

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

51.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Если произведение цифр восьмизначного числа равно ~~делится на~~ 3375, то набором его цифр может быть либо 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1 ~~и во~~ ~~перестановки~~ либо 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1 ~~и во~~ ~~перестановки~~.

~~Кол-во перестановок 3, 3,~~ Кол-во чисел, имеющих набор цифр 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1 равно $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = (C_8^3 \text{ способов выбрать места для 3х 5-к, } C_5^3 - \text{ для 3х 3-к}) = 560$

Кол-во чисел имеющих набор цифр 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1 равно $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1$ (C_8^3 - кол-во способов расставить 3 5-ки, C_5^1 - кол-во способов расставить 1 9-ку, C_4^1 - расставить 1 3-ку, C_3^3 - кол-во способов расставить 3 единицы) = 1120

$$\text{Итого: } 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

5а.

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 4x$$

Преобразуем разности косинусов и синусов по формуле:

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$2 \sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{3x-11x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x+11x}{2}\right) = \\ = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cdot \cos(7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \cdot \\ \cdot (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) + \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0 \\ (\sin 7x - \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)) = 0$$

$$\begin{cases} \sin 7x - \cos 7x = 0 & (1) \\ 2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\sin 7x - \cos 7x = 0$ / : $\cos 7x$, если $\cos 7x = 0$, то равенство нулю не выполняется, т.к. тогда $\sin 7x \neq 0$, а $\cos 7x = 0$ и $\sin 7x = 0$ одновр. невозможно

$$\operatorname{tg} 7x = 1$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad 2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x + \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right) = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

Преобразуем сумму синусов в произведение

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 4x \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} + 7x \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{4x + 7x + \frac{\pi}{4}}{2} \\ \beta = \frac{4x - 7x - \frac{\pi}{4}}{2} \end{cases}$$

$$2 \sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{-3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi + \pi n \\ \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 11x + \frac{\pi}{4} = 2\pi + 2\pi n \\ 3x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11} \\ x = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{7\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}; \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{\pi m}{7}$

$$n, m, k \in \mathbb{Z}$$

ЗЗ.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y + \pi y^2 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

Найдем корни по Т. Виета

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -3y^2 + 12y \\ x_1 + x_2 = 2(y+2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -3y(y-4) \\ x_1 + x_2 = 2y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3y \\ x_2 = -(y-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases} \quad \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$x \neq 0$
 $x > 0$
 $xy > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ \left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg(3y \cdot y)} \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4-y \\ \left(\frac{y^5}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg((4-y)y)} \quad (3) \end{cases}$$

$$(2) \quad \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg(3y^2)}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y}}{3^{\lg 3y}} = y^{2 \lg 3 + 2 \lg y^2}$$

$$y^{4 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} = 3^{\lg 3y} \cdot y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y} \quad | : y^{2 \lg 3} \cdot y^{4 \lg y}$$

$$y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y} \quad | \text{возьмем } \lg | \quad y > 0 (*)$$

от обеих частей

$$\lg y \cdot 2 \lg 3 = \lg 3y \cdot \lg 3$$

$$2 \lg y = \lg 3y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y ; \lg y = \lg 3 \Rightarrow y = 3$$

(3)

$$\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg(4-y) + 2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg(4-y)} \quad \begin{array}{l} y > 0 (*) \\ 4-y > 0 (*) \\ (x=4-y) \end{array}$$

$$\frac{y^{3 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = y^{2 \lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \quad | : y^{2 \lg y} \quad y > 0 (*)$$

$$y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{возьмем} \\ \lg \text{ от обеих} \\ \text{частей} \end{array} \right.$$

$$(3 \lg(4-y) - 2 \lg y) \lg y = \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$3 \lg y \cdot \lg(4-y) - 2 \lg^2 y - \lg^2(4-y) = 0 \quad | : \lg^2 y$$

$$3 \frac{\lg(4-y)}{\lg y} - 2 - \frac{\lg^2(4-y)}{\lg^2 y} = 0$$

$\lg^2 y \neq 0$,
т.к. иначе
равенство не
выполнено

Замена $t = \frac{\lg(4-y)}{\lg y}$

$$3t - 2 - t^2 = 0$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$t = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$t = \frac{3-1}{2} = 1$$

Обратная замена $\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = z$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg y} = 2$$

$$\frac{\lg(4-y)}{\lg(y)} = 1$$

$$\lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$\lg(4-y) = \lg(y^2)$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2$$

$$4-y = y^2$$

$$4-y = y^2$$

$$4 = 2y$$

$$y^2 + y - 4 = 0 \quad (*)$$

$$y = 2$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = 2$$

$$(*) \quad y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

не подходит, т.к. $y > 0$ (+)

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x = 3y$$

$$y = 3$$

$$x = 4-y$$

$$y = 2$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x = 9$$

$$y = 3$$

$$y = 2$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0 \text{ подходит}$$

Ответ: $(9; 3); (2; 2); \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2} \right)$

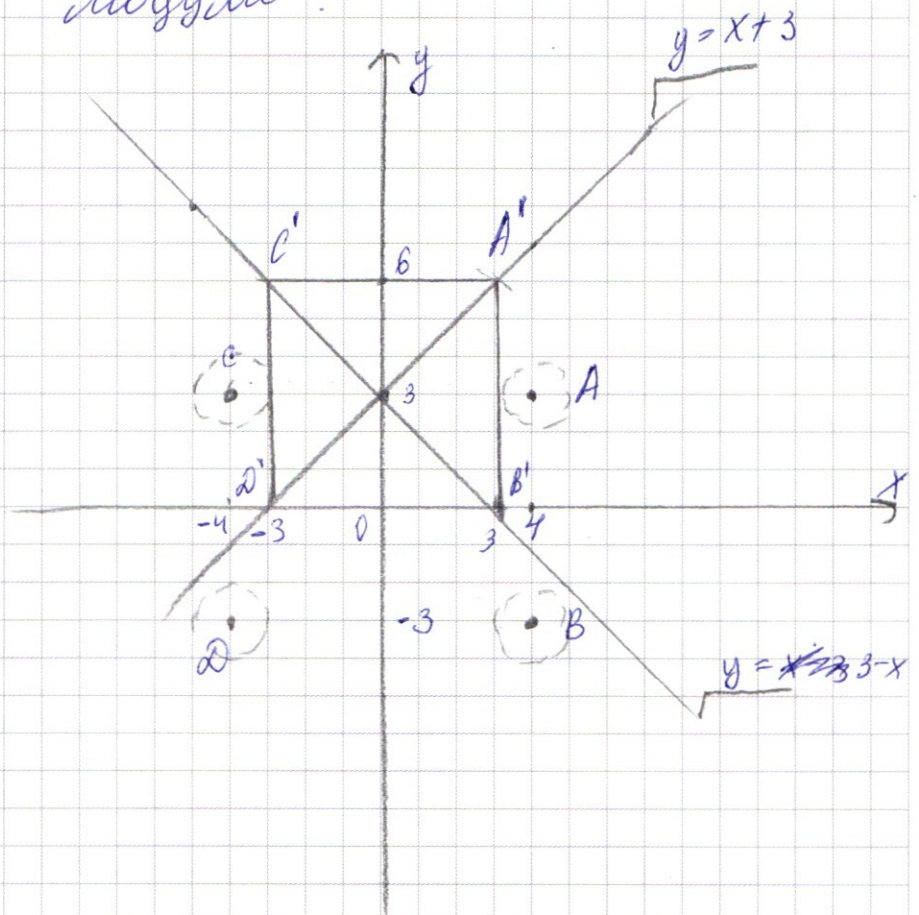
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

55

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Графиком (1) будет квадрат со стороной 6, его центр - точка $(0; 3)$, убедимся в этом, раскрыв модули:

$$\begin{cases} y > x+3 \\ y > 3-x \\ y = 6 \\ y > x+3 \\ y \leq 3-x \\ x = -3 \\ y \leq 3+x \\ y > 3-x \\ x = 3 \\ y \leq 3+x \\ y \leq 3-x \\ y = 0 \end{cases}$$



Графиком (2) является 4 окружности с центрами $(4; 3)$, $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(-4; -3)$ радиусом $\sqrt{a}$, а $a > 0$, если $a = 0$ решений вообще

ней, т.е. случай не подходит. Обозначим центры их окружностей точками $A(4; 3)$, $B(4; -3)$, $C(-4; 3)$ и $D(-4; -3)$. Решений у исходной системы будет ровно 2 если либо окр. A и C касаются квадрата, либо A и D касаются, либо наоборот. Случай когда только одна окр. касается квадрата быть не может, т.к. центры окр. - симметричны относительно оси Oy , поэтому если A касается квадрата, то и C касается; если B касается, то и D касается.

1) окр. A и C касаются, тогда $\sqrt{a} = 1$ (расстояние от точки A до прямой $x=3$) при $\sqrt{a} = 1$ окружности C и D не касаются квадрата, показано на рисунке). Других случаев, когда окр. A и C касаются квадрата быть не может, т.к. если окр. A касается $C'D'$, а $C - A'B'$, то окр. A касается $A'C'$ и решений будет как минимум 3.

2) окр. B и D касаются, тогда $\sqrt{a} = \sqrt{10}$ (расстояние между D' и D), этот случай не подходит, т.к. Окружности A и C в этом случае касаются точек A', C', B', D' и решений будет как минимум 4. Если окр. B и D касаются квадрата в точках C' и A' соответственно, то $\sqrt{a} = \sqrt{13}$ (расстояние от A' до D). Этот случай подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

так как расстояние от точки C до A' и B' равно $\sqrt{5}R$, т.е. меньше радиуса, значит A' и B' будут лежать внутри окружности, аналогично для точки A .

Тогда итоговые значения α : $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 130 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 130 \end{cases}$

Ответ: 1, 130

56.

Дано:

$$R_1 = 5; R_2 = 5$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$$

$$C \in \omega_1, D \in \omega_2$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$EF \perp CD; F \in CD; BF = BD$$

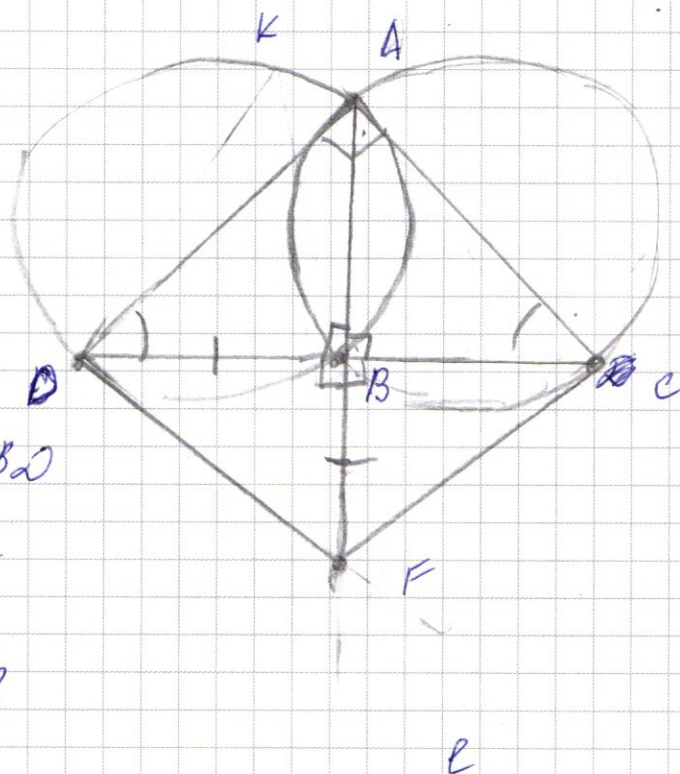
A, F — равные стороны.

$$a) EF = ?$$

$$b) BC = 6; S_{\triangle ACF} = ?$$

а) Решение

доп. постро. $K \in \omega_1, \omega_1 \cap \omega_2 = K$



1) $\triangle CKB$: $\angle CBK = 90^\circ \Rightarrow DK$ - диаметр $\Rightarrow CK = 10$

по Т. Пифагора: $DB^2 + BK^2 = DK^2 = 100$

2) $\triangle DBF$: $\angle DBF = 90^\circ$ ($DB \perp FB$ по чм.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow DF = \sqrt{DB^2 + BF^2} = DB\sqrt{2}$ ($DB = BF$ по чм.)

3) по т. о секущ. и касат.: $DF^2 = BF \cdot BK$

$2BD^2 = BD(BF + BK)$ ($BD = BF$) $\Rightarrow 2BF = BF + BK \Rightarrow$
 по чм. $\Rightarrow BK = BF$

4) п. 1) $BD^2 + BK^2 = 100 \Rightarrow BD = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

($BK = BF$ (п. 3), а $BF = BD$)

а) т.к. окружности равных радиусов, значит дуги стягиваемые хор. отрезком AB равны в обеих окружн. $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \triangle ACD$ р/б $\Rightarrow AB$ - перпендикуляр к CD через точку B , т.е. A и F лежат на одной прямой

1) т.к. $\triangle ADC$ р/б $\Rightarrow AB$ - медиана, высота, биссектриса (по ч. 1-й р/б $\triangle$) $\Rightarrow BD = BC = AB$ (медиана равна половине гипотенузы в прямоуг. $\triangle$)

2) $\triangle ABD$ прямоуг., $AB = BD$ (п. 1); $\angle ABD = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow AD$ - диаметр; (по т. Пифагора) $AB = \frac{AD}{\sqrt{2}} =$
 $= \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$ ($AB = BD$)

3) $\triangle BCF$ р/б прямоуг. ($BF \perp CD$, $BF = BD = BC$)
 $CF = \sqrt{BF^2 + BC^2} = BC\sqrt{2}$ (по Т. Пифагора) $= 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} =$
 $= 10$

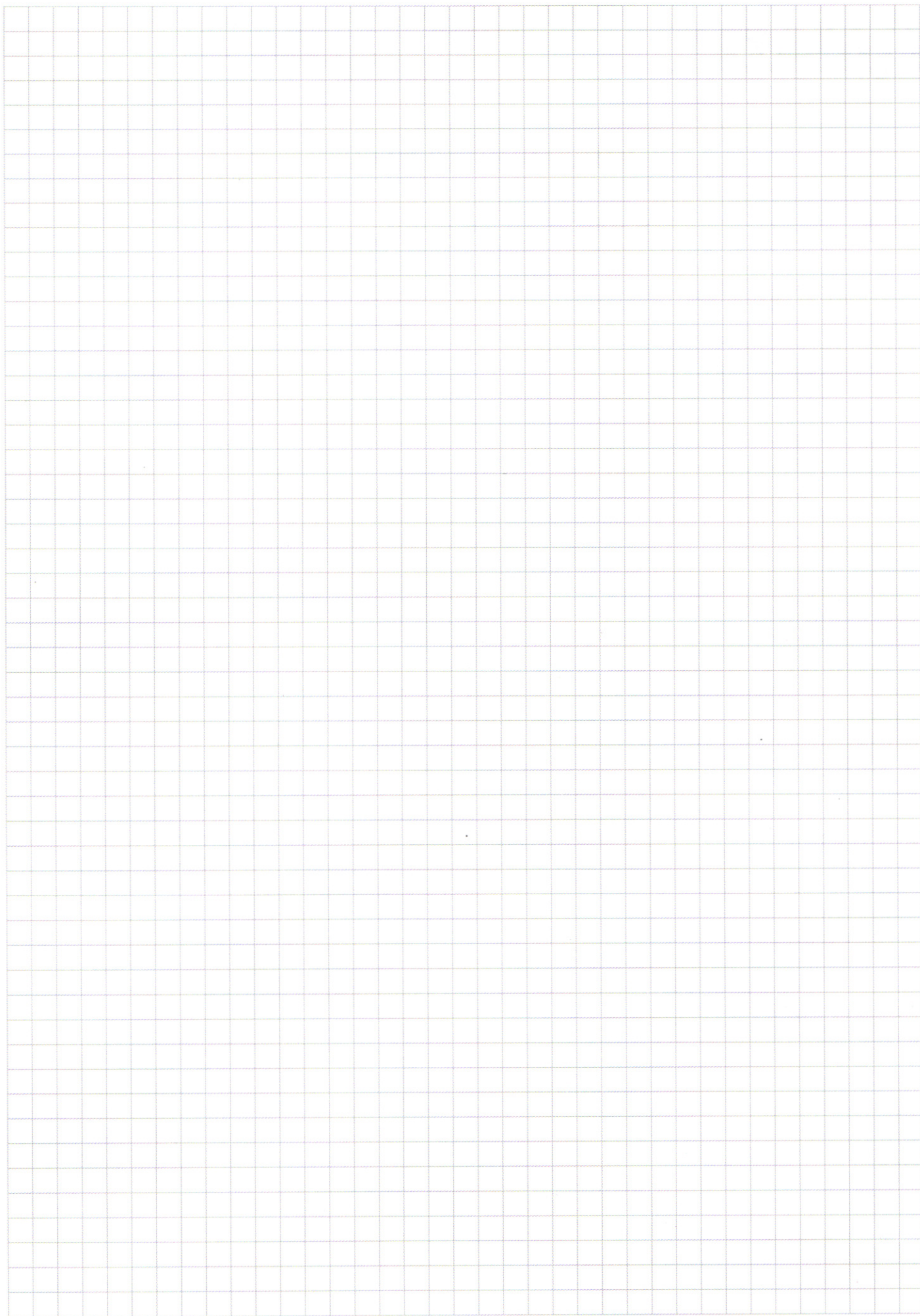
Ответ: 10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$б) 1) S_{\Delta ACF} = BC \cdot AF \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 30\sqrt{2}$$

$$AF = AB + BF = 2 BF \quad (AB = BF \text{ п. а}) = 2 \cdot 5\sqrt{2}$$

Ответ: $30\sqrt{2}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\begin{cases} 11x = \alpha + \beta \\ 3x = \alpha - \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{14x}{2} = 7x \\ \beta = \frac{14-3x}{2} = \frac{8x}{2} = 4x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &= 2y + 4 \\ &= 3y - (y - 4) = \\ &= 2y + 4 \end{aligned}$$

$$\cos(11x) - \cos(3x) + \sin(8x) - \sin(11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \cos 7x \cdot \sin(-4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) - \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$(\sin 7x - \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)) = 0$$

$$\sin 7x - \cos 7x = 0$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x = 0 \quad \left| \begin{aligned} &\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = \\ &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta \end{aligned} \right.$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = 0$$

$\sin \frac{\pi}{4}$

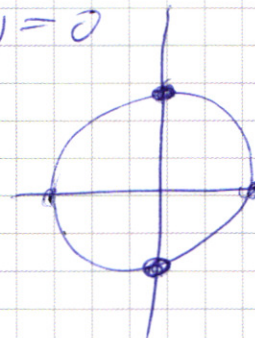
$$\sqrt{2} \sin 4x + \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x \right) = 0$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) = 0$$

$$\sin () \cdot \cos () = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$



$$\textcircled{3} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad x^2 + x(-2y-4) - 3y^2 + 12y = 0 \quad (\text{no roots})$$

$$D = (-2y-4)^2 - 4(-3y^2 + 12y) =$$

$$= 4y^2 + 16 + 2 \cdot 8y - 4(12y - 3y^2) =$$

$$= 4(y^2 + 4 + 4y - 12y + 3y^2) =$$

$$= 4(4y^2 - 8y + 4) = 4 \cdot 4(y^2 - 2y + 1) = 4 \cdot 4(y-1)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4|y-1|}{2} = \frac{2y+4+4(y-1)}{2} =$$

$$= y+2+2y-2 = 3y$$

$$x = \frac{2y+4-4(y-1)}{2} = y+2-2y+2 = 4-y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③

$$\begin{aligned} x &= 3y \\ x &= 4-y \\ \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x &= y^{2 \lg xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{4-y} \lg(4-y) &= y^{2 \lg(y) + \lg(4-y)} \\ \frac{y}{(4-y)^3 \lg(4-y)} &= y^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg(4-y)} \\ \frac{y}{(4-y)^3 \lg(4-y)} &= (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{\lg(4-y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \lg(4-y) - 2 \lg y &= \lg(4-y) \\ y \lg\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right) &= (4-y) \lg(4-y) \end{aligned}$$

⑥

$\angle CAD = 90^\circ$
 $l \perp CD$
 $B \in l, F \in l$
 $BF = BO$
 A и F — разн. сторон
 $CF - ?$

① $3375 = 25 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3^3$

$\begin{array}{r} 3375 \\ 25 \overline{) 3375} \\ \underline{87} \\ 75 \\ \underline{125} \end{array}$
 $\begin{array}{r} 135 \\ 5 \overline{) 135} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$

Если цифр. чтобы прощ. восьмизн. числа делилось на 3375, то его цифр могут
 либо 3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1
 либо 5, 5, 5, 3, 9
 Возможные цифр: 5, 3, 9, 1
 5, 3, 1

Если 5, 3, 9, 1 это $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3$
 (5) (3) (9) (1)

Если 5, 3, 3, 1 это: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2$
 (5) (3)

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 + C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 =$$

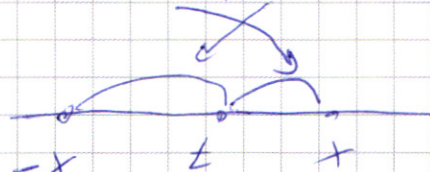
$$= C_8^3 (C_5^1 \cdot C_4^1 + C_5^3) =$$

⑤ $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$ (1) 2 решения
 $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

$a > 0$

$|t-x| + |t+x| = 6$

(1) система это сумма расстояний от точки $y-3$ до $-x$ и до $-x$, эта сумма равна $2|x|$; $|x| = 3$



$(|y|-3)^2 = a - (1)^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} -x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \end{cases}$$

$$\frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = y^{4 \lg 3y}$$

$$\Rightarrow 3y = 1$$

$$(1) \quad \frac{y^{3 \lg(4-y)}}{3^{\lg(4-y)}} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot y^{2 \lg(4-y)}$$

$$\frac{y^{3 \lg(4-y) - 2 \lg y}}{3^{\lg(4-y)}} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\lg \frac{(4-y)^3}{y^2} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

(2)

$$\Rightarrow 3^{\lg 3y} = 1 \Rightarrow \lg 3y = 0 \Rightarrow$$

$$(1) \quad x = 4-y$$

$$\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2 \lg(y(4-y))}$$

Возьмем $\lg$
от обеих частей

$$(2) \quad \lg \left(\frac{y^{5 \lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} \right) = \lg(y^{2 \lg(y(4-y))})$$

$$\lg \left(\frac{y^5}{(4-y)} \right) \lg y = \lg^2(4-y)$$

$$(3 \lg(4-y) - 2 \lg y) \cdot \lg y = \lg^2(4-y) \quad | : \lg^2(4-y)$$

$$3 \frac{\lg y}{\lg(4-y)} - 2 \frac{\lg^2 y}{\lg^2(4-y)} = 1$$

Замена $t =$

$$= \frac{\lg^2 y}{\lg(4-y)}$$

$$3t - 2t^2 - 1 = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0; (t-1)(t-\frac{1}{2}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

55.

Дано:

$$R_1 = R_2$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$$

$$C \in \omega_1, D \in \omega_2$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$E \perp CD, E \in C$$

$$BF = BD$$

A, F — разные точки от CD

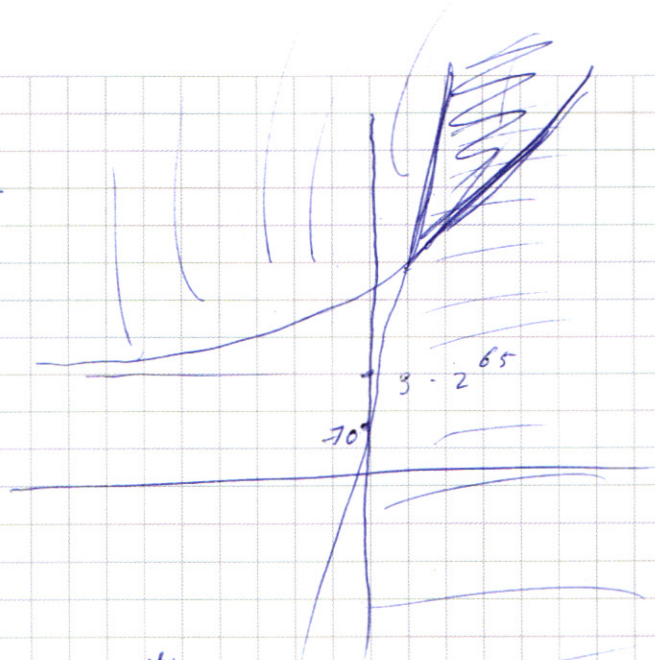
а) Найти: CF

б) $BC = 6$; S_{ACF}

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

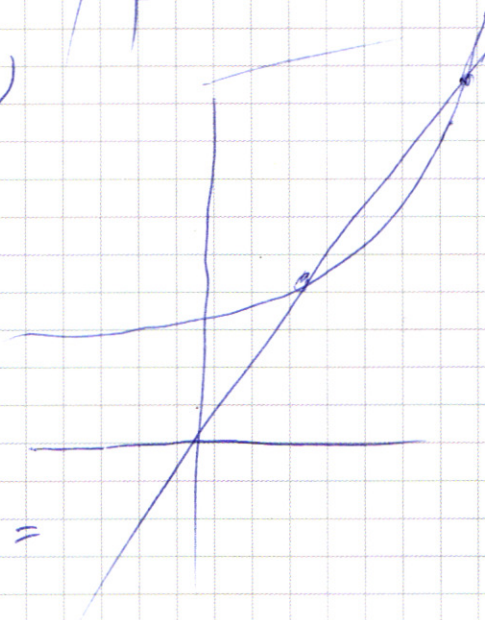
$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + 2^{64}x - x \end{cases}$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + x(2^{64} - 1)$$

$$2^x - x(2^{64} - 1) = 70 - 3 \cdot 2^{65}$$



$$\frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{3} \cdot 6 \cdot 2} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4 = 20 \cdot 28 = 560$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$$R_1 = 5 \text{ (} \omega_1 \text{)}$$

$$R_2 = 5 \text{ (} \omega_2 \text{)}$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$$

$$C \in \omega_1, D \in \omega_2$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$C \perp CD, F \in \ell$$

$$BF = BD$$

A, F с разных сторон от CD

CF — ?

$$\triangle CKB : \angle KBC = 90^\circ \Rightarrow$$

KC — diam

$$FC^2 = FB \cdot KF; (x\sqrt{2})^2 = x \cdot (y+x)$$

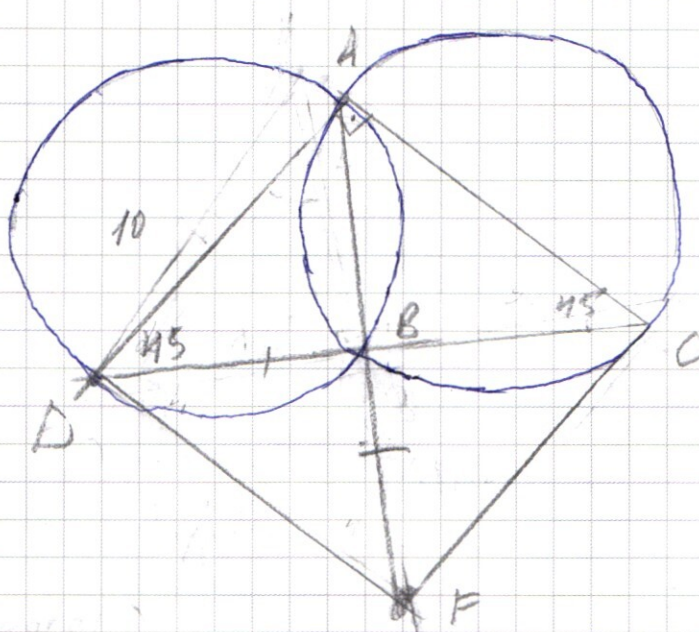
$$2x^2 = x(y+x)$$

$$x = y$$

$$\triangle KCB \text{ прямоугольный } x = \frac{KC}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

$\triangle KCF$ прямоугольный (диаметр 90)



$$FC^2 = FB \cdot FL$$

сумма расстояний от точки $y-3$ до $+x$

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \quad \text{квадрат} \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & - \text{окр.} \end{cases}$$

(1) Это уравнение показывает сумму расстояний на прямой от $y-3$ до x и от $y-3$ до $-x$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x > 0 \\ 2y-6 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x > 0 \\ y-3+x < 0 \\ y-3-x - y+3-x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x > 0 \\ -y+3+x + y-3+x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x < 0 \\ y-3+x < 0 \\ -y+3+x - y+3-x = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > x+3 \\ y > 3-x \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 3+x \\ y < 3-x \\ x = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 3+x \\ y > 3-x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < 3+x \\ y < 3-x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 40 - (2^{64} - 1)x \end{cases}$$