

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Заметим, что:

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$. Также заметим, что перемножением его делителей можно получить только одну цифру — 9 (т.к. она получается перемножением двух минимальных делителей — трех, а это самая большая цифра). В 8-значном числе девятка может быть 0 или одна (так как трех всего три цифра, а в разложении по множителям).

1) Девятки нет.

Тогда 3 три пятёрки, три тройки, а всё остальное — единицы. Сначала выбираем ³ три места из 8 для пятёрок, потом 3 места из оставшихся ⁵ для троек, поэтому получим количество вариантов:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 =$$

$$= 560$$

2) Одна девятка.

Тогда также одна тройка, три пятёрки и три единицы. Сначала выбираем ¹ одно место из 8 для девятки, потом 1 из 7 для тройки, потом 3 из 6 для пятёрок:

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3!3!} = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 10 =$$

$$= 56 \cdot 2 \cdot 10 = 1120$$

(1 программа)

Угол, в котором $1120 + 560 = 1680$ градусов

Ответ: 1680

②

$$(\cos(11x) - \cos(3x)) + (\sin(3x) - \sin(11x)) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

⇕ сложение синусов, косинусов

$$-2 \sin(7x) \sin(4x) + 2 \sin(-4x) \cos(7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

⇕ упрощение по формуле разности, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$$-2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

⇕

$$(\cos(7x) + \sin(7x)) \left(\sqrt{2} \cos(7x) - \sqrt{2} \sin(7x) + 2 \sin(4x) \right) = 0$$

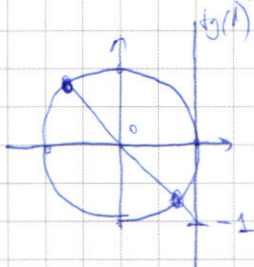
⇕

$$\begin{cases} \cos(7x) = -\sin(7x) & (1^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(7x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(7x) \right) + 2 \sin(4x) = 0 & (2^*) \end{cases}$$

1) Рассмотрим (1*):

Таким образом, когда $\tan(7x) = \frac{\sin(7x)}{\cos(7x)} = \frac{\sin(7x)}{-\sin(7x)} = -1$, то есть,



$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

2) Рассмотрим (2*): если нам $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(7x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(7x) = \sin(7x + \frac{3\pi}{4})$, то:

$$2 \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) + 2 \sin(4x) = 0$$

⇕

$$\sin(7x + \frac{3\pi}{4}) + \sin(4x) = 0$$

⇕

$$2 \sin(5.5x + \frac{3\pi}{8}) \cos(1.5x + \frac{3\pi}{8}) = 0$$

⇕

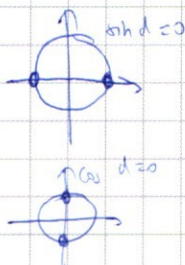
$$\begin{cases} \sin(5.5x + \frac{3\pi}{8}) = 0 \\ \cos(1.5x + \frac{3\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\cos(1.5x + \frac{3\pi}{8}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② (продолжение)

2)



①

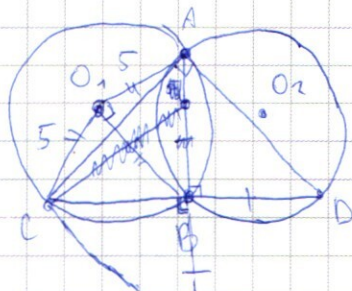
$$\begin{cases} 5.5x + \frac{3\pi}{8} = \pi n \\ 1.5x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

②

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{5.5} - \frac{3\pi}{44} \\ x = \frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \end{cases}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$; $\frac{2\pi n}{11} - \frac{3\pi}{44}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

⑥



CF-?

а) Так как равные окружности, дуги AB стягивают равные хорды AB, то дуги AB равны и углы, опирающиеся на них, тоже: $\angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Из равенства углов $\angle ACB$ и $\angle ADB$ (по общей хорде AB и углам в 45°) $CB = BD$, тогда AB — медиана, биссектриса и высота в $\triangle CAD$.

Так как $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle AOB$ (центральный) $= 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{2}r = 5\sqrt{2}$ (теорема Пифагора). Т.к. в $\triangle CAD$ медиана AB — равная биссектриса, то $BD = BF = AB = 5\sqrt{2} = CB$. Итого, $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$.

Решение задачи. Пусть $AC = AD = a$, тогда $CD = \sqrt{2}a$ (т. Пиф.), пусть $\angle ACB = x$, тогда $BD = \sqrt{2}a - x$. Так как $BF = BD = \sqrt{2}a - x$, то

$$CF = 10$$

⑥ (треугольники)

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = x^2 + (\sqrt{2}a - x)^2 = 2a^2 + 2x^2 - 2\sqrt{2}ax$$

По теореме косинусов для $\triangle ACB$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\angle ACB)$$

$$(5\sqrt{2})^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + x^2 - \sqrt{2}ax = 50,$$

то тогда $CF^2 = 100 \Rightarrow CF = 10$. Ответ: $CF = 10$

8) По теореме косинусов: пусть $AC = x$:

$$BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos(\angle ACB) = AB^2$$

$$36 + x^2 - 2 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} x = 50$$

$$x^2 - \sqrt{2} \cdot 6x - 14 = 0$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{32 + 56} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$x = \frac{6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = \frac{14\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2}$$

По теореме Пифагора: $CD = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 14$

Тогда $BD = 14 - 6 = 8 = BF$

$$CF = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\cos(\angle BCF) = \frac{BC}{CF} = \frac{6}{10} = 0.6 \Rightarrow \sin(\angle BCF) = \sqrt{1 - 0.6^2} = 0.8$$

$$\begin{aligned} \text{Найдём: } \cos(\angle ACF) &= \cos(45^\circ) \cos(\angle BCF) - \sin(45^\circ) \sin(\angle BCF) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot 0.6}{2 \cdot 10} - \frac{\sqrt{2} \cdot 0.8}{2 \cdot 10} = \frac{\sqrt{2}}{2} (0.6 - 0.8) = -\frac{\sqrt{2} \cdot 0.2}{2 \cdot 10} = -\frac{\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

Тогда $\sin(\angle ACF) = \sqrt{1 - \frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{98}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

Тогда $S_{\triangle ACF} =$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF) = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$$

Ответ: $S_{\triangle ACF} = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{3} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(x-y)} & (1^*) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2^*) \end{cases}$$

Заметим, что (2^*) можно переписать так:

$$(x-3y)(x-4+y) = 0, \text{ откуда:}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

Подставим в (1^*) и решим:

$$\begin{aligned} 1) \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} &= y^{2 \lg(3y^2)} \\ y^{5 \lg(3y)} &= 3 \cdot y^{2 \lg(3y^2)} \cdot y^{\lg(3y)} \\ y^{5 \lg(3y)} &= 3 \cdot y^{(2 \lg(3y^2) + \lg(3y))} \\ 5 \lg(3y) &= \frac{\lg(3)}{\lg(y)} + 2 \lg(3y^2) + \lg(3y) + 2 \lg(y) \\ 4 \lg(3y) &= \frac{\lg(3)}{\lg(y)} + 2 \lg(3y^2) + 2 \lg(y) \\ 2 \lg\left(\frac{3y}{y}\right) &= \frac{\lg(3)}{\lg(y)} \\ 2 \lg(3) &= \frac{\lg(3)}{\lg(y)} \\ \lg(y) &= 0.5 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{10} \\ x = 3\sqrt{10} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} &= y^{2 \lg(4y-y^2)} \\ y^{5 \lg(4-y)} &= (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg(4y-y^2)} \\ 5 \lg(4-y) &= \lg(4-y) + \lg y(4-y) + 2 \lg(4y-y^2) \\ 5 \lg(4-y) &= \frac{\lg^2(4-y)}{\lg(y)} + 2 \lg(4-y) \lg(y) \\ \lg^2(4-y) + 2 \lg(4-y) \lg^2(y) - 5 \lg(4-y) \lg(y) &= 0 \\ \lg(4-y) (\lg(4-y) + 2 \lg^2(y) - 5 \lg(y)) &= 0 \end{aligned}$$

③ (продолжение)

$$\begin{cases} \textcircled{1} \\ \lg(4-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \textcircled{2} \\ 2\lg^2(y) - 5\lg(y) + \lg(4-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \\ \dots \end{cases}$$

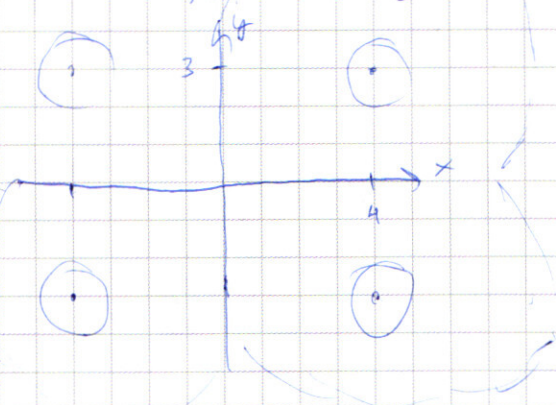
Ответ: $\begin{cases} y=3 \\ x=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=\sqrt{10} \\ x=3\sqrt{10} \end{cases}$

$$\textcircled{5} \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1^{\circ}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2^{\circ}) \end{cases}$$

Заметим, что (2°) — семейство кривых — первоначально, при малых a , это окружность с центром в $(4, 3)$ с радиусом $\sqrt{a}$, которая вращается в точке $(4, 3)$ по мере того, как $a > 3$.

Окружности начинают становиться неплотными и образуют «бабочку».



Заметим, что (1°) — кусок ломаной.

$$|(y-3)-x| + |(y-3)-(-x)| = 6. \quad \text{Четыре случая}$$

1) $y-3 \geq x$; $y-3 \geq -x$, тогда

$$2(y-3) = 6$$

$$\begin{aligned} y-3 &= 3 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

по условиям $3 \geq x$, $3 \geq -x \Leftrightarrow x \leq 3$; $x \geq -3$; $x \in [-3; 3]$

2) $y-3 \leq x$; $y-3 \leq -x$

$$-2(y-3) = 6$$

$$\begin{aligned} y-3 &= -3 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

по условиям $-3 \leq x$, $-3 \leq -x \Leftrightarrow x \geq -3$; $x \leq 3$; $x \in [-3; 3]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) (продолжение)

3) $y - 3 \geq x$; $y - 3 \leq -x$, тогда

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

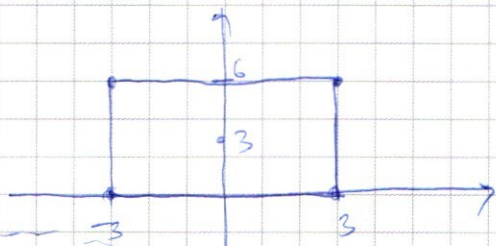
то условия при $y - 3 \geq -3$; $y - 3 \leq 3 \Leftrightarrow y \geq 0$; $y \leq 6$ т.е. $y \in [0; 6]$

4) $y - 3 \leq x$; $y - 3 \geq -x$, тогда

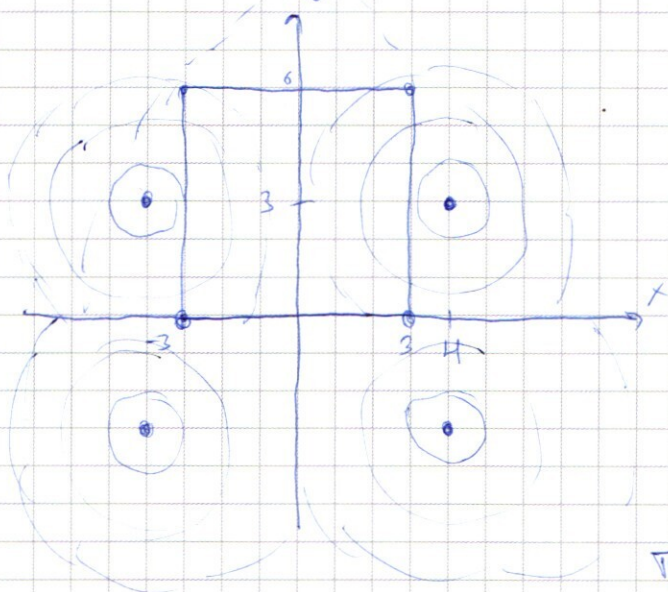
$$2x = 6$$

$$x = 3$$

при $y - 3 \leq 3$; $y - 3 \geq -3 \Leftrightarrow y \leq 6$; $y \geq 0$ т.е. $y \in [0; 6]$



Намечивая:



Видим, что это квадрат с центром
в $(0; 3)$ со стороной 6.

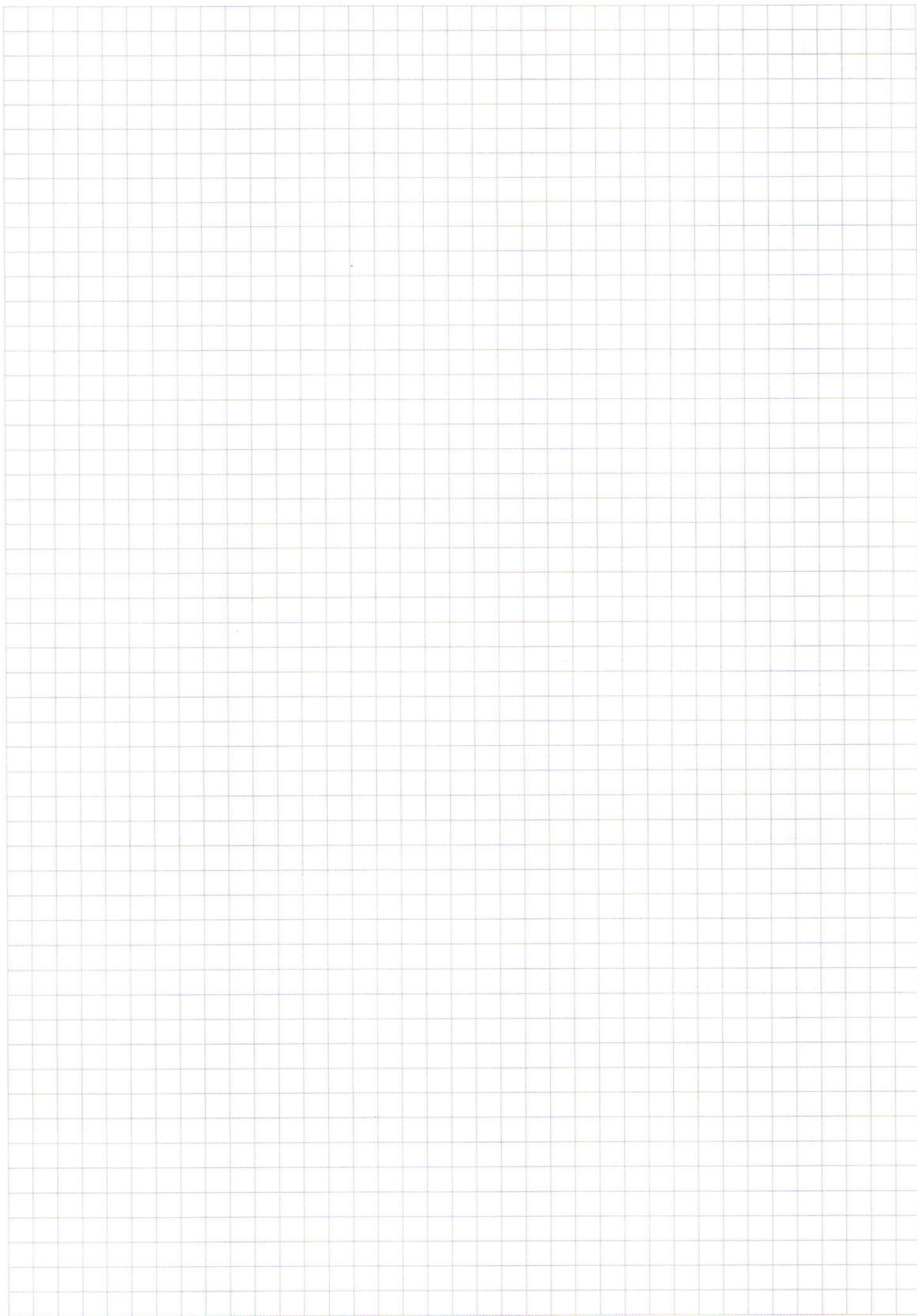
Для решения:

при $a = 1$, тогда две вершины
окружности касаются, остальные — нет.

Данные кас-ва так хорошо уде-
рживаются, но для наших задач
работы не требуется касаться
квадрат

Данные ~~внутренние касание квадрата~~
там а

Ответ: $a = 1$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

[illegible]

$$a) \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{\boxed{5!}}{3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$b) 8 \cdot 7 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 8 \cdot 7 \cdot \frac{8 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 56 \cdot 2 \cdot 10 = 1120$$

$$\text{Итого: } \underline{1680} = 560 \cdot 3$$

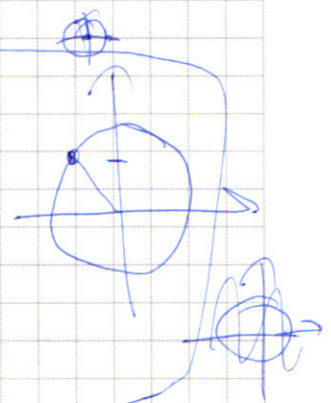
$$② (\cos(11x) - \cos(3x)) \cdot \cancel{A \sin} + (\sin 3x + \sin \cancel{11x}) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(90^\circ) - \cos(90^\circ) = -2 \sin(45^\circ)$$

$$\cos_0(90^\circ) - \cos_1(0^\circ) = -2 \sin(45^\circ) \sin(45^\circ) = -1$$

$$\cos(90^\circ) + \cos(0^\circ) = 2 \cos(45^\circ) \cos(45^\circ) = 2$$



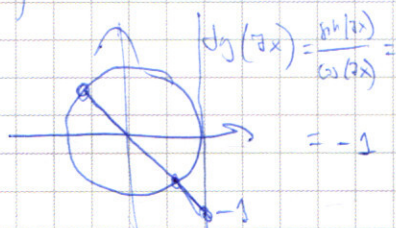
$$-2 \sin(7x) \sin(4x) + 2 \sin(-4x) \cos(7x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$-2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos^2(7x) - \sin^2(7x))$$

$$-2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x + 2 \sin(4x)) = 0$$

$$1) \cos 7x = -\sin 7x$$



$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$$

$$2) \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$2 \sin\left(7x + \frac{3\pi}{4}\right) = -2 \sin(4x)$$

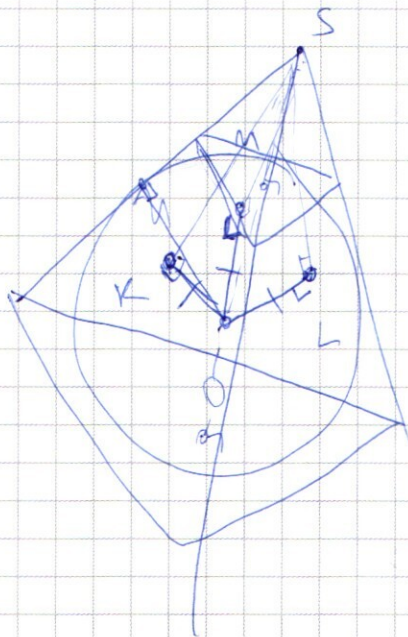
$$\sin\left(7x + \frac{3\pi}{4}\right) + \sin(4x) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{25x + \frac{3\pi}{8}}{2}\right) \cos\left(\frac{5.5x + \frac{3\pi}{8}}{2}\right) = 0$$



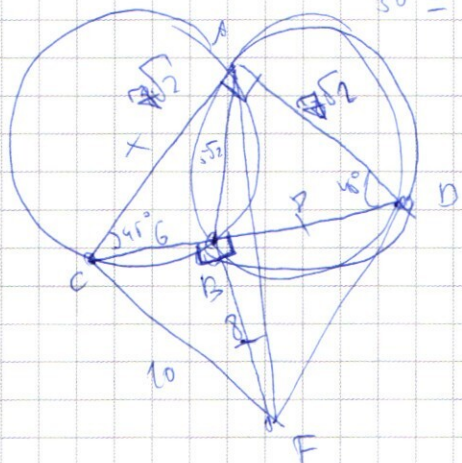
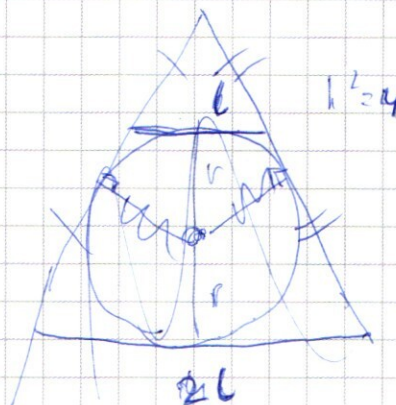
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



$\angle KSO = ?$

$S_{\text{внеш}} = ?$



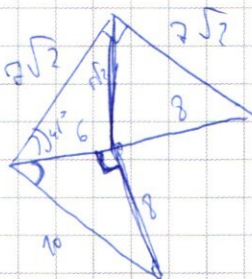
$$50 = 36 + x^2 - \sqrt{2} \cdot 6x$$

$$x^2 - 6\sqrt{2}x - 14 = 0$$

$$\sqrt{72 + 56} = \sqrt{128} =$$

$$= 8\sqrt{2}$$

CB =



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{2} \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

~~$$(x-y)(x-4+3y) = 0$$~~

~~$$(x-3y)(x-4+y) = 0$$~~

~~$$(x+y)(x-4-3y) = 0$$~~

~~$$(x-3y)(x-4+y) = 0$$~~

$$(x-3y)(x-4+y) = x^2 - 4x - 3xy + 12y - 3y^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lg^2(2) - 4 \lg(2) \\ = \lg(2) (\lg(2) - 4) \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$\begin{aligned} 2 \lg(3y) \lg\left(\frac{y^5}{3y}\right) &= 2 \lg(3y) \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) \\ &= 2 \lg(3y) (4 \lg(y) - \lg(3)) \end{aligned}$$

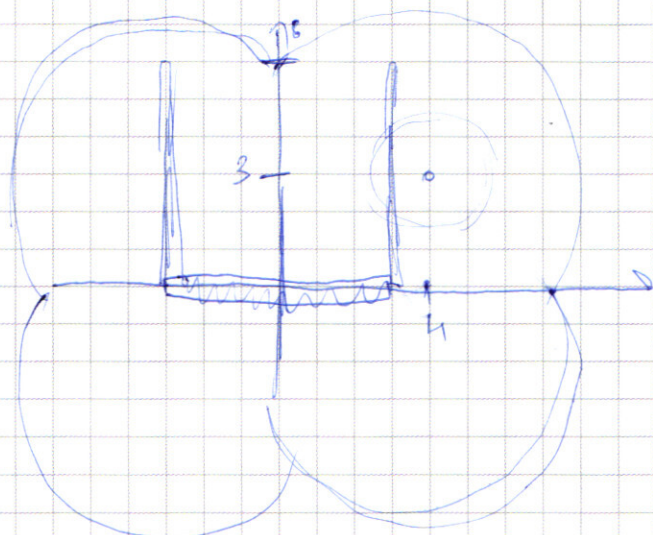
$$y^{5 \lg(3y)} = 3 \cdot y^{2 \lg(3y^2)} \cdot y^{\lg(3y)}$$

$$y^{5 \lg(3y)} = 3 \cdot y^{(2 \lg(3y^2) + \lg(3y))}$$

$$5 \lg(3y) = \lg_3(3) + 2 \lg(3y^2) + \lg(3y)$$

$$4 \lg(3y) (-2 \lg(3y) - 2 \lg(y)) = \frac{\lg(3)}{\lg(y)}$$

5



$$\left| (y-3) - x \right| + \left| (y-3) - (-x) \right| = 6$$

$\begin{matrix} 3 > x \\ 6-3 > x \\ y-3 > x \end{matrix}$
 $\begin{matrix} 3 > -x \\ 6-3 > -x \\ y-3 > -x \end{matrix}$

1) $y-3 > x$,

$$2y-6=6$$

$$y=6$$

2) $y-3 < x$,

$$\begin{matrix} 3 > x \\ -3 < -x \\ y-3 < -x \end{matrix}$$

$$x - (y-3) + (-x) - (y-3) = 6$$

$$-2y+6=6$$

$$y=0$$

$x \in [-3; 3]$
 $y \geq 0$

$$x > 3$$

$$y \geq 0$$

$$y < 6$$

$$y-3 > -3$$

$$y-3 < 3$$

3) $y-3 > x$, $y-3 < -x$

$$(y-3) - x + (-x) - (y-3) = 6$$

$$-2x = 6$$

$$-x = 3$$

$$x = -3$$

$$y < 6$$

$$y-3 < 3$$

4) $y-3 < x$,

$$y > 0$$

$$y-3 > -3$$

$$y-3 > -x$$

$$x - (y-3) + (y-3) + x = 6$$

$$x = 3$$

$0 < y < 6$: $x=3$
 $x=-3$