

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ШЕРОБНИК

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$(\cos 11n - \cos 3n) + (\sin 3n - \sin 11n) = \sqrt{2} \cos 14n$$

~~и и~~

$$-2 \sin 7n \sin 8n \stackrel{?}{=} 2 \cos 7n \sin 8n = \sqrt{2} (\cos^2 7n - \sin^2 7n)$$

и и

$$-2 \sin 8n / (\sin 7n + \cos 7n) = \sqrt{2} (\cos 7n - \sin 7n) (\cos 7n + \sin 7n)$$

$$= \sin 7n \cos 7n + \cos 7n \sin 7n$$

$$\cos 7n (\sqrt{2} + 2 \sin 7n) + \sin 7n (\sqrt{2} - 2 \cos 7n)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\textcircled{I} \quad \underline{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$\textcircled{II} \quad \underline{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

Поскольку цифры восьмизначного числа
с $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, то существует только
2 варианта, как можно разложить число
3375 на множители:

$$\textcircled{I} \quad \underline{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}$$

и

$$\textcircled{II} \quad \underline{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

□ □ □ □ □ □ □ □
1 2 3 4 5 6 7 8

Ⓘ

Всего 8 цифр $\Rightarrow$ существует $8!$ вариан-
тов, но это — с повторениями.

ⓓ

кол-во повторений:

$$S_1 = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$$

кол-во повторений:

$$S_2 = \frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = 1120$$

Всего: $S = S_1 + S_2 = 560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680.

N5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): $y = 3+x$ $y = 3-x$

Ⓘ $-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$

$-2y = 0$

$y = 0$

Прямая точка (0;0)

ⓗ $y-3-x + y-3+x = 6$

$2y = 12$

$y = 6$

Прямая точка (0;6)

Ⓙ $-x + 3 + x + y - 3 + x = 6$

$2x = 6$

$x = 3$

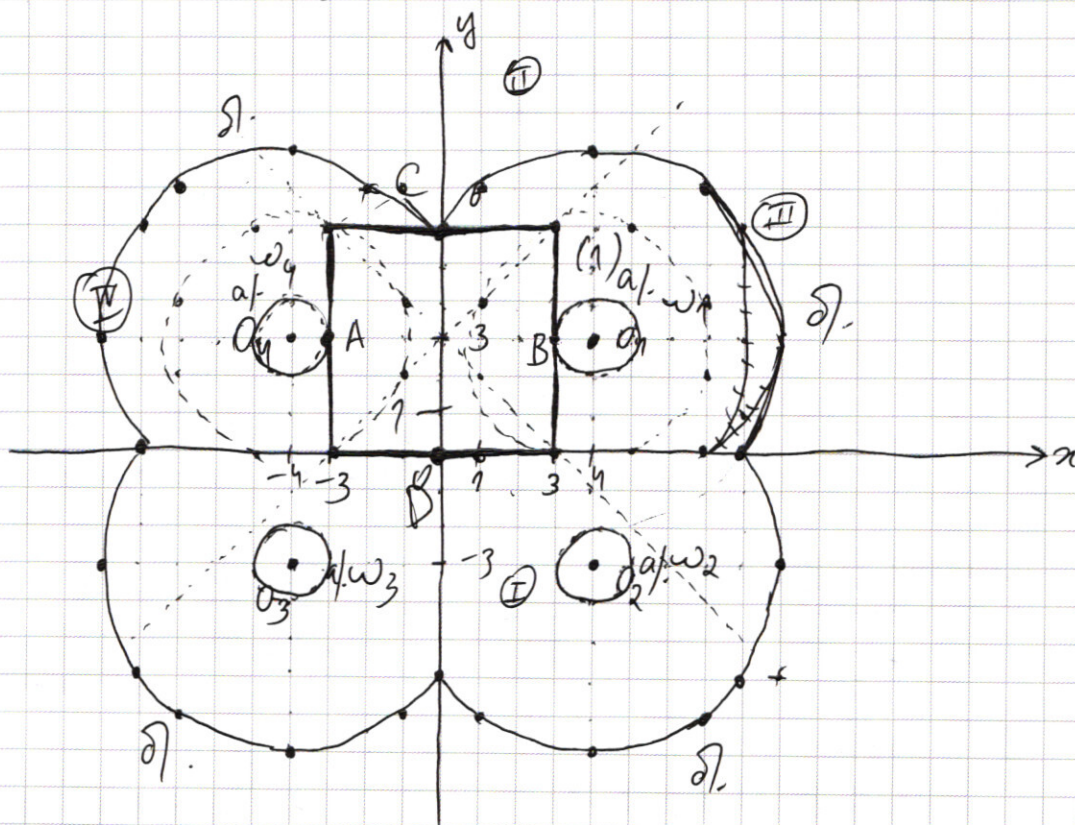
Прямая точка (3;0)

Ⓚ $x-3-x + x+3-x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

Получился квадрат со стороной 6.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2): четыре окружности с центрами
($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$)
 $O_1(4; 3)$; $O_2(4; -3)$; $O_3(-4; -3)$ и $O_4(-4; 3)$ и
радиусами $\sqrt{a}$, ограниченные
одним координат

Чтобы было ровно 2 решения:

а). ω_1 и ω_4 — касаются "квадрата" в точках А и В (1; 3) (3; 3)

$$r_1 = r_4 = 1 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 \Rightarrow \underline{a = 1}$$

~~Ответ: $a = 1$~~

б). ω_1 и ω_4 — касаются "квадрата" в точке С и (0; 5)
точка D также принадлежит (0; 0)

$$r_1 = r_4 = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 5 \Rightarrow \underline{a = 25}$$

Ответ: $a = 1$; $a = 25$.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{n}\right)^{\lg n} = y^{2 \lg ny} & (1) \\ n^2 - 2ny + 4n - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \quad n^2 - (2y+4)n - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$D = (2y+4)^2 + 4(3y^2 - 12y) =$$

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$$

$$= 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) =$$

$$n = \frac{(2y+4) \pm \sqrt{16(y-1)^2}}{2} = \frac{(2y+4) \pm 4(y-1)}{2} = \begin{matrix} 3y \\ -y+4 \end{matrix}$$

$$(1) \quad \left(\frac{y^5}{n}\right)^{\lg n} = y^{2 \lg ny}$$

$$\frac{y^{5 \lg n}}{n^{\lg n}} = y^{2(\lg n + \lg y)}$$

$$y^{5 \lg n} = n^{\lg n} \cdot y^{2 \lg n} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg n} = n^{\lg n} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{\lg n} \cdot y^{2 \lg n} = n^{\lg n} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{\lg n}}{n^{\lg n}} = \frac{y^{2 \lg y}}{y^{2 \lg n}}$$

$$\left(\frac{y}{n}\right)^{\lg n} = y^{2(\lg y - \lg n)}$$

$$\left(\frac{y}{n}\right)^{\lg n} = y^{2 \lg \left(\frac{y}{n}\right)}$$

$$\left(\frac{y}{n}\right)^{\lg n} = \left(\frac{y}{n}\right)^{2 \lg y}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{n} = 1 \\ \lg n = 2 \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = n \\ n = y^2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x=3y \\ x=4-y \\ x=y \\ x=y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \text{не подходит в ОДЗ}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \rightarrow \text{не подходит в ОДЗ}$$

$$y^2=4-y$$

$$y^2+y-4=0$$

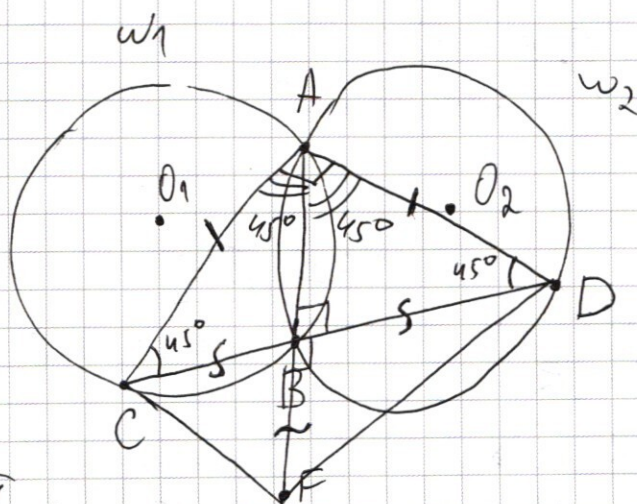
$$D=1+4 \cdot 4=1+16=17$$

$$y=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x=\frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

N6.

a/.



П.Л.К. $\angle ADB$ и $\angle ACB$ опираются на дугу $\widehat{AB}$, градусная мера которой равна для обеих окружностей (т.к. они равны) $\Rightarrow \angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$

$$\Delta CAD - \text{p.d.} \Rightarrow AC = AD \Rightarrow (\angle ADB = \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{ABD}$$

(м.к. окружности ω_1 и ω_2 равны) $\Rightarrow$
 $\overset{\frown}{AB}$ — дуга
 (наименьшая)

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \angle CAB = \angle DAB = 45^\circ$$

(наименьшие дуги)

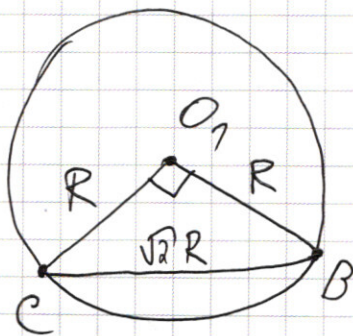
Значит: $CB = BD = \frac{CD}{2} = BF$

$AB \perp CD$, т.е. AB — высота

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + CB^2} = \sqrt{2} CB$$

$$\angle CAB = 45^\circ \Rightarrow \angle CO_1 B = 90^\circ$$

(вписанный) (центральный)



$$\underline{CB = \sqrt{2} R}$$

(в прям. $\Delta CO_1 B$)

$$R = 5$$

$BC = 5\sqrt{2}$

$$\left. \begin{array}{l} CF = \sqrt{2} CB \\ CB = \sqrt{2} R \end{array} \right\} \Rightarrow CF = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} R = 2R$$

$R = 5 \Rightarrow CF = 10$

Ответ: $CF = 10$.

ΔBCF не может быть равноб., т.к. $BC = 5\sqrt{2}$, $5\sqrt{2} \neq 6 \Rightarrow$ ошибка в задании!

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

$$\cos 7\pi - \cos 3\pi - \sin 7\pi + \sin 3\pi = \sqrt{2} \cos 4\pi$$

$$(\cos 7\pi - \cos 3\pi) - (\sin 7\pi - \sin 3\pi) = \sqrt{2} \cos 4\pi$$

$$(-2 \sin 7\pi \sin 4\pi) - (2 \cos 7\pi \sin 4\pi) = \sqrt{2} (\cos^2 7\pi - \sin^2 7\pi)$$

$$-2 \sin 7\pi \sin 4\pi - 2 \cos 7\pi \sin 4\pi = \sqrt{2} (\cos^2 7\pi - \sin^2 7\pi)$$

$$-2 \sin 4\pi (\sin 7\pi + \cos 7\pi) = \sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) (\cos 7\pi + \sin 7\pi)$$

$$(\sin 7\pi + \cos 7\pi) (\sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) + 2 \sin 4\pi) = 0$$

1. $\sin 7\pi + \cos 7\pi = 0$

$$\sqrt{2} \left(\sin 7\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 7\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin 7\pi \cos \frac{\pi}{4} + \cos 7\pi \sin \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin \left(7\pi + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7\pi + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$7\pi = \pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$n = \frac{7\pi}{\pi} - \frac{\pi}{28}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{28} - \frac{\pi}{28}, n \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi h}{3}, h \in \mathbb{Z};$
 $\frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}.$

2. $\sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) = -2 \sin 4\pi$

$$\sin 7\pi - \cos 7\pi = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin 4\pi$$

$$\sqrt{2} \left(\sin 7\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 7\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2} \sin 4\pi$$

$$\sin \left(7\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin 4\pi$$

1. $7\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi + 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$

$$3\pi = \frac{\pi}{4} + 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi h}{3}, h \in \mathbb{Z}$$

2. $7\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - 4\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

№7.

$$\begin{cases} y > 2^n + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot n \end{cases}$$

$$2^n + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1) \cdot n$$

$$2^n + 6 \cdot 2^{64} < 70 + 2^{64} \cdot n - n$$

$$2^n + n + 6 \cdot 2^{64} - n \cdot 2^{64} < 70$$

$$2^n + n + 2^{64} (6 - n) < 70$$

1/ при $n = 6$:

$$2^6 + 6 + 0 = \overset{4}{2} \cdot \overset{8}{2} \cdot \overset{16}{2} \cdot \overset{32}{2} \cdot \overset{64}{2} = 64 + 6 = 70 = \underline{70}$$

не подходит.

2/ при $n < 6$:

$$\underbrace{2^{64} \cdot (6 - n)}_{> 0} \text{ — большое число } > 70$$

3/ при ~~n < 6~~ $n > 6$: все подходит

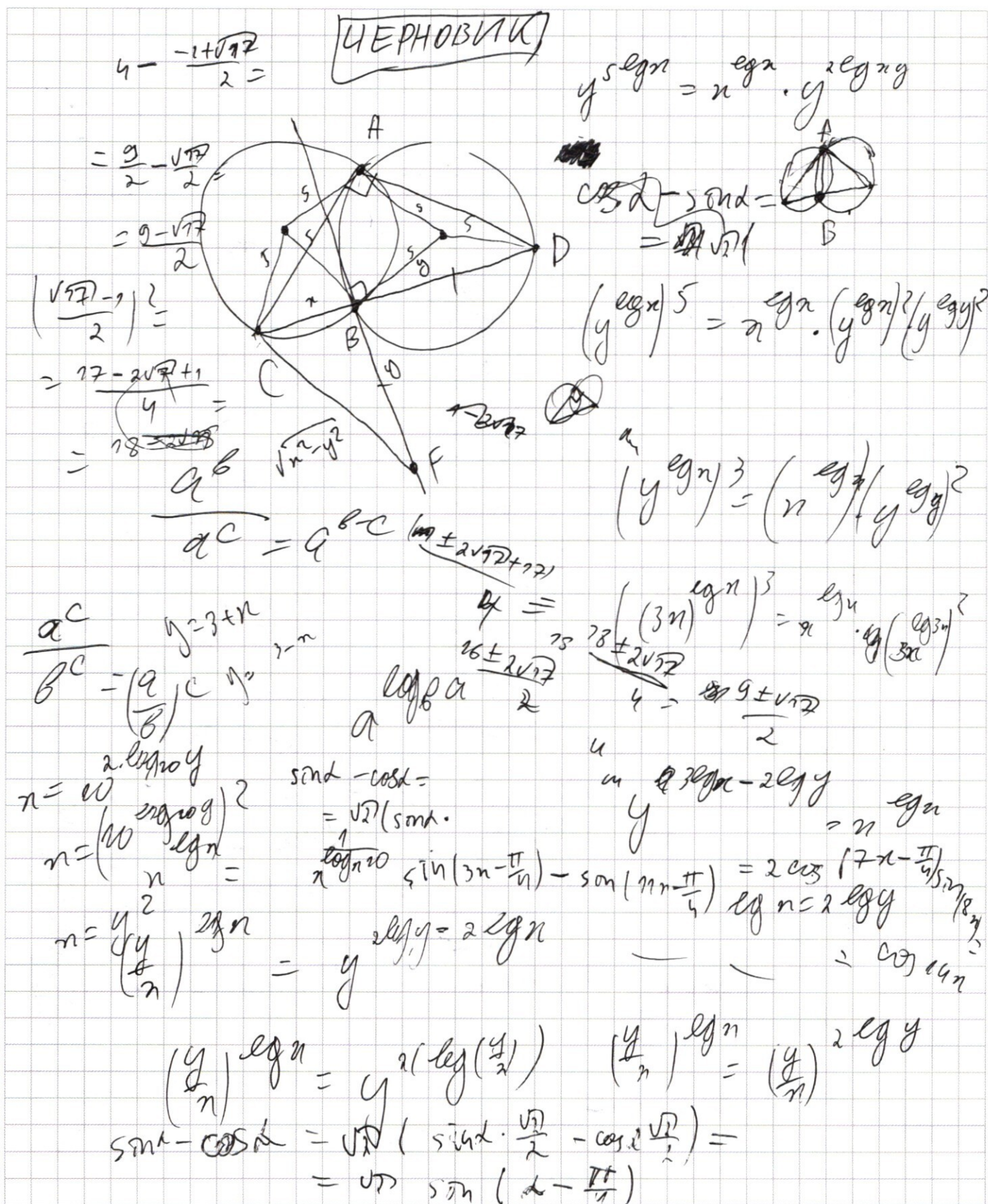
$$2^n + n + 2^{64} \cdot (6 - n) < 70$$

$$\text{Если } n = 64: 2^{64} + 64 + 2^{64} \cdot (6 - 64) = 2^{64} + 64 - 2^{64} \cdot 58 =$$

$$\text{при большем } n \cdot 2^n \text{ — очень большое число } \Rightarrow -2^{64} \cdot 57 + 64 < 70$$

значит $n \in [7; 64]$ ~~и т.д.~~ $\Rightarrow n = \underline{58}$
Ответ: 58.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ЧЕРНОВИК

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} 675 \\ \underline{37} \\ \underline{-35} \\ 25 \\ \underline{-25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{-15} \\ 25 \\ \underline{-25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735 \overline{) 5} \\ - 10 \overline{) 27} \\ \hline 35 \\ - 35 \\ \hline 0 \end{array}$$

U7.

$$n = \frac{2y+4 \pm \sqrt{(y-1)}}{2}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

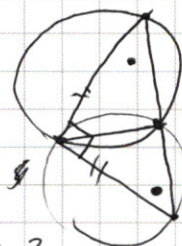
$$D = (2y+4)^2 - 4 \cdot (-3y^2 + 12y)$$

$\begin{matrix} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \textcircled{4} & 8 & - & 7 & - & 6 & - & 5 & - & 4 & - & 3 & - & 2 & - & 1 \end{matrix}$

5 5 5 3 3 3 1 1

555 9 3 177

$$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y$$



$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = 4 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 1 = 140$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$\xrightarrow{=n}$ $\xrightarrow{=y}$ $\frac{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1} =$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\frac{y^{\text{segn}}}{n^{\text{egn}}}$$

$= y^2 \log y$

Index! 2266

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2$$

$$a - b = 33333$$

$$\cos(11\pi + 3\pi) =$$

$$y^{\log n} = n^{\log y} \cdot y^{2 \log n}$$

$$y^{5 \log n} = n^{\log n} \cdot y^{\log n} \cdot y^{\log n}$$

$$-25m \cdot 7n \cdot \sin 4n \cdot 2 \cos 7n \sin 4n$$

$$\cos n - \cos m = 2 \sin \left(\frac{n+m}{2} \right) \sin \left(\frac{n-m}{2} \right)$$