\beta + \cos\angle ACD \cdot \sin\beta =$

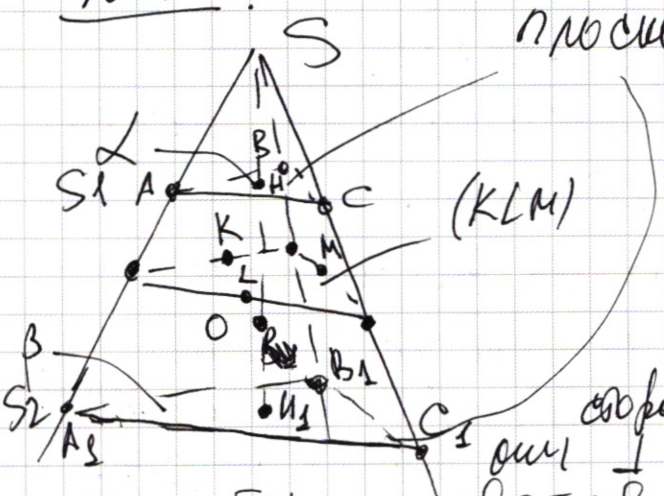
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{6}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{8}{10} = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$

$S_{ACF} = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot CF\cdot\sin\angle FCA =$

$= \frac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot\cancel{10}\cdot\frac{7\sqrt{2}}{\cancel{10}} = \frac{7^2\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}} = 49.$

Ответ: 49

№4



плоскости, касающиеся сферы и $\perp SO$.

Тогда треугольники — сечения трёхгранного — площадь которых S_1 и S_2 — подобны, так как их стороны попарно параллельны т.к. они $\perp$ прямой SO и в одних плоскостях соответственно. (то есть $AC \parallel A_1C_1$; $AB \parallel A_1B_1$; $BC \parallel B_1C_1$) $\Rightarrow S_2 = k^2 S_1$ (k - коэффициент подобия)

SH, SH_1 - высоты к ABC и $A_1B_1C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow SH_1 = k\cdot SH$ $S_2 = 4$ $S_1 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{4}{1} = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{k = 2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

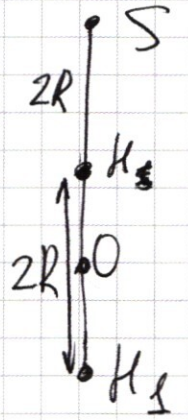
№4 (Продолжение)

$SH_1 = 2SH \Rightarrow SH = HH_1$

HH_1 - диаметр сферы $\Rightarrow$

$\Rightarrow HH_1 = 2R \Rightarrow \underline{SH = 2R}$

$\underline{SO = 3R}$.

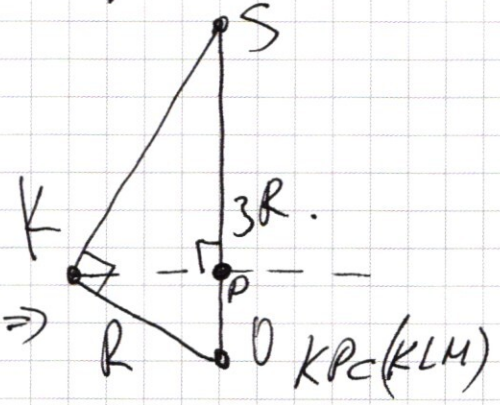


R - радиус сферы.

K - точка касания (SAB) сферы $\Rightarrow$

$\Rightarrow OK \perp SK \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle KSO = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}$.



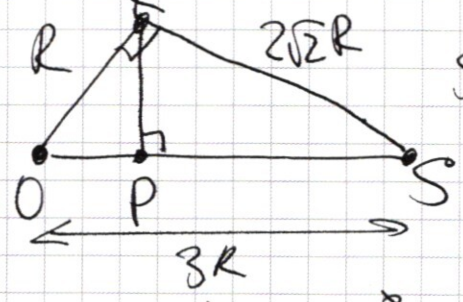
$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

$(KLM) \perp SO \Rightarrow (KLM) \parallel \alpha \parallel \beta \Rightarrow$

$KP \subset (KLM)$

$\Rightarrow S_{KLM}$ - площадь сеч.

$\Rightarrow S_{KLM}$ подобно S_1. $\frac{S_{KLM}}{S_1} = \frac{SP}{SH}$



$SK = \sqrt{(3R)^2 - R^2} = \sqrt{8R^2} = 2\sqrt{2}R$

~~$\sin\angle OSK = \frac{R}{3R} =$~~

$\cos\angle OSK = \frac{2\sqrt{2}R}{3R} = \frac{SP}{2\sqrt{2}R}$

$SP \cdot 3R = 8R^2 \quad SP = \frac{8}{3}R$

$\frac{S_{KLM}}{S_1} = \frac{SP}{SH} \Rightarrow S_{KLM} = \frac{SP}{SH} \cdot S_1 = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} \cdot 1 = \frac{4}{3}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$
$S_{KLM} = \frac{4}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha.$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\beta\cos\alpha.$

$\cos\gamma - \cos\varphi = -2\sin\frac{\gamma+\varphi}{2}\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}$

$\sin\gamma - \sin\varphi = 2\sin\frac{\gamma-\varphi}{2}\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}.$

$\cos 11x - \cos 3x = -2\sin 7x\sin 4x$

$\sin 11x - \sin 3x = 2\sin 4x\cos 7x$

$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) =$

$= -2\sin 7x\sin 4x - 2\sin 4x\cos 7x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cdot \cos 14x =$

$= \sqrt{2}\cdot(2\cos^2 7x - 1) = \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 7x).$

$\sin 7x + \cos 7x = \sqrt{2}\sin(7x + \frac{\pi}{4})$

$\sin\varphi - \cos\varphi = \sqrt{2}\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi) = \sqrt{2}\sin(\varphi - \frac{\pi}{4}).$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x =$

$= \sqrt{2}\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x.$

$2\sin(-4x)\cdot\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x.$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

$f(y) = y^3 - 2y^2 - 7y + 12$

$\cancel{f'(y) = 3y^2 - 4y - 7.}$ $\cancel{D = 16}$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\frac{y^{5\lg x - 2\lg x}}{x^{\lg x}} = \frac{y^{3\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg y}.$$

$$y^{3\lg x} = y^{2\lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$x^{\lg x} = y^{3\lg x - 2\lg y} = y^{\lg x^3 - \lg y^2} = y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)}$$

$$\lg(x^{\lg x}) = \lg\left(y^{\lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right)}\right)$$

$$\lg x \cdot \lg x = \lg\left(\frac{x^3}{y^2}\right) \cdot \lg y.$$

$$\lg^2 x = (\lg x^3 - \lg y^2)\lg y =$$

$$= \lg x^3 \lg y - 2\lg^2 y$$

$$3\lg x \cdot \lg y - 2\lg^2 y - \lg^2 x = 0. \quad | : \lg^2(x)$$

$$3 \cdot \frac{\lg y}{\lg x} - 2\left(\frac{\lg y}{\lg x}\right)^2 - 1 = 0. \qquad t = \frac{\lg y}{\lg x} = \log_x y$$

$$-2t^2 + 3t - 1 = 0.$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$2t^2 - 2t - t + 1 = 2t(t-1) - (t-1) =$$

$$= (2t-1)(t-1) = 0.$$

$t = \frac{1}{2};\ 1$ $\qquad \log_x y = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = y.$

$\qquad \log_x y = 1 \Rightarrow x^1 = y.$

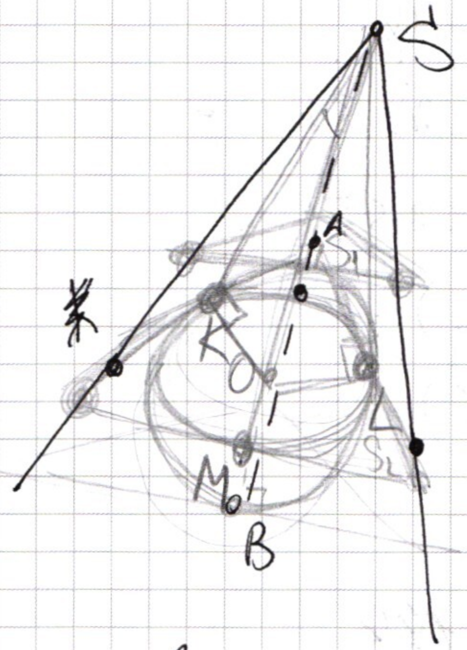
$\sqrt{x} = y$

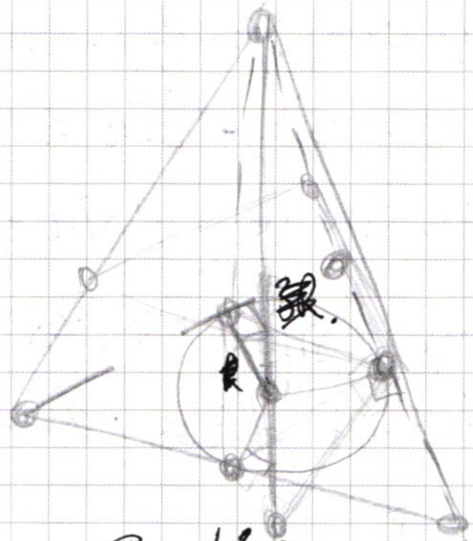
$x = y.$

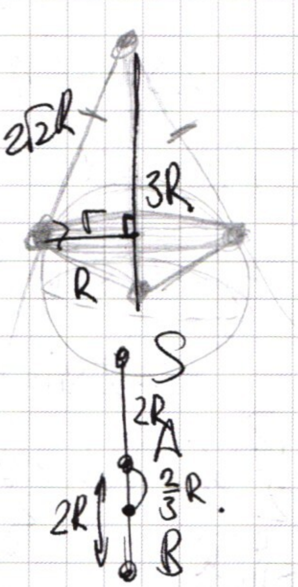
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$S_2 = k^2 S_1 \Rightarrow k = 2.$

$kSA = SB \Rightarrow 2SA = SB.$

$SB - SA = AB = 2R \Rightarrow \cancel{S} = SA.$

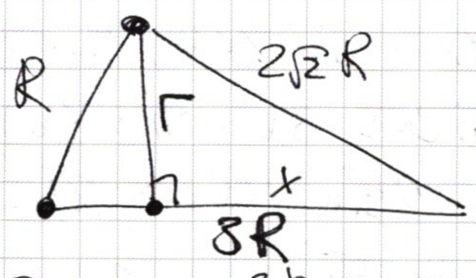
$3y^2 - 4y - 7.$

$D = 16 + 4 \cdot 3 \cdot 7 =$ $\times\frac{12}{7}$ $\overline{84}$

$= 100 = 10^2$ $\quad 9R^2 - R^2 = 8R^2 = (2\sqrt{2}R)^2.$ $\quad \sin = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$

$y = \frac{4 \pm 10}{2 \cdot 3} =$ $\quad \frac{2\sqrt{2}R}{8R} = \frac{x}{2\sqrt{2}R}$

$= \left[\begin{array}{l} \frac{14}{6} \\ -1. \end{array}\right.$ $\quad 8Rx = 8R^2$



3 1 −6 −25 $\quad x = \frac{8}{3}R$

4 1 −2 −7 +12. 16.

$\frac{S_{KLM}}{S_1} = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} = \frac{4}{3}.$

~~6 1 4~~

~~6 1 −8~~

$S_{KLM} = \frac{4}{3}S_1 = \frac{4}{3} \cdot 1.$

−1 1 −3

2 1 0

1 1 −1

x −4 6 16 x

−7 −21 $\frac{14}{6}\frac{7}{3}$

−8 4. 1

−4 1 −2 −7 12

~~−4 1 −6 17.~~

−3 1 −5 8 −12.

−2 1 −4 1 10.

−2,5 1 5

$$-2\sin 4x\cdot\sqrt{2}\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 14x.$$

$$(\cos 11x-\sin 11x)+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right)=$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\left(11x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 14x$$

$$2\sin(-4x)\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 14x.$$

$$(\cos 11x-\cos 3x)-(\sin 11x-\sin 3x)=$$

$$=-2\sin 7x\sin 4x-2\sin 4x\cos 7x=$$

$$=-2\sin 4x(\sin 7x+\cos 7x)=$$

$$\sqrt{2}\cdot\underset{\sin\frac{\pi}{4}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\sin 7x+\underset{\cos\frac{\pi}{4}}{\underset{\shortparallel}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}\cos 7x=\sqrt{2}\cos\left(7x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$-2\sin(4x)\cdot\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 14x$$

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(11x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos 14x.$$

$$-2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)\sin(-4x)=\cos 14x.$$

$$(\cos 11x-\sin 11x)^2-2(\cos 11x-\sin 11x)\cancel{(\cos 3x-\sin 3x)}+$$

$$+(\cos 3x-\sin 3x)^2=2\cdot\cos^2 14x.$$

$$1-2\sin 11x\cos 11x-2\cos 11x\cos 3x+2\sin 11x\cos 3x+$$

$$+2\cos 11x\sin 3x-2\sin 11x\sin 3x+1-2\cos 3x\sin 3x=$$

$$=(\cos 11x-\cos 3x)^2+2(\cos 11x-\cos 3x)\cdot$$

$$\cdot(\sin 3x-\sin 11x)+(\sin 3x-\sin 11x)^2=2\cos^2 14x$$

$$2-2\cos 11x\cos 3x-2\sin 3x\sin 11x+$$

$$+2\cos 11x\sin 3x-2\cos 11x\sin 11x-2\cos 3x\sin 3x+$$

$$+2\cos 3x\sin 11x=2-2\cos 8x+2\sin 14x-$$

$$-\sin 22x-\sin 6x=2\cos^2 14x.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = -4x^2 + 8x = 0.$

$\sqrt{x} = y. \quad x = y^2 \quad x^2 = y^4$

$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0.$

$y(y^3 - 2y^2 - 4y - 3y + 12) = 0$

$y \cdot (y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0.$

$1 \quad -2 \quad -7 \quad +12$

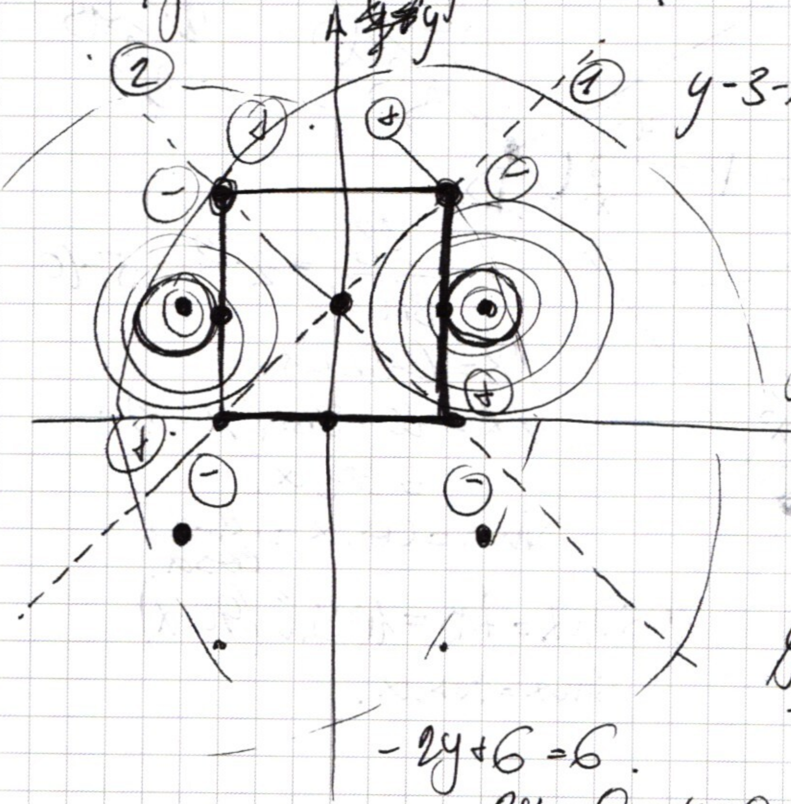
~~1 1 −1 −8~~

~~−2 1 −4 1~~

$64 + 49 = 113$

$\boxed{2 \text{ решения}}$

$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6.$ ① ②



$y - 3 - x \geq 0.$

$y - 3 - x = 0$

$y \geq x + 3$

$y - 3 + x \geq 0$

$y \geq 3 - x.$

$y - 3 - x + y - 3 + x =$

$= 2y - 6 = 6.$

$2y = 12$

$y = 6.$

$\cancel{y} - \cancel{3} - x - \cancel{y} + \cancel{3} - x =$

$= -2x = 6.$

$x = -3.$

$2x = 6 \quad x = 3.$

$-2y + 6 = 6.$

$-2y = 0 \quad y = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2+(y-3)^2=a.$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=a.$

$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=a$

$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow (x+4)^2+(y+3)^2=a.$

$3375 : 5 = 675$

$675 : 5 = 135$

$135 : 5 = 27$

~~$(x_0; y_0)$ - реш.~~ $\Rightarrow$ $(-x_0; y_0)$ - реш.

~~$(-x_0; -y_0)$ - реш.~~

~~$(x_0; -y_0)$ - реш.~~

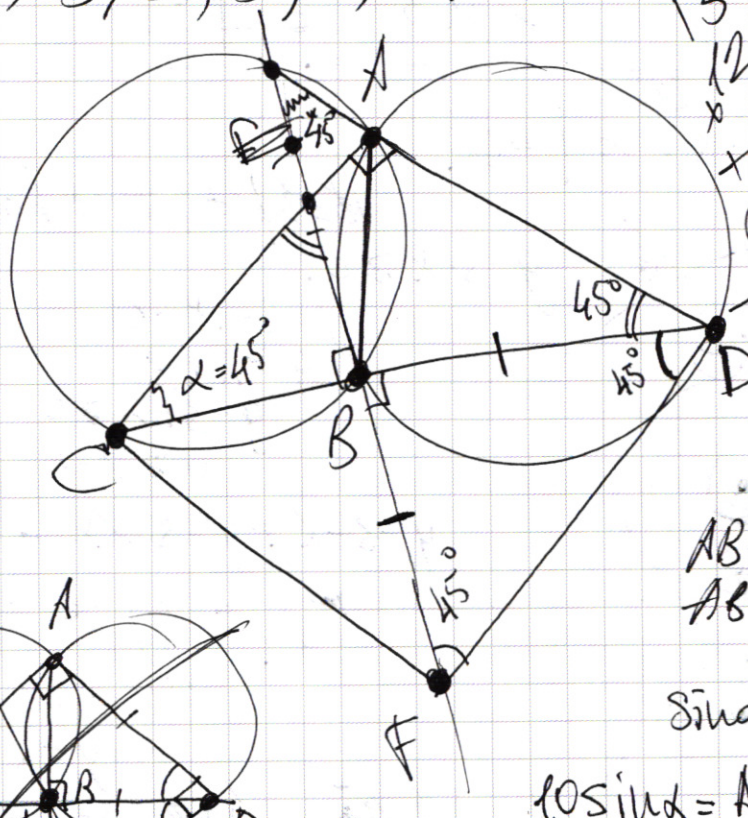
$3375 = 3^3 \cdot 5^3$

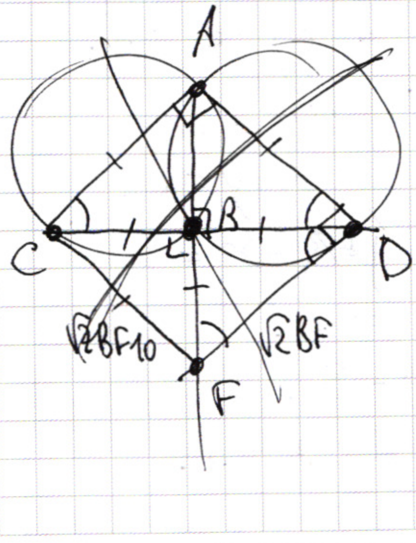
1, 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5,

1, 1, 3, 9, 5, 5, 5.

$13 \cdot 125 \cdot 27 = 875 + 250 = 3375$

$27 \cdot 125 = 135 + 54 + 27 = 3375$





$\frac{AB}{\sin\alpha} = 2 \cdot R = 2 \cdot 5 = 10$

$AB = 10\sin\alpha.$

$AB = 10 \cdot \sin(90-\alpha) =$

$= \cos\alpha.$

$\sin\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 45°$

$10\sin\alpha = AB = 10\sin(90-\alpha)$

$\sin\alpha = \cos\alpha.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)