

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Разложите 3375 на простые множители.

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

По условию, произведение цифр наших чисел равно 3375. Мы можем превратить $3 \cdot 3$ в 9, сохраняя произведение. При этом какие-либо другие ~~или~~ объединения чисел невозможны, т.к. используются простые числа ($3 \cdot 9 = 27$; $5 \cdot 5 = 25$; $3 \cdot 5 = 15$). Тогда мы можем собирать числа из цифр на. Боров: $(3, 3, 3, 5, 5, 5; 1, 1)$ и $(9, 3, 5, 5, 5; 1, 1)$, ~~и т.д.~~ (то есть мы записывали ^{цифры} числа, произведение которых равно 3375, и оставшаяся часть записывали 1-единичной цифрой, деление на которую не меняет произведение.

1 сл. набор $(3, 3, 3, 5, 5, 5; 1, 1)$.

Способ собрать различные числа из такого набора $\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 56 \cdot 20 = 1120$ ~~то есть в каждом наборе расставим~~

2 сл. набор $(9, 3, 5, 5, 5; 1, 1, 1)$. Способ собрать

числа в этом случае $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \times 3! \cdot 3!} = \frac{9!}{6 \cdot 6}$
 $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$

то есть всего восьмизначных чисел, удовлетворяющих условию, $1120 \cdot 560 = 1680$.

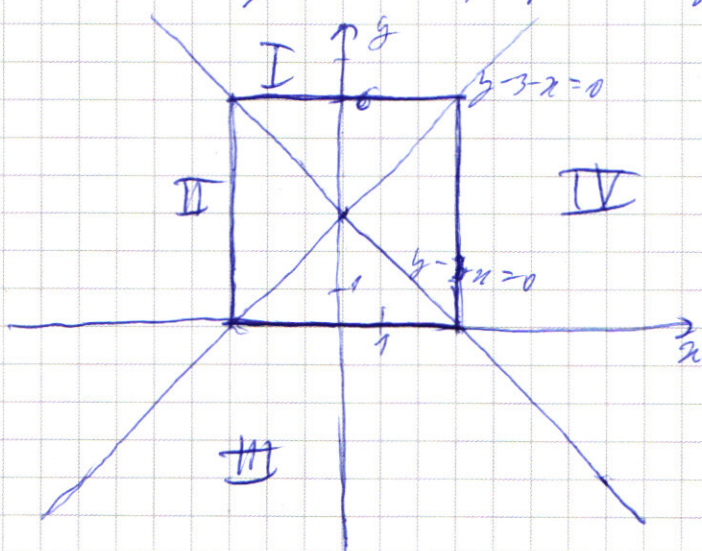
Ответ: 1680.

Задача 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1)

Рассмотрим графики $y-3-x=0$ и $y-3+x=0$



Они разбивают плоскость на 4 части, причём в каждой из них. В модули раскрываются с разными и теми же знаками. Проиллюстрируем как показано на рисунке.

I: $y-3-x + y-3+x = 6$
 $2y = 12 \Rightarrow y = 6$

III: $-y+3+x + y+3-x = 6$
 $y = 0$

II: $x+3-y + y-3+x = 6$
 $x = 3$

IV: $y-3-x - y+3-x = 6$
 $x = -3$

Таким образом, мы получили, что решением (1) будут точки на сторонах квадрата с вершинами в точках $(-3; 0); (-3; 6); (3; 6); (3; 0)$.

Теперь рассмотрим (2). $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$
 Заметим, что $a \geq 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим

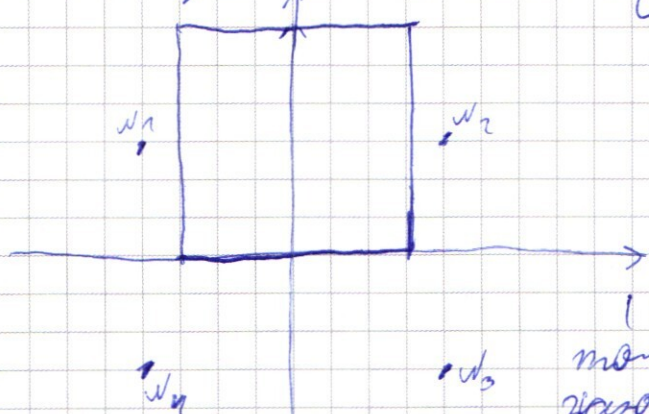
(3) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = \alpha \end{cases} \quad (2.1)$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = \alpha \end{cases} \quad (2.2)$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = \alpha \end{cases} \quad (2.3)$

$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = \alpha \end{cases} \quad (2.4)$

Заметим, что $(2,1), (2,2), (2,3)$ и $(2,4)$ — графики окружностей с радиусами $\sqrt{\alpha}$ и центрами в $(4,3), (-4,3), (4,-3)$ и $(-4,-3)$ соответственно.



Нам нужно, чтобы система имела ровно 2 решения, то есть чтобы окр-ты имели ровно 2 общие точки с квадратом.

(Заметим, что при достаточно больших α окр-ты, пересекаясь, в силу ограниченности совокупности 3.

Обозначим окр-ты w_1 с центрами в $(-4,3), (4,3), (4,-3)$ и $(-4,-3)$ как w_1, w_2, w_3 и w_4 соотв.

При $\alpha < 1$ окр-ты и квадрат не имеют общих точек.

При $\alpha = 1$ окр-ты w_1 и w_2 касаются стороны квадрата, а w_3 и w_4 не имеют с ним общих точек.

При $\alpha \in [1; 25]$ окр-ты w_1 и w_2 будут иметь по 2 точки пересечения с квадратом. В силу симметрии окр-тей w_3 и квадрата относительно оси $y=3$, поскольку есть корень не на $y=3$, то

есть и второй для каждого окр-ти (корень есть, т.к. наиболее удаленная вершинная точка квадрата для центров W_1 и W_2 расположена на расстоянии $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

При $\alpha \in (25; +\infty)$ W_1 и W_2 не будут иметь пересечений с квадратом, а как и W_3 и W_4 (для них наиболее удаленной вершинной точкой квадрата являются т. касат. 5.7).

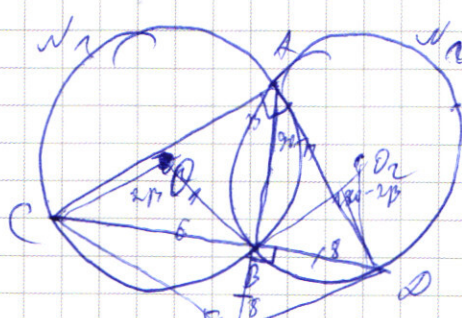
(* под словом "дотрагивый" имеется в виду, что точка удовлетворяет системе, соответствующей окр-ти из сов-ти (31.).

Таким образом, $\alpha = 1$ - единственное значение α , при котором система имеет ровно 2 решения.

Ответ: $\alpha = 1$.

Задача 6.

~~Лемма: Если есть окр-ти W_1 и W_2 с центрами в O_1 и O_2 соответственно, причем радиусы r_1 и r_2 равны, радиусами r и R соответственно, то для любой точки A на отрезке O_1O_2 выполняется $AO_1 = AO_2$.~~



а) Покажем окр-ти W_1 и W_2 и обозначим их центры O_1 и O_2 соответственно. Докажем, что $AC = AD$. Пусть $\angle O_1 A = 2\alpha$, тогда $\angle CBA = \angle CDA$ (отражается на них медиана, что и есть $\angle O_1 A$). Пусть Z - некоторая точка на окр-ти W_2 , лежащая на дуге AB . Тогда $ABDZ$ - впис.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

санный и $\angle AED = 2$, т.к. CB_A - внешний
к $\angle ABD$. Тогда $\angle AOD = 2$, т.к. он опира-
ется на ту же дугу, так как $\angle AED$ в ω_1 .
~~Значит~~ Значит, $\angle CO_1A = \angle AOD$.

Тогда $CO_1 = O_1A = 5 = AO_2 = O_2D$. Значит,
 $\triangle CO_1A \cong \triangle DO_2A \Rightarrow AC = AD$.

$\angle DBF$ - прямой $\Rightarrow CF^2 = CB^2 + BF^2$ (т.к. $\triangle CBF$ - пря-
моугольный). $BF = BD \Rightarrow BF^2 = BD^2 = CF^2 = CB^2 + BD^2$.
Пусть $\angle CAB = \beta$, тогда $\angle DAB = 90 - \beta$ (т.к. $\angle CAD =$
 $= 90^\circ$). Тогда $\angle CO_1B = 2\beta$, $\angle BO_2D = 2\beta$, $\angle BO_1D = 180 - 2\beta$.

А $CO_1 = O_1B = 5 = BO_2 = O_2D$ (это радиусы ω_1 и ω_2).
т.к. т.к. косинусов

$$CB^2 = CO_1^2 + O_1B^2 - 2 \cdot CO_1 \cdot O_1B \cdot \cos 2\beta$$

$$BD^2 = BO_2^2 + O_2D^2 - 2 \cdot BO_2 \cdot O_2D \cdot \cos(180 - 2\beta).$$

$$CB^2 + BD^2 = 100 - 50 \cdot (\cos 2\beta + \cos(180 - 2\beta)).$$

$$CB^2 + BD^2 = 100 = CF^2 \Rightarrow CF = 10.$$

д). $CF = 10$, $BC = 6$; $\triangle BCF$ - прямоугольный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow BD = BF =$
 $= 8.$

Мы уже доказали, что $\triangle CAD$ - равнобедр. (т.к. $AC =$
 $= AD$), $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow CD^2 = CA^2 + AD^2 = 2CA^2 \Rightarrow CA =$
 $= \frac{CD\sqrt{2}}{2} = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$. $\angle ACD = 45^\circ$ ($\triangle ACD$ - равноб. и $\angle CAD =$

$$= 90^\circ.$$

$$\cos \angle BCF = \frac{6}{10}; \quad \sin \angle BCF = \frac{8}{10}.$$

$$\sin \angle ACF = \sin (\angle ACB + \angle BCF) = \sin \varphi \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5\sqrt{2}}.$$

$$\text{Площадь } S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CA \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7\sqrt{2} \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 49.$$

Ответ: а) 10; б) 49.

Задача 3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)} \quad (1)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq 0 \\ x > 0 \\ xy > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

Рассмотрим (1).

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)}$$

$$\lg x \cdot \lg\left(\frac{y^5}{x}\right) = \lg(y) \cdot 2 \lg(xy)$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0.$$

$$0 = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

квадратный
трехчлен
 $\lg x$

$$\begin{cases} \lg x = \frac{3 \lg y + \lg y}{2} \\ \lg x = \frac{3 \lg y - \lg y}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x=y \\ x^4-2x^3-4x-3x^2+12x=0 \end{cases} \quad (1^*)$$

$$\begin{cases} x=y^2 \\ y^4-2y^3-4y-3y^2+12y=0 \end{cases} \quad (2^*)$$

Рассмотрим (1*):

$x \neq 0$, поэтому поделим обе части на x .

$$x-2x-4-3x+12=0$$

$$8=4x \Rightarrow x=y=2.$$

Рассмотрим (2*):

$$y^4-2y^3-4y-3y^2+12y=0 \quad (\text{делим на } y, \text{ т.к. } y \neq 0).$$

$$y^3-2y^2-4y-3y+12=0$$

$$y^3-2y^2-7y+12=0$$

$$(y-3)(y^2+y-4)=0$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=9 \end{cases}$$

$$y^2+y-4=0$$

$$\begin{cases} x=y^2 \end{cases}$$

$$D=1+16=17$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x=9 \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ — не подходит} \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0 \\ x=y^2 \end{cases}$$

Тогда решением системы

$$\text{будут } (2; 2); (9; 3); \left(\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)^2; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right).$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right).$$

Задача 7.

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1).$$

Найти N - количество x и y , удовлетворяющих условиям при некотором x .

$$N = \begin{cases} 0, & \text{при } 70 + (2^{64} - 1) \leq 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ [70 + (2^{64} - 1) - 2^x - 3 \cdot 2^{65}], & \text{при } 70 + (2^{64} - 1) > 2^x + 3 \cdot 2^{65}, \text{ где } [] - \text{целая часть.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 70 + 2^{64}x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = \\ & = (70x) + (x-6) \cdot 2^{64} - x - 2^x, \text{ заметим, что при } 0 \leq x \leq 6, f(x) \leq 0. \end{aligned}$$

$$f(x) = 70 - x - 2^x + (x-6) \cdot 2^{64}$$

$$f'(x) = -1 - 2^x(\ln 2 + 2^{64})$$

$$-1 - 2^x(\ln 2 + 2^{64}) = 0$$

$$2^{64} = 1 + 2^x \ln 2$$

$$\frac{2^{64} - 1}{\ln 2} = 2^x \Rightarrow x = \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \Rightarrow \text{уравнение}$$

важно имеет ровно один корень, при этом при $x < \left(\log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}\right)$ $f'(x) > 0$, а при $x > \left(\log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}\right)$ $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f - на возрастает на $x \in \left(-\infty; \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}\right)$ и убывает на $\left[\log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}; +\infty\right)$.

Значит, $f(x)$ имеет не более 2 корней.

Это $x = 6470$ и $x = 6$.

$$f(6) = 70 - 6 - 2^6 + (6-6) \cdot 2^{64} = 0$$

$$f(70) = 70 - 70 - 2^{70} + (70-6) \cdot 2^{64} = 0.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит, нас интересует следующая
сумма $\sum_{x=7}^{69} [70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}]$.

Поскольку $x \in \mathbb{Z}$, то и разность будет целой,
поэтому нам нужно найти

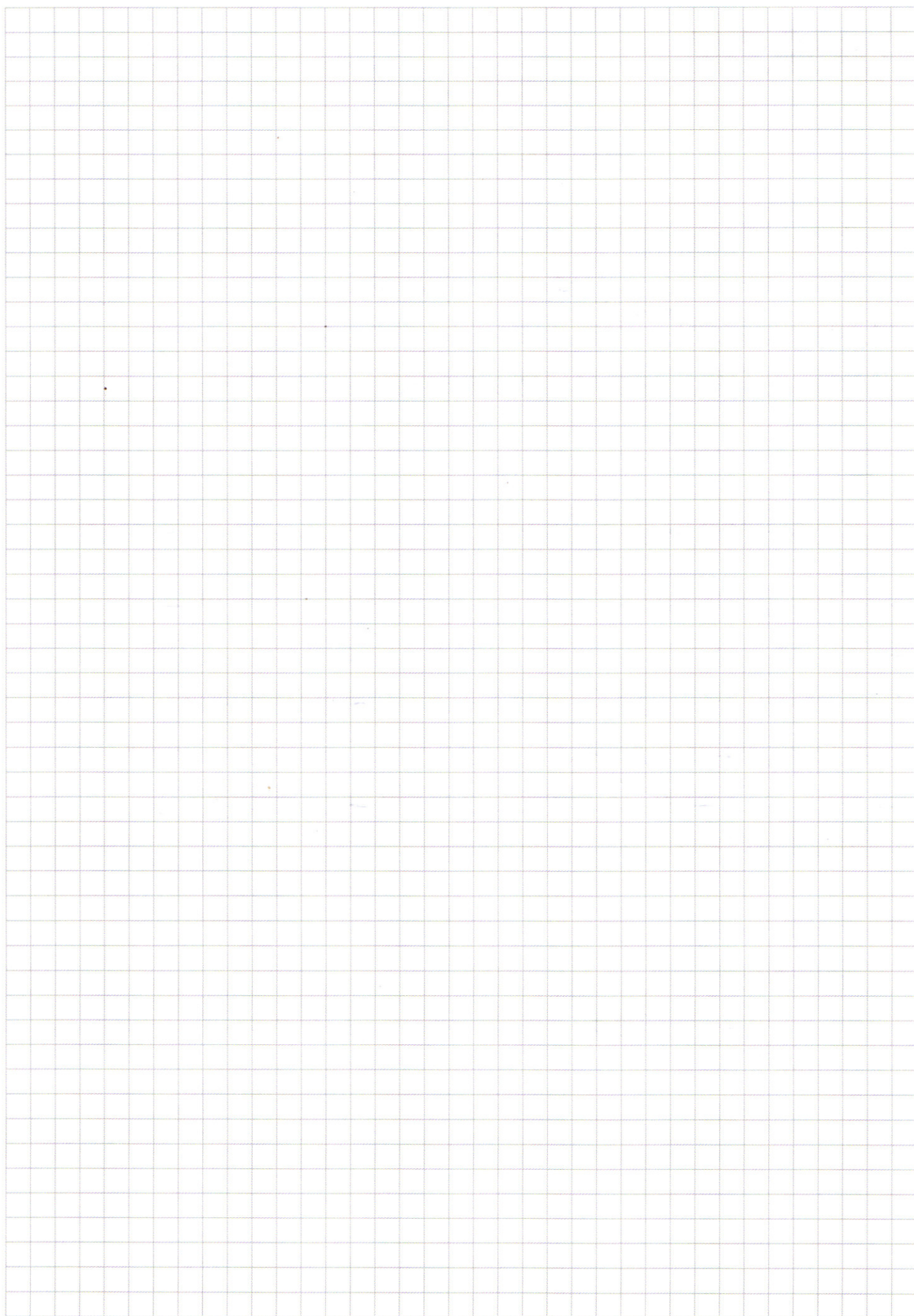
$$\begin{aligned} & \sum_{x=7}^{69} 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = \\ &= 63 \cdot (70 - 6 \cdot 2^{64}) + \frac{63 \cdot (69+7)}{2} \cdot (2^{64} - 1) - 2^7 - 2^8 - \dots - \\ & - 2^{69} = 63 \cdot (70 - 6 \cdot 2^{64}) + 38 \cdot 63 (2^{64} - 1) - \\ & - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{69}) + (2^0 + 2^1 + \dots + 2^6) = \\ &= 4410 - 6 \cdot 2^{64} + 2394 \cdot 2^{64} - 2394 - 2^{70} + 2^7 = \\ &= 2018 + 2388 \cdot 2^{64} - 2^{70} + 2^7 = 2018 + 2388 \cdot 2^{64} - \\ & - 64 \cdot 2^{64} + 128 = 2144 - 2324 \cdot 2^{64}. \end{aligned}$$

Ответ: $2144 - 2324 \cdot 2^{64}$

~~Задача 2.~~

Задача 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin\left(11x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\alpha = \alpha + \beta$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\beta = \alpha - \beta$$

$$\beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 14x$$

$$\begin{array}{r} \sin 3x - \sin 11x \\ \begin{array}{r} 63 \\ + 38 \\ \hline 101 \\ 189 \\ \hline 290 \end{array} \end{array}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha = \alpha + \beta$$

$$\beta = \alpha - \beta$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \\ \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \alpha \cos \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cos \\ 1 - 2 \sin^2 7x \\ 45 \\ \hline \sin(\alpha + \beta) \end{array}$$

$$\frac{28}{2} = 14$$

$$\begin{array}{r} 2388 \\ 64 \\ \hline 2324 \end{array}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - 2xy + 2y^2\right) + \left(\frac{x^2}{2} - 4x + 8\right) - 5y^2 + 12y - \frac{36}{5} \quad h = \sqrt{5}$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos\left(14x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\begin{aligned} \cos 14x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 14x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 14x \\ - \frac{\sin 14x}{\sqrt{2}} - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{(\cos 14x) - (\sqrt{2} - 1)}{2} \end{aligned}$$

$$\cos(\pi - 2) = -\cos 2$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$14^2 = 2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{13^2 + 13^2} = x = \frac{14\sqrt{2}}{2}$$

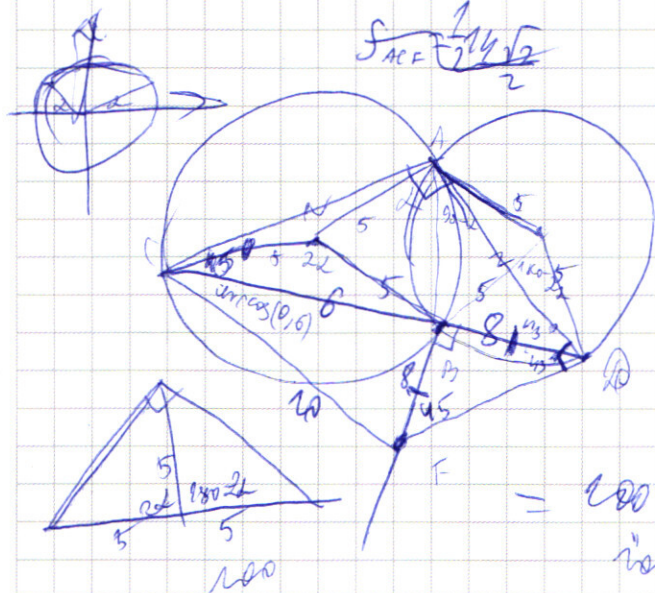
$$CB^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos 2\alpha$$

$$BD^2 = 25 + 25 - 2 \cdot 25 \cdot \cos(16-24)$$

$$CB^2 + BD^2 = 100 - 50(\cos 2\pi + \cos \pi - 2)$$

$$= 100 - 50 \cdot 2 \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{4\pi - \pi}{2}$$

$$S_{ACF} = 0.5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{14\sqrt{2}}{2} \cdot 20 \cdot \sin(45^\circ + \arcsin(0.6))$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\frac{7+69}{2} \cdot 63$$

$$\begin{aligned} & 70 - 70 \\ & - 64 \cdot 2^{64} \\ & + 64 \cdot 2^{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 70 - 18 \cdot 2^{64} \\ & + 63 \cdot 2^{64} \end{aligned}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos(3x + 11x)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 3x \sin 11x)$$

$$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x + \sin 3x \sin 11x = 0$$

$$\cos 11x(1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x$$

$$\begin{aligned} & 69 \\ & 67 \\ & n = 66 \end{aligned}$$

$$70 - x - 2^x + (n - 6) \cdot 2^{64}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(2x^2 - 2\sqrt{2}x \cdot \sqrt{2}y + 2y^2) + ((1 - 2/x^2 - 2 \cdot \sqrt{2}x \cdot \sqrt{2} + 1)) =$$

А

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = (y^2)^{\lg x + \lg y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = (y^2)^{\lg x} \cdot (y^2)^{\lg y}$$

$$(5 \lg x - 2 \lg xy) \lg(y) = \lg x \lg(y) \cdot 5 \lg x - 2 \lg xy = x^{\lg x}$$

$$5 \lg x \lg y - 2(\lg x + \lg y) \lg y = \lg^2 x$$

$$5 \lg x \lg y - 2 \lg x \lg y - 2 \lg y^2 = \lg^2 x$$

$$\lg^2 x + 2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y = 0$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$a^2 + 2b^2 - 4ab$$

$$\frac{27}{18} = 1.5$$

$$12 + 9 = 21$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x$$

$$= y^2 \lg xy$$

$$70 + (2^{64} - 1)x - 2^7 \cdot 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2 - 6) \cdot 2^{64} - x - 2^x$$

$$\lg x \lg \left(\frac{y^5}{x}\right) = \lg x (2 \lg xy \lg y)$$

$$\lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg y (\lg x + \lg y)$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg y^2$$

$$\lg^2 x + 2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y = 0$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg y^2 = 0$$

$$0 \rightarrow 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y - \lg^2 y$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y^2 \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 - 12x = 0$$

$$x - 2x - 4 - 3x - 12 = 0$$

$$-4x - 16 = 0$$

$$x = -4$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{12} - 1)^2 &= \frac{17 + 1 - 2\sqrt{12}}{2} = \\ &= \frac{18 - 2\sqrt{12}}{2} = \frac{9 - \sqrt{12}}{1} \end{aligned}$$

$$-1 - 2^x \ln 2 + 2^{64} \neq 0$$

$$2^{64} = 1 + 2^x \ln 2$$

$$\frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \approx 2^x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

①

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15^3 = 3375 \\ + 15 \\ \hline 15 \\ + 15 \\ \hline 75 \\ + 15 \\ \hline 225 \\ + 15 \\ \hline 1125 \\ + 25 \\ \hline 3375 \end{array}$$

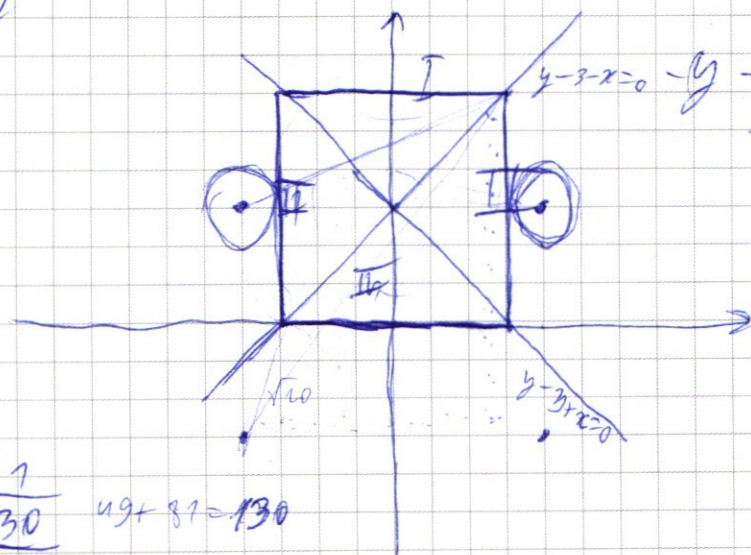
$$\begin{array}{r} 355 \quad 9311 \\ 555 \quad 33311 \end{array}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 56 \cdot 10 = 560$$

$$1120 + 560 = 1680$$

⑤



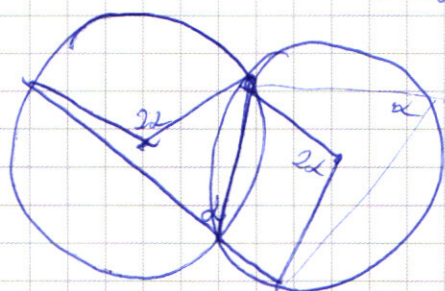
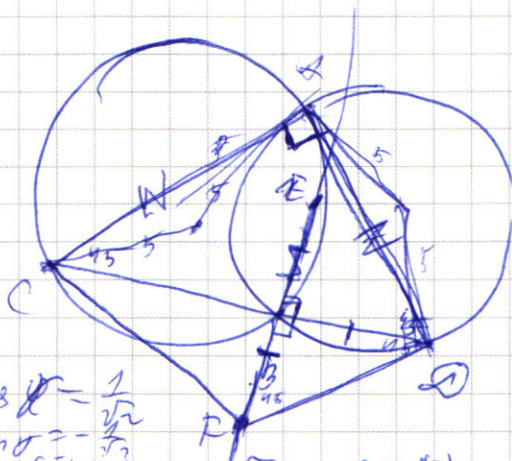
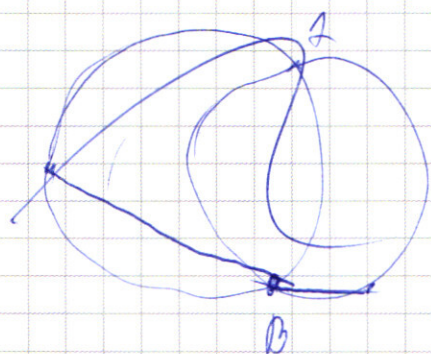
$$\begin{aligned} y - 3 - x &= 0 \quad -y - 3 - x + y - 3 + x = 6 \\ -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3 - y + y &= 3 + x = 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 3 - y + 3 - x - y &= 6 \\ 6 - 2y &= 6 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ a &= 130 \end{aligned}$$

$$49 + 81 = 130$$



$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 2 - \cos 2 = \sqrt{2} \sin(2 + \varphi)$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$



$$\cos 2 - \sin 2 = \sqrt{2} \sin(2 + \varphi)$$

$$\varphi = -\frac{3\pi}{4}$$

$$\sqrt{2} \sin(2 + \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} - \sin 2 \cos \frac{3\pi}{4} +$$

$$+ \sqrt{2} \cos 2 \sin \frac{3\pi}{4} = -\sin 2 + \cos 2$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \sqrt{2} \sin(11x + \frac{3\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos(2 + \beta) = \cos 2 \cos \beta - \sin 2 \sin \beta$$

$$\cos(2 - \beta) = \cos 2 \cos \beta + \sin 2 \sin \beta$$

$$\cos 11x - \cos 3x =$$

$$\cos 2 \cos \beta = \frac{\cos(2 - \beta) + \cos(2 + \beta)}{2} = 2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\cos(2 - \beta) + \cos(2 + \beta) = 2 \cos 2 \cos \beta$$

$$\cos 2 \cos \beta$$

$$\frac{\cos(2 - \beta) - \cos(2 + \beta)}{2} = \sin 2 \sin \beta$$

$$\cos(2 - \beta) - \cos(2 + \beta) = 2 \sin 2 \sin \beta$$

$$x = 2 - \beta$$

$$2 = \frac{x + y}{2}$$

$$y = 2 + \beta$$

$$\beta = \frac{y - x}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{y - x}{2}$$