

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 3^3$$

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

$$(x-y-2)^2 = x^2 - 2xy - 4x + y^2 + 4y + 4$$



5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$$\begin{aligned} -4y^2 + 8y - 4 \\ -(2y-2)^2 \end{aligned}$$

$$(x-y-2-2y+2)(x-y-2+2y-2)=0$$

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{8}}{3} \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\sqrt{8} = \frac{8}{\sqrt{8}}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\cos 4x$$

$$\cos 3x \cos 4x - \sin 3x \sin 4x - \cos 4x \cos 5x + \sin 4x \sin 5x -$$

$$- \sin 4x \cos 5x - \sin 4x \cos 5x + \sin 4x \cos 5x$$

$$\cos 11x = \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x$$

$$\cos 3x = \cos 7x \cos 4x + \sin 7x \sin 4x$$

$$\sin 11x = \sin 7x \cos 4x + \sin 4x \cos 7x$$

$$\sin 3x = \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \cos 7x - \sin 7x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) = -\sin 4x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) = \sin -4x$$

$$\frac{\pi}{4} - 7x = -4x + 2\pi n$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

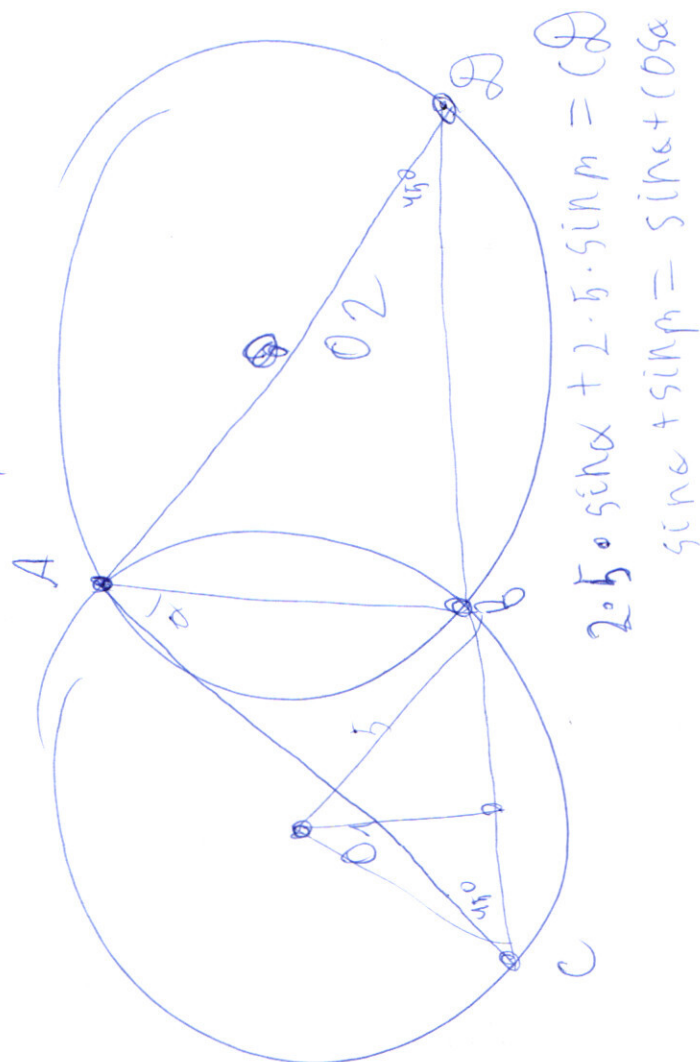
$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} + \lg x^2$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} \cdot y^{\lg x^2} = \lg x \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} \cdot x^{\lg y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x - \lg y^2}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg \frac{x^3}{y^2}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 = 5^3 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 9 \cdot 3^2$$

т.к. нам нужны 8-знач. числа, а

3375 расклад не имеет как $5^3 \cdot 3^3$ - 6 цифр,

то надо добавить единицы, т.е.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3 \cdot 1^2 = 5^3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1^3$$

т.е. нам надо состав. 8-знач. числа из трех 5, трех 3 и двух 1 или из трех 5, 2 и трех 1

$$I? \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 = 560 \quad (3, 5, 3, 3, 2, 1)$$

одн. из 5, дв. из 3, тр. из 1

$$II? \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

дв. из 5, тр. из 3, тр. из 1

$$\text{всего: } 560 + 1120 = 1680$$

ответ: 1680.

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\begin{aligned} & \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - (\cos 4x \cos 4x - \sin 4x \sin 4x) - \sin 7x \cos 4x - \\ & - \sin 4x \cos 7x + \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x \\ & - 2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 4x - \sin^2 7x) \\ & - 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 4x - \sin 4x) (\cos 4x + \sin 4x) \end{aligned}$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = (\cos 4x - \sin 4x)$$

$$-\sin 4x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 4x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x)$$

$$-\sin 4x = \sin(\frac{\pi}{4} - 4x)$$

$$\sin -4x = \sin(\frac{\pi}{4} - 4x)$$

$$\begin{cases} -4x = \frac{\pi}{4} - 4x + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\ -4x = \pi - (\frac{\pi}{4} - 4x) + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ -4x = \frac{3\pi}{4} + 4x + 2\pi k \end{cases}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$-4x = \frac{3\pi}{4} + 4x + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4} - 2\pi k$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$
 $x = \frac{1}{11}(-\frac{3\pi}{4} - 2\pi k)$ где $n, k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{3}$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (x > 0 (\lg x) \Rightarrow y > 0 (\lg y, x > 0))$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \end{cases}$$

$$(x - 3y)(x + y - 4) = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} = y$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ y^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } x, y > 0$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot y^{\frac{1}{2}}$$

$$① \quad y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$1 = y^{\lg y^2} \cdot \lg \frac{1}{x^3} \cdot x^{\lg x}$$

$$1 = y^{\lg \frac{y^2}{x^3}} \cdot x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x^3}{y^2}} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x}{y^2}} \cdot y^{\lg x^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x}{y^2}} \cdot x^{\lg y^2} = x^{\lg x}$$

$$y^{\lg \frac{x}{y^2}} = x^{\lg \frac{x}{y^2}}$$

$$\lg \frac{x}{y^2} = 0$$

$$x = y$$

$$x = y^2$$

$$x = y$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

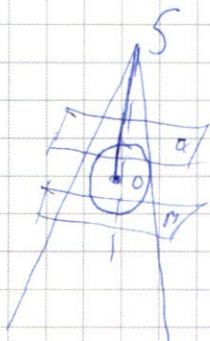
$$\begin{cases} x = y^2 \end{cases}$$

$$, \text{ м.к. } y > 0 \quad \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ м.к. } 1 < \sqrt{17} < 5, \text{ м.к. } y > 0 \\ x = 4 - y = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) $\alpha \parallel \beta$ ($SO \perp \alpha, SO \perp \beta$) $\Rightarrow$ сечения
треугольного угла α и β подобны
(плоскость сфера ABC , сфера $A'B'C'$) $SO \perp \alpha = H$,
 $SO \perp \beta = H'$, тогда $OH \perp \alpha$ (т.к. α кас сфера) и $OH' \perp \beta$ (т.к. β кас сф.)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = k^2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{SM}{SM'} = k \Rightarrow SM = \frac{1}{2} SM'$$

(к-коэф. подобия)

$$SM' = 2R + SM$$

$\Rightarrow SM = 2R$, где R — радиус сфера

рассмотрим $\triangle KSO$



($OK \perp KS$, т.к. K — т. кас сф и грани $\Rightarrow OK \perp$ грани
 $OK \perp KS$), тогда $\left(\frac{SO}{OK} = \sin \angle KSO = \frac{(SM+OK)}{KO} = \frac{(2R+R)}{R} = \frac{1}{3} \right)$
опустим из K кас на SO : $KQ \perp SO$

$$KS^2 + KO^2 = SO^2 \quad (\text{м. Пифагора } \triangle KSO, \angle K = 90^\circ)$$

$$KS = \sqrt{SO^2 - KO^2} = \sqrt{8}R$$

$$S_{KSO} = \frac{1}{2} KS \cdot KO = KQ \cdot SO \cdot \frac{1}{2} \quad (\text{площадь пр. т.р., площадь т.р.})$$

$$\sqrt{8}R^2 = 3R \cdot SO \cdot KQ \Rightarrow KQ = \frac{\sqrt{8}}{3}R$$

$$SQ^2 + KQ^2 = KS^2 \quad (\text{м. Пифагора } \triangle KSQ, \angle Q = 90^\circ)$$

$$SQ = \sqrt{KS^2 - KQ^2}$$

$$SQ = \sqrt{8R^2 - \frac{8}{9}R^2} = \sqrt{\frac{64}{9}R^2} = \frac{8}{3}R$$

Для м. L и M все будет аналогично =

$$\Rightarrow SO \perp (KLM) \quad (SO \perp KQ, SO \perp LQ) \Rightarrow$$

$(KLM) \parallel \alpha$, пусть сеч. т.р. KL и M это $\triangle A''B''C''$,

$$\text{тогда } \frac{S_{A''B''C''}}{S_{A'B'C'}} = k^2, \quad k = \frac{SQ}{SM} = \frac{\frac{8}{3}R}{4R} \Rightarrow k^2 = \frac{64}{16 \cdot 9} = \frac{4}{9}$$

$$S_{A''B''C''} = S_{A'B'C'} \cdot k^2 = \frac{16}{9}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}; \quad S_{A''B''C''} = \frac{16}{9}$$

✓5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & ① \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & \text{а } a > 0 \text{ имеем 0 реш.} \end{cases}$$

замечая, что если x, y подходит, то $-x, y$ тоже подходит

$$① \quad |y-3-x| + |y-3+x| = 6 - \text{верно}$$

$$|y-3-(-x)| + |y-3+(-x)| = 6$$

$$|y-3+x| + |y-3-x| = 6 - \text{верно}$$

$$② \quad (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a - \text{верно}$$

$$(|-x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a - \text{верно}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~составляющие~~

Рассмотрим $x > 0$, для чего достаточно
показать, что только одно решение y , иначе
 y не будет 4-м решением
если $y - 3 > x$

$$\begin{cases} y - 3 - x + y - 3 + x = 6 \\ (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ (x - 4)^2 + 9 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ (x - 4)^2 = a - 9 \end{cases}$$

если $a \geq 9$

$x = 4 + \sqrt{a - 9}$ не подходит, т.к. $y - 3 > x$ неверно
если $a < 9$ - 0 корней - при $a = 0$ - 0 реш

если $-x \leq y - 3 \leq x$

$$\begin{cases} -y + 3 + x + y - 3 + x = 6 \\ x = 3 \quad (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ (y - 3)^2 = a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ |y - 3| = \sqrt{a - 1} + 3 \end{cases} \text{ - одно реш, если } \sqrt{a - 1} + 3 = 0 \text{ - невозможно } \Rightarrow$$

нам надо, чтоб в этом случ не было реш $\Rightarrow a < 1$ или
или одно реш удовлетв $a < 1$ - 0 реш

$$\begin{cases} \sqrt{a - 1} + 3 - 3 > 3 & \sqrt{a - 1} > 3, a > 10 \\ -\sqrt{a - 1} - 3 - 3 < -3 & a \in \mathbb{R}, a \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{если } a \in [1, 10] \text{ - одно реш, } a > 10 \text{ - 0 реш}$$

$$y-3 < -x$$

$$\begin{cases} x+x-y+3-y-x=6 \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=0 \\ x=4 \\ (x-4)^2 + 9 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-4 = \sqrt{a-9} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=4+\sqrt{a-9} \\ y=0 \end{cases}$$

$0-3 < -4-\sqrt{a-9}$ - верно всегда при $a \geq 9$

т.е. в этом случ $a < 9$ - 0 реш
 $a \geq 9$ - 1 реш

сопоставив с ранее получ.

$$a \in [1; 9) \cup (10; +\infty)$$

но мы не рассмотрели $x=0$

$$x=0:$$

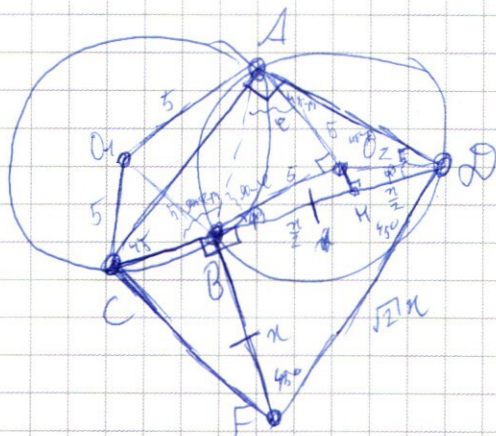
$$\begin{cases} 2|y-3|=6 \\ ((y-3)^2 = a-16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0: \\ y=6 - \text{одно реш} \\ a=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0: \\ y=0 \\ a=25 - \text{одно реш} \end{cases} \Rightarrow a=25 \text{ надо выкинуть, там 4 реш}$$

Ответ: $a \in [1; 9) \cup (10; 25) \cup (25; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1) Пусть $\angle A O_1 B = 2\alpha$, тогда $\angle A B = 2\alpha$ ($\angle A O_1 B$ - уг.)
 $\angle A C B = \frac{1}{2} \angle A B = \alpha$ (впис.)

2) Пусть $\triangle O_1 A B = \triangle O_2 A B$ (по III пр.) ($O_1 A = O_1 B = O_2 A = O_2 B = R = 5$, AB - общ.)

$\Rightarrow \angle A O_2 B = \angle A O_1 B = 2\alpha \Rightarrow \angle A B = 2\alpha$ ($\angle A O_2 B$ - центр.)
 $\angle A D B = \frac{1}{2} \angle A B = \alpha$ (впис.)

3) $\angle A C B + \angle A D B + \angle C A D = 180^\circ$ (цикла угл пр.)
 $2\alpha + 2\alpha = 180^\circ; \alpha = 45^\circ$

4) $\triangle B F D$ - равнобедренный пр. $\Rightarrow BD = BF = k$,
 $\angle B D F = \angle B F D = 45^\circ$

5) $\angle A D F = \angle A D C + \angle C D F = 90^\circ$

6) $\angle C A D + \angle A D F = 180^\circ \Rightarrow A C \parallel D F$ (вн пр. при A, D, F колл.)

7) $\triangle O_2 D H \sim \triangle F C B \Rightarrow$

$\frac{CF}{O_2 D} = \frac{BF}{FD} = 2 \Rightarrow CF = 2 O_2 D = 10$

$$\angle B: \cos BCF = \frac{BC}{CF} (\triangle BCF - \text{прямоугольный})$$

$$\angle BCF = \arccos \frac{BC}{CF}$$

$$AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ = AB^2 \quad (\text{т. Косинусов в } \triangle ABC) - \text{отсюда найдем } AC \quad (AB^2 = a_1^2 + a_2^2 = 50)$$

$$AC^2 + 36 - 12AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$AC^2 - 6\sqrt{2}AC - 14 = 0$$

$$D = k^2 - ac = 18 + 14 = 32$$

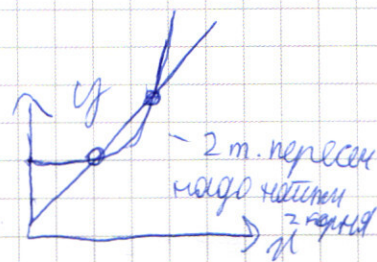
$$AC = \frac{3\sqrt{2} \pm 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} AC = \frac{7}{2}\sqrt{2} \\ AC = \sqrt{2} \end{cases} - \text{но можем считать, т.к. } AC \neq AB$$

$$S_{ACF} = AC \cdot CF \cdot \sin\left(\arccos \frac{BC}{CF} + \frac{\pi}{4}\right) = 3,5\sqrt{2} (CF \cdot \sin(\arccos \frac{BC}{CF} + \frac{\pi}{4})) = 3,5\sqrt{2} \cdot \sin(\arccos 0,6 + \frac{\pi}{4})$$

н/ч

$$\begin{cases} y > 2x + 3 \cdot 2^{65} & - \text{экспонента} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x & - \text{прямая} \end{cases}$$



$$\text{Найдем, когда } 2x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2x + 3 \cdot 2^{65} = 0 \quad \text{если мы найдем}$$

0, то между 0 найм ответ т.к.

$x \rightarrow -\infty$ - нет корней, $x \rightarrow +\infty$ есть корни

$$2^{64} \cdot x - x + 70 - 2x + 3 \cdot 2^{65} = 0$$

$x = 6$ - корень

$$2^{64} \cdot x - x + 70 + 3 \cdot 2^{65} = 2^x$$

Одна т. пересек передерем
Ответ: 4 и 6 корней
если $x > 0$