

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1 Число 3375 можно представить в виде произведения простых множителей: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

Заметим, что каждая цифра десятизначного числа $\in \{1; 3; 5\}$. При этом в числе должно быть 3 "5", 3 "3" и 2 "1" (иначе ~~число~~ не будет равняться 3375) произвед. цифр.

А количество таких чисел будет равняться:

$$K = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 28 \cdot 20 = 560$$

Ответ: 560

Задание 2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$- \sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\cos(7x - \frac{\pi}{4}) (-\sqrt{2} \sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi l \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n \end{cases}$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi l$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{7\pi n}{11}$$

Проверим, что они не совпадают:

$$1) \frac{3\pi + \pi k}{28} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}$$

$$9\pi - 7\pi = 56\pi l - 12\pi k$$

$$2\pi = 56\pi l - 12\pi k : 2$$

т.к. $l, k \in \mathbb{Z}$ нет решения

$$2) \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi l}{12} = \frac{5\pi}{44} + \frac{8\pi n}{44}$$

$$11\pi + 88\pi l = 15\pi + 24\pi n$$

$$2\pi = 22\pi n - 6\pi l : 2$$

$\Rightarrow$ нет реш.

$$3) \frac{3\pi}{28} + \frac{4\pi k}{28} = \frac{5\pi}{44} + \frac{8\pi n}{44}$$

$$33\pi + 44k = 35\pi + 56\pi n$$

$$2 = 44k - 56n$$

$$2/4 = 11k - 28n : 2$$

$\Rightarrow$ нет решений $\Rightarrow$ корни не совпадают

Ответ: $\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$; $\frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11}$, $k, l, n \in \mathbb{Z}$

№3) $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$

$$\frac{(y^{\lg x})^5}{10} = (10 \cdot y^{\lg x})^2$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ y^{3\lg x} = 10^3 \end{cases}$$

$$y^{3\lg x} = 10^3$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ y^{\lg x} = 10 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{\lg x} = 10 \Rightarrow \begin{cases} x=y \\ x \neq 0 \end{cases} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Ответ: (2, 2)

№5) $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 0 \end{cases}$

Нарисуем графики

Для первого уравнения

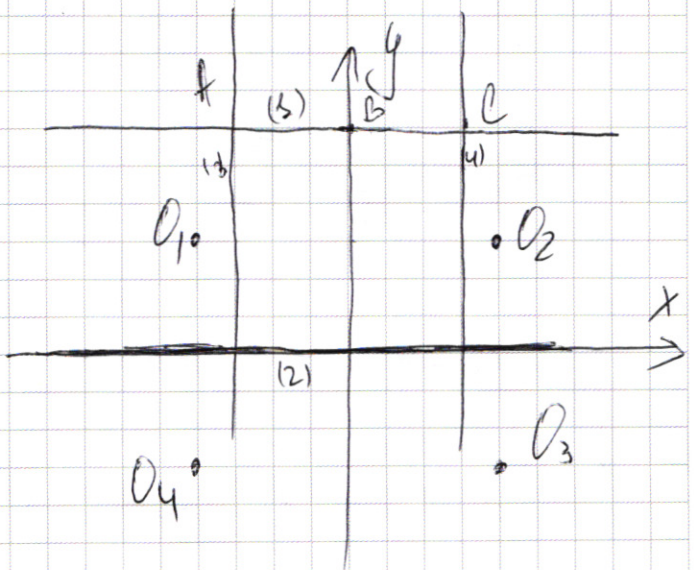
(1) $y = 6$

(2) $y = 0$

(3) $x = -3$

(4) $x = 3$

Для второго: 4 целые или нис. окружности (взаимности от 0) с центрами O_1, O_2, O_3, O_4



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Возьмем, что фигуры симметричны относительно $O_y \Rightarrow$ слева и справа от оси имеет по одному решению
либо симметрии $\Rightarrow$ окружности могут только касаться
и пересекаться ^{в 2 точках} квадрат

3) $a = b \Rightarrow$ Окружности C_1 и C_2 касаются ^{в 2 точках} квадрат

2) Если ~~они~~ пересекать квадрат, то окружности
могут его пересекать только на отрезке AC

$$\Rightarrow a \in (0, A^2; (1, B)^2)$$

$$\text{где } C, A^2 = 3^2 + 3 = 10$$

$$0, B^2 = 9 + 4^2 = 25$$

$$\text{Ответ: } \{3\} \cup (10; 25)$$

77

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\Rightarrow 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64}(x-6) + 70 - x - 2^x > 0$$

$$2^{64}(x-6) - (x-6) + 64 - 2^x > 0$$

$$(2^{64} - 1)(x-6) > 2^x - 2^6 = 2^6(2^{x-6} - 1) \Rightarrow x \in (6; 70)$$

$$x \in (6; 70)$$

$$y = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^{65} \cdot 19 > y > 2^7(1 + 3 \cdot 2^{58})$$

$$70 + 2^7(2^{64} - 1) \leq y \leq 70 + 2^{69/64}$$

НОСТ
 Асимптот
 $\Rightarrow \angle PBN$

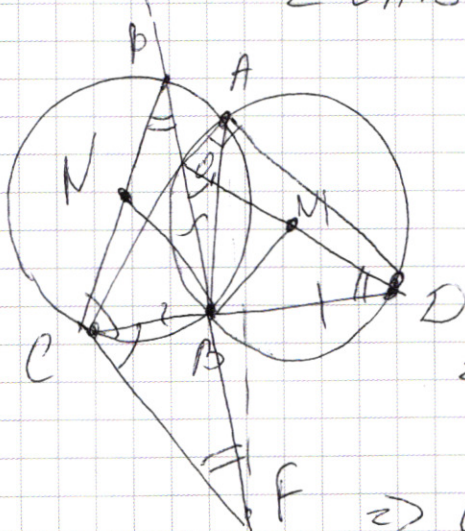
Решение:
т.к. $\angle CBB' = 90^\circ$
 $\Rightarrow$ BB' перпенд. к BC
N

$$\Rightarrow \triangle CBN \sim \triangle BNB' \text{ p/s}$$

$$\Rightarrow \angle BAD = 90^\circ - \angle CAB = \alpha$$

$\angle O_2 DB = \angle O_2 AB$ (на одной дуге)

$$\Rightarrow \angle CAB = \angle O_2AB \Rightarrow O_2 \text{ и } O_1 \text{ совпадают}$$



т. к. они перпендикулярны $\Rightarrow \angle C_1CB = 45^\circ$

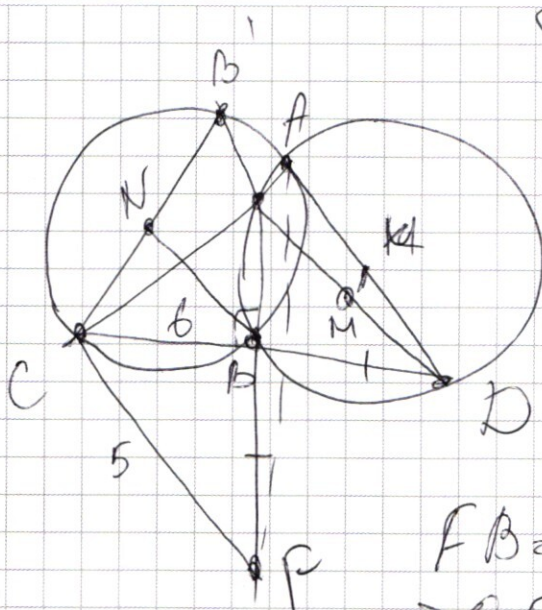
$$B D = B B'$$

$\Rightarrow$ СВ - медиана и высота

$$\Rightarrow CF = CB' = 2R = 10$$

g) Othem: 10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

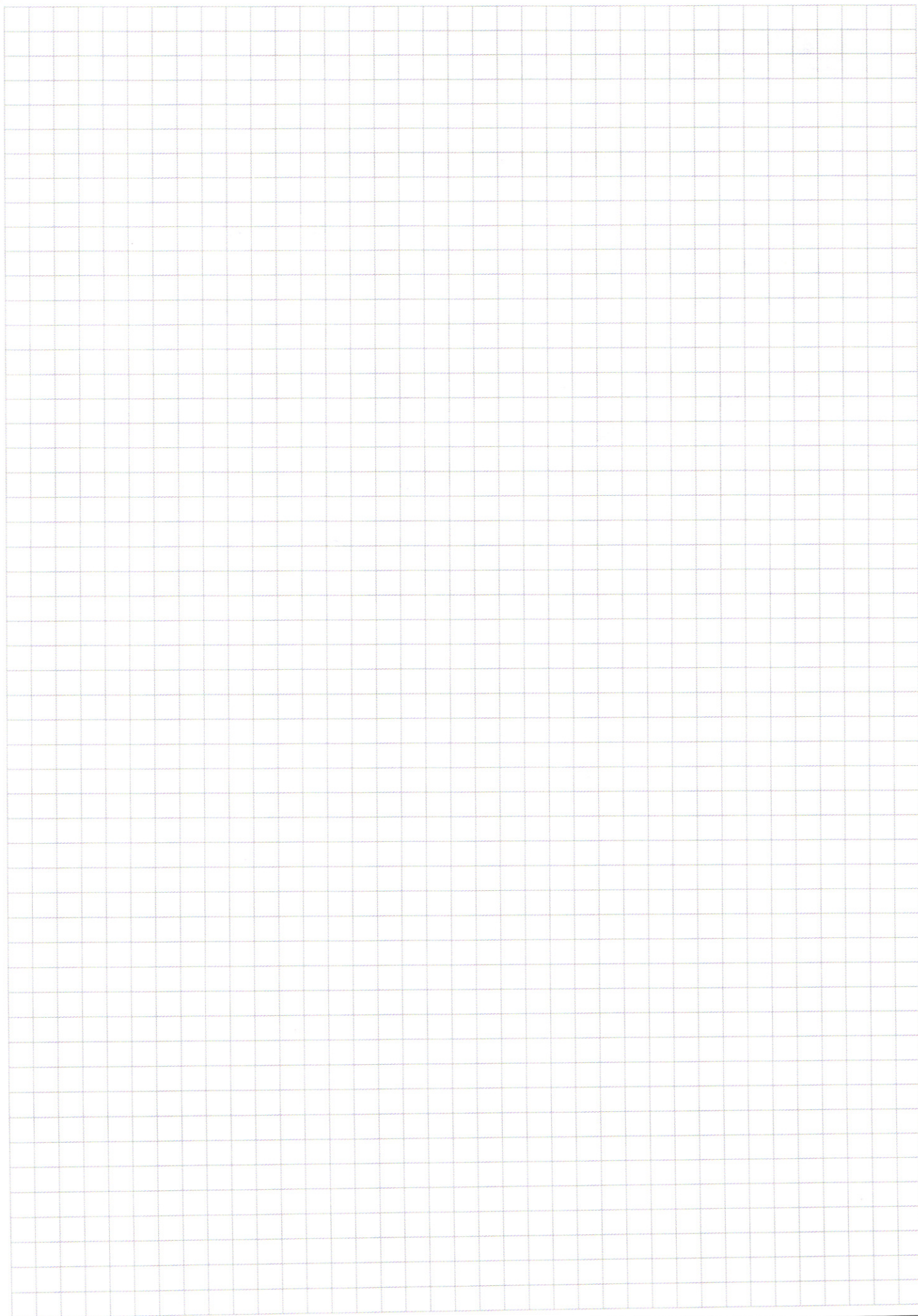


a) $S_{\Delta CBF} = \frac{610}{2} = 305$

$$S_{\triangle ACF} = S_{\triangle CBF} + S_{\triangle CEF} + S_{\triangle CAF}$$

$$S_{\Delta CDB} = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$$

$$FB = \sqrt{100 - 36} = 8$$
$$\Rightarrow C, F = 8 + 6 = 14$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7)
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$K = 70 - 6 - 1 = 63$

$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$

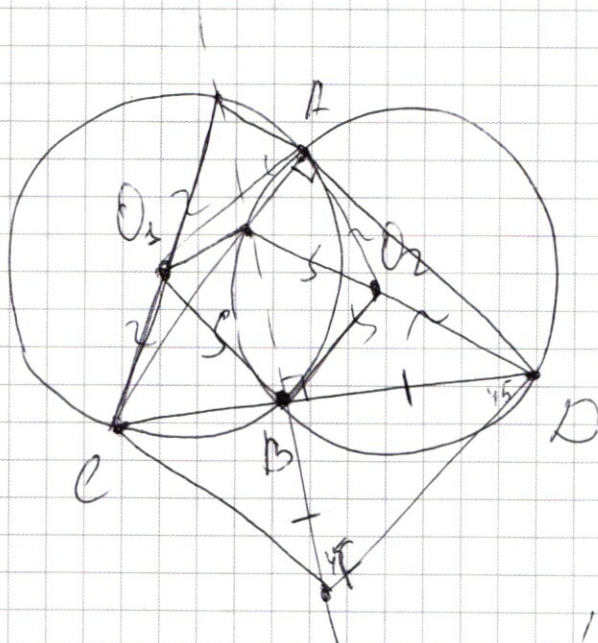
$2^{64}(x - 6) + 70 - x - 2^x > 0$

$2^{64}(x - 6) - (x - 6) + 64 - 2^x > 0$

$(2^{64} - 1)(x - 6) + 64 - 2^x > 0$

$2^x - 2^6 = 2^6(2^{x-6} - 1)$

$70 > x > 6$



2^{70}

$2^{65} \cdot 19 > y > 2^7(1 + 3 \cdot 2^{58})$
 $70 + 2^7(2^{64} - 1) \leq y \leq 70 + 2^{65}(2^{64} - 1)$

5)

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ \hline 27 & \end{array}$$

$27 \cdot 5 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 3 - 5 \\ 3 - 3 \\ 2 - 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 2 \cdot 8^1$
 $3! \cdot 3! \cdot 2$

$$\frac{4.7654}{2.1} = 22.20 \quad (560)$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 20 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

$$\frac{9\pi}{475} - \frac{7\pi}{475} = 564\pi n - 124\pi k$$

$4 = 28n - 12k$ — нет решений

$$\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi n}{12} = \frac{5\pi}{44} + \frac{8\pi l}{44}$$

$$11\pi + 88\pi n = 15\pi + 24\pi l$$

$$4 = 88\pi - 24l$$

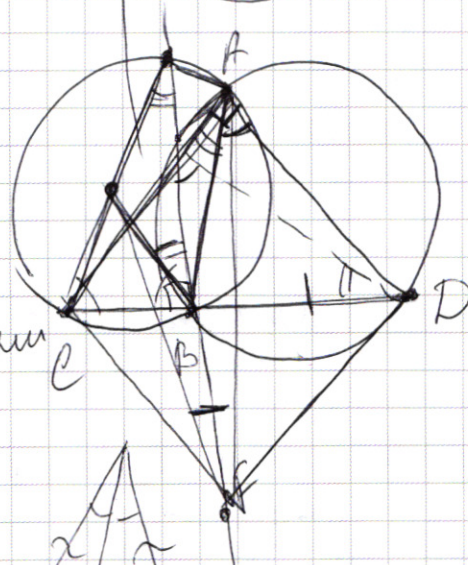
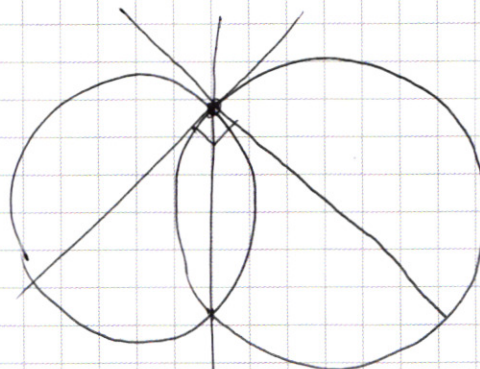
$$3 = 22n - 6l$$
 — нет рещ

$$\frac{3\pi}{28} + \frac{4\pi k}{28} = \frac{5\pi}{44} + \frac{8\pi l}{44}$$

$$33\pi + 44\pi k = 35\pi + 56\pi l$$

$$2\pi = 44\pi k - 56\pi l$$

$$3 = 22n - 28l$$
 — нет решений



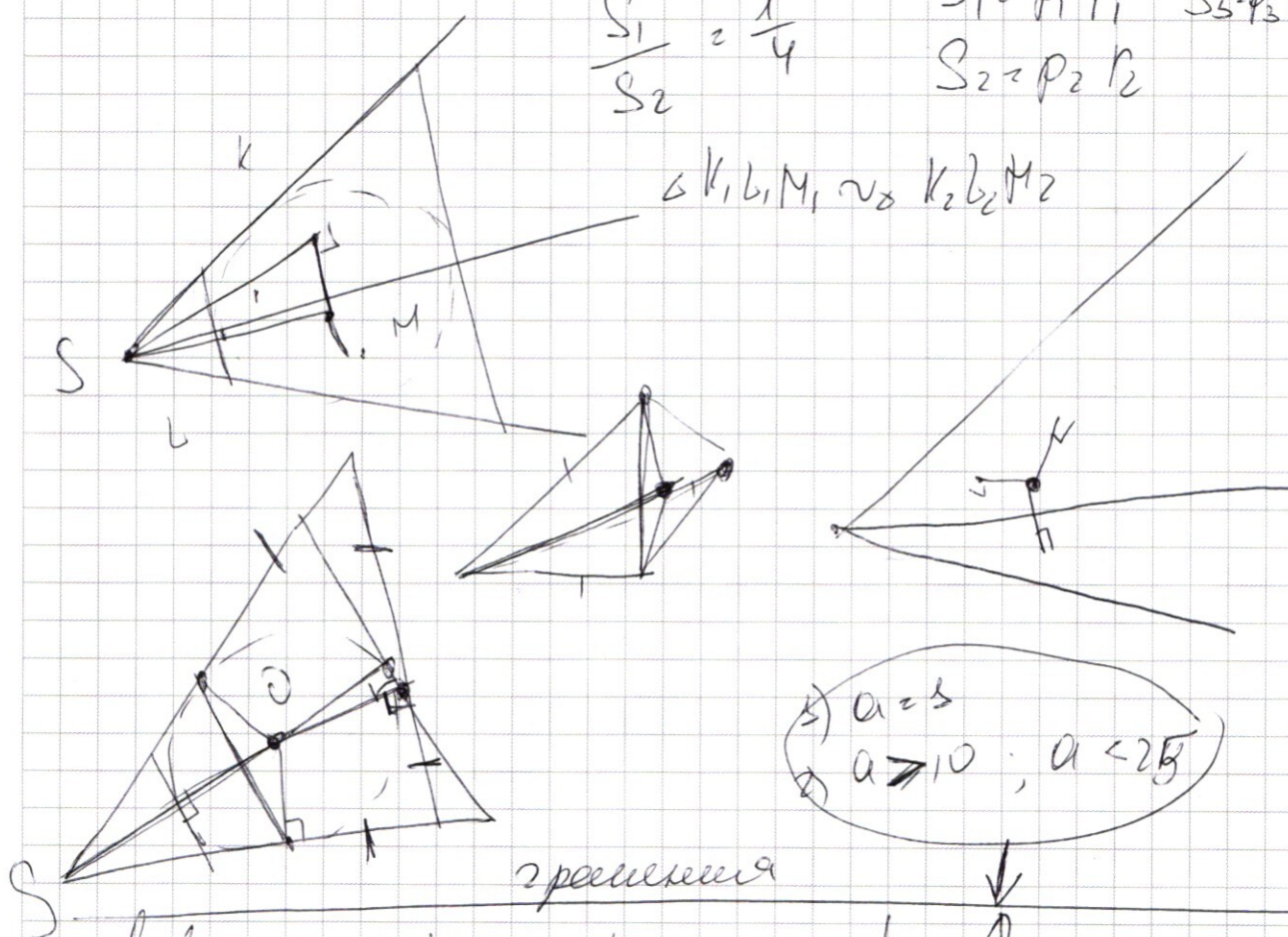
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}$$

$$S_1 = p_1 r_1 \quad S_3 = p_3 r_3$$

$$S_2 = p_2 r_2$$

$$\triangle K_1 L_1 M_1 \sim \triangle K_2 L_2 M_2$$



$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \end{cases}$$

$$1) 2y - 6 = 6$$

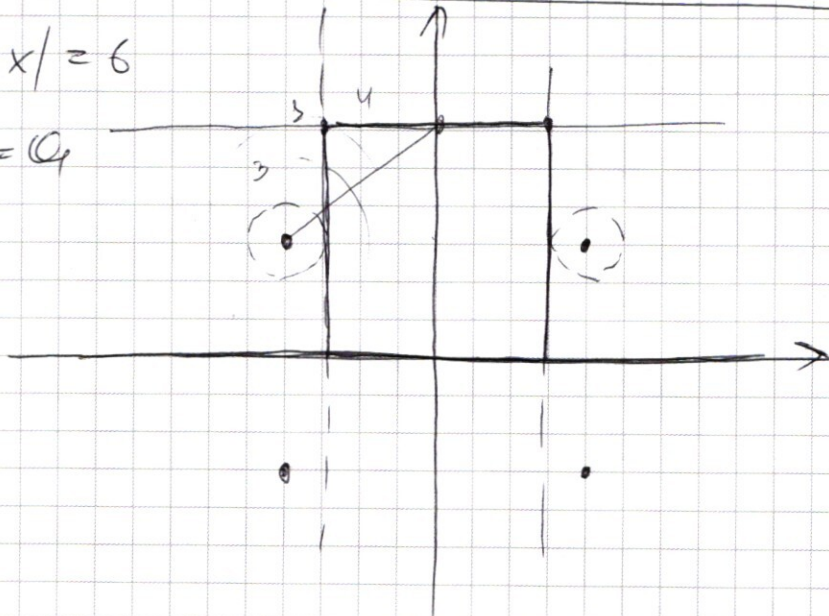
$$y = 6$$

$$2) y = 0$$

$$3) y-3-x-y+3-x = 6$$

$$x = -3$$

$$4) -y+3+x+y-3+x = 6$$



$$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) = -2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \\ & \cos(-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \\ & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 2 \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ & 2 (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0 \\ & 2\sqrt{2} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) (-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + 7x) + \sin 4x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin(\frac{\pi}{4} + 7x) = \pm \sin 4x \end{cases} \quad \begin{cases} 7x - \frac{\pi}{4} = 2\frac{\pi}{4} + \pi k \\ 7x - \frac{\pi}{4} = 4x + 2\pi n \\ 7x - \frac{\pi}{4} = \pi - 4x + 2\pi l \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{4\pi k}{28} = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi n}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{8\pi l}{44} = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi l}{11} \end{cases}, k, n, l \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y} \\ & x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ & (x-4)^2 + (y-2)^2 \\ & \frac{(y^{\lg x})^5}{10} = y(10 \cdot y^{\lg x})^2 \\ & y^{3 \lg x} = 10^3 \\ & y^{\lg x} = 10 \Rightarrow x = y \\ & (2^4)^{\lg 2} = 2^{2 \lg 2^2} \\ & \Rightarrow \text{Ответ: } (2; 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(y^5)^{\lg x}}{10} = y^2 \cdot y^{\lg y^2} \cdot y^{\lg x^2} \\ & \frac{(y^5)^{\lg x}}{10} = y^2 \cdot y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg x^2} \\ & \frac{(y^5)^{\lg x}}{10} = y^{2 \lg x} - y \\ & x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0 \\ & -4x^2 - 4x + 12x = 0 \\ & x^2 - 2x = 0 \\ & x(x-2) = 0 \\ & \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$