

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

0 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

В нашем числе могут быть только цифры 5, 3 или 9, т.к. никаких множителей, кроме 5 и 3 быть не должно, а $5 \cdot 3 = 15 > 10$, $3 \cdot 3 \cdot 3 > 10$, $5 \cdot 5 > 10$

Значит, наше число - это либо произведение 5, 5, 5, 3, 3, 3 и двух 1 (т.к. число 8-значное), либо 5, 5, 5, 3, 9 и три единицы

1) Если ~~число~~ число состоит из 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1 и 1. Тогда нужно расставить эти числа на 8 мест:
 C_8^3 - расставили пятерки; C_5^3 - расставили тройки на оставшихся 5 мест, единицы встали произвольно. Итого: $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8! \cdot 5!}{5! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = 560$

2) Если число состоит из 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1. Тогда C_8^3 - поставили три пятерки, C_5^3 - поставили три единицы на оставшихся 5 мест, осталось 2 места, для 3 и 9 - это ещё 2 варианта. Итого:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = 560 \cdot 2 = 1120$$

3) Всего способов = $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

$$\text{дз. } \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{дз: } x \geq 0$$

$$xy \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x > 0.$$

I) Если $y=0$, то в (1) ур-ии
 $0=0$, т.е. x -люб.

в (2) ур-ии $x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x=0$ или $x=4$
 не фр. дз

т.е. ответ: $(4; 0)$

далее случай $y=0$ уже будем рассматривать

II) Рассмотрим (2) ур-ие

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y-2)^2 + 8y - 4y^2 - 4 = 0$$

$$(x-y-2)^2 - (2y-2)^2 = 0$$

$$(x-y-2-2y+2)(x-y-2+2y-2) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\boxed{x=3y} \quad \text{или} \quad \boxed{x+y=4}$$

III) Если $x=3y$, подставим в (1) ур-ие:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2 \Rightarrow \frac{y^4 \lg 3y}{3 \lg 3y} = y^2 \lg 3y^2 \quad \begin{matrix} \text{т.к.} \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{y^{4 \lg 3y - \lg 3y^4}}{3^{\lg 3y}} = 1 \Rightarrow \frac{y^{\frac{4 \lg 3y - \lg 3y^4}{3y^4}}}{3^{\lg 3y}} = 1 \Rightarrow \frac{y^{\lg 3}}{3^{\lg 3y}} = 1 \Rightarrow$$

т.к. $a^{\lg b} = b^{\lg a}$, то

$$3^{\lg y} = 3^{\lg 3y}$$

$$3^{2 \lg y} = 3^{\lg 3y}$$

$$3^{\lg y^2} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow \lg y^2 = \lg 3y \Rightarrow y^2 = 3y$$

$$y = 0 \text{ или } y = 3 \Rightarrow$$

радикали $x = 3y = 9$

ответ: (9; 3)

IV) Если $x + y = 4 \Rightarrow x = 4 - y$

$$\left(\frac{y^2}{4 - y} \right)^{\lg(4 - y)} = \frac{y^{2 \lg(4 - y) / (4 - y)}}{y^{2 \lg(4 - y) / (4 - y)}} \Rightarrow \frac{y^{2 \lg(4 - y)}}{(4 - y)^{\lg(4 - y)}} = y^{2 \lg(4 - y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^{3 \lg(4 - y)}}{(4 - y)^{\lg(4 - y)}} = y^{2 \lg y} \text{, т.к. } y \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{y^3}{4 - y} \right)^{\lg(4 - y)} = y^{2 \lg y}$$

Пусть $\lg y = m \Rightarrow 10^m = y$ и $\lg(4 - y) = n \Rightarrow 10^n = 4 - y$.
тогда р-во переписывается как

$$\left(\frac{10^{3m}}{10^n} \right)^n = (10^{2m})^m \Rightarrow 10^{(3m - n)n} = 10^{2m^2} \Rightarrow (3m - n)n = 2m^2 \Rightarrow$$

$$2m^2 + n^2 - 3mn = 0$$

$$(2m-n)(m-n)=0$$

$$m=n \quad \text{или} \quad 2m=n.$$

⇓

$$\lg y = \lg(4-y)$$

$$y = 4-y$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

⇓

$$2\lg y = \lg(4-y)$$

$$\lg y^2 = \lg(4-y)$$

$$y^2 = 4-y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \quad \text{не ур.}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

⇓

$$x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

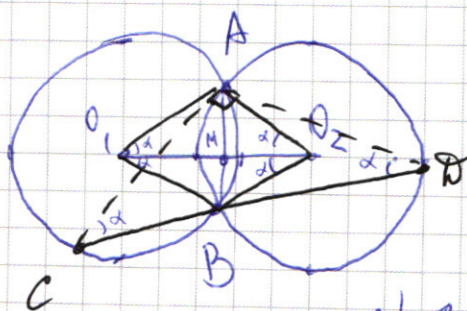
Примеч.

$$\begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

реш.

а)



$$1) AB \perp O_1O_2 = M$$

$$2) \text{Так как } \angle AO_2M = \alpha \Rightarrow \angle BO_2M = \alpha \quad (\text{т.е. } \triangle AO_2B - \text{равн.}) \Rightarrow$$

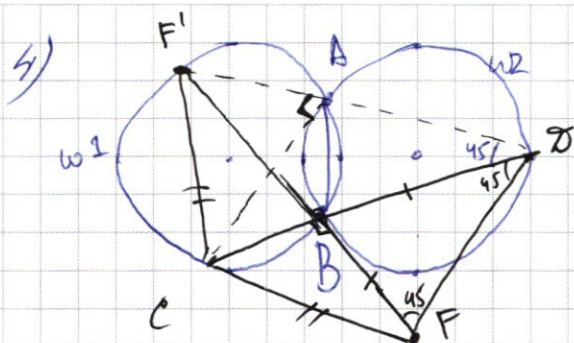
$$\Rightarrow \angle AOB = \frac{1}{2} \angle AO_2B = \alpha.$$

$$3) AO_1 = AO_2 = 5 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle O_2O_1B = \alpha \quad \text{и} \quad \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AO_1B = \alpha \Rightarrow$$

$$\angle AOB = \angle ACB = \alpha \quad \text{и} \quad \triangle AOB - \text{равн.} \Rightarrow \boxed{\alpha = 45^\circ}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\triangle CAF$ - прямоугол. и $\angle B$
 $\triangle BFD$ - прямоугол. и $\angle D \Rightarrow$

$$\triangle BDF \sim \triangle AFC \Rightarrow$$

$$\frac{BD}{AF} = \frac{BF}{AC} = \frac{FD}{FC}$$

$$\Downarrow$$

$$BD \cdot FC = AF \cdot FD$$

$BD \cdot FC$ - это степень т. D относительно окр. ω_1

Проведем FA до пересеч. с ω_1 в т. F' , тогда $FA \cdot FF' = BD \cdot FC$, т.к. это ст. т. D от-но окр. $\omega_1 \Rightarrow$

$$FF' = FF$$

5) $\angle CFF' = \angle CBF = 45^\circ \Rightarrow \angle F'FF = 90^\circ$ и $\triangle F'FF$ - $\angle$ т.к. $\angle F'FF = 90^\circ$ и $FF' = FF$, то $\angle F'FF = \angle FFF' = 45^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle BFD = 45^\circ$, то F, B, F' - одна прямая.

6) $\triangle CFF' = \triangle CFF$ по 2 сторонам / $FF' = FF$ и CF - общая / и углу ($\angle CFF' = \angle CFF = 45^\circ$) $\Rightarrow CF = CF'$

7) $\angle CAF = 90^\circ \Rightarrow \angle CAF' = 90^\circ \Rightarrow CF'$ - диаметр окр. $\omega_2 \Rightarrow$
 $CF' = 2R = 10 = CF$

Ответ: $CF = 10$.

8) $BC = 6 \Rightarrow BF = 8$ из $\triangle CBF$ - прямоугол.; $BF = BD = 8 \Rightarrow$
 $FF' = FF = 8\sqrt{2}$ (из $\triangle BDF$); $CF = 6 + 8 = 14 \Rightarrow AD = AC = 7\sqrt{2}$
 (из $\triangle ACF$) $\Rightarrow AF = 8\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

$AC \parallel DF$, т.к. $AC \perp DF'$ и $DF \perp DF' \Rightarrow$

$ACFD$ -трап. $\Rightarrow S_{ACFD} = \frac{(AC+DF) \cdot AD}{2}$ ^{высота}

$$= \frac{(7\sqrt{2} + 8\sqrt{2})}{2} \cdot 7\sqrt{2} = \frac{15\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{2} = 15 \cdot 7 = 105$$

$$S_{ADF} = \frac{7\sqrt{2} \cdot 8\sqrt{2}}{2} = 7 \cdot 8 = 56$$

$$S_{ACF} = S_{ACFD} - S_{ADF} = 105 - 56 = 49$$

Ответ: $S_{ACF} = 49$.

Уб. $\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$

1) Рассмотрим модуль в (1) р-е в зависимости от знака нормированной координаты

1) $y-3-x + y-3+x = 6$

$y=6$

$y > 0$

, если $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x \geq 0$

$6-3-x \geq 0$

$3 \geq x$

$6-3+x \geq 0$

$3+x \geq 0$
 $x \geq -3$

Теперь в (2) р-е:

$(-x-4)^2 + (y-3)^2 = a \Rightarrow (x+4)^2 + (y-3)^2 = a$

$(x+4)^2 + 3^2 = a \Rightarrow x^2 + 8x + 25 = a$

$x^2 + 8x + (25-a) = 0$ - имеет корни $D \geq 0$

$64 - 4(25-a) \geq 0$

$64 - 100 + 4a \geq 0$

$a \geq \frac{64-100}{-4} = 16$

$x^2 + 8x + (25-a) = 0$ - имеет ровно 2 корня $\Rightarrow$

$x > 0$; $64 - 4(25-a) > 0$

$64 - 100 + 4a > 0$

$a > 9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $y-3-x-y+3-x=6$

$x=-3$

, если $y-3-x \geq 0$ и $y-3+x < 0$

~~$y \leq 6$~~ $y \geq 0$

$y-6 < 0$

$y < 6$

$y \in [0; 6)$

т.е. при $y \in [0; 6]$ $x = -3$.

3) $-y+3+x+y-3+x=6$

$x=3$

, если $y-3-x < 0$ и $y-3+x \geq 0$

$y-6 < 0$

$y \geq 0$

$y \in [0; 6)$

4) $-y+3+x-y+3-x=6$

$y=0$

, если

$y-3-x < 0$

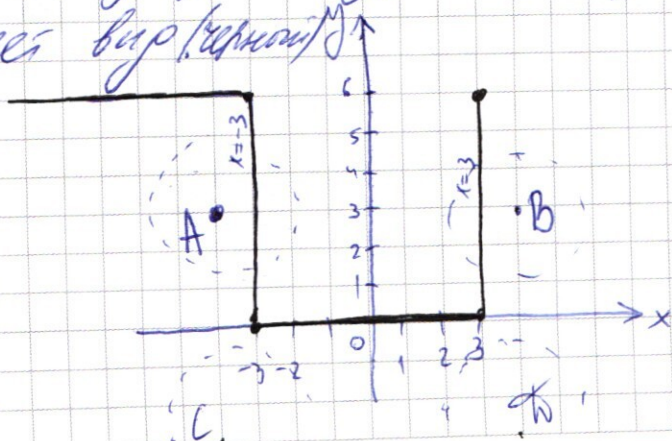
и $y-3+x < 0$

$-3 < x$

$x < 3$.

$x \in (-3; 3)$

Значит, график ур-ие $|y-3-x|+|y-3+x|=6$
имеет вид (смотри)



II) во (2) p -ве

если x и $y > 0$, то график - это окр. с ц. в т. $(4; 3)$ и $R = \sqrt{10}$

если $x > 0, y < 0$ - с ц. в т. $(4; -3)$ и $R = \sqrt{10}$

если $x < 0, y > 0$ - с ц. в т. $(-4; 3)$ и $R = \sqrt{10}$

если $x < 0$ и $y < 0$, то окр. с ц. в т. $(-4; -3)$ и $R = \sqrt{10}$

т.е. график - это четыре равные окружности с центрами в соответствующих точках.

Заметим, что если $R > 1$, то окр. с ц. в т. А пересек. с прямой $x = -3$ в 2-х точках и окр. с ц. в т. В - с прямой $x = 3$ в 2-х точках. $\Rightarrow R \leq 1$.

Если $R < 1$, то окр. с ц. в т. А и В - не пересек. с черным графиком, а окр. с ц. в т. С и D - тоже не пересек. $\Rightarrow$ Орешицкий.

Значит, $R = 1$, тогда окр. С и D - не пересек, а окр. А и В - касаются ровно в одной точке $\Rightarrow$

$$a = \pm \sqrt{R} = \pm 1$$

Ответ: $a = \pm 1$

~~$$\text{дд. } \cos 4x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$~~

~~$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$~~

~~$$\cos^2 2 = \frac{1 + \cos 4x}{2}; \quad \sin^2 2 = \frac{1 - \cos 4x}{2}$$~~

~~$$\frac{1 + \cos 4x}{2} - \frac{1 + \cos 6x}{2} - \frac{1 - \cos 22x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$~~

~~$$2 \cos 22x + \cos 6x = 2 \sqrt{2} \cos 14x$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

случ.
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Пусть $2^x + 3 \cdot 2^{65} = m$, а $70 + (2^{64} - 1)x = n$, тогда

$m > y \geq n$ и при целых x , m и n тоже целые, поэтому мы сможем брать ~~любые~~ $y = n-1; n-2; \dots, m+1$ - $m-n$ вариантов для каждого m и n .

1) При $x \leq 0$ $2^x + 3 \cdot 2^{65} > 0$, а $(2^{64} - 1)x + 70 < 0$, т.е.
 $m < n$ $\Rightarrow$ $x > 0$ (т.к. при $x \leq 0$ $m < n$)

~~или~~

дд. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x.$

$$\begin{aligned} \cos \alpha - \sin \alpha &= \cos \alpha - \cos(90^\circ - \alpha) = +2 \sin 45^\circ \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} \cdot \sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - \alpha) \end{aligned}$$

Значит, $(\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 11x) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 3x)) / (\sqrt{2} \cdot \cos 4x) =$
 $\sin^2(45^\circ - 11x) + \sin^2(45^\circ - 3x) - 2 \cdot \sin(45^\circ - 11x) \cdot \sin(45^\circ - 3x) =$
 $= \cos^2 4x$

$$\left(\frac{1 - \cos(90^\circ - 22x)}{2} \right) + \frac{1 - \cos(90^\circ - 6x)}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(90^\circ - 14x) - \cos(8x)) = \cos^2 4x$$

$$1 + \frac{\sin 22x + \sin 6x}{2} - \sin 14x + \cos 8x = \cos^2 4x$$

$$1 - \sin 14x \cdot \cos 8x - \sin 14x + \cos 8x = \cos^2 4x.$$

$$\underbrace{(\cos 8x + 1)}_{\in [0, 2]} \underbrace{(1 - \sin 14x)}_{\in [0, 2]} = \underbrace{\cos^2 14x}_{\in [0, 1]}$$

$$\frac{(\cos 8x + 1)}{(1 - \sin 14x)} = \frac{(1 - \sin 14x)}{(1 + \sin 14x)}$$

$$\frac{(1 - \sin 14x)}{(\cos 8x + 1 - 1 - \sin 14x)} = 0$$

$$1 = \sin 14x \quad \text{или} \quad \cos 8x - \sin 14x = 0$$

$$14x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 8x - \cos(14x + 90^\circ) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$-2 \sin\left(\frac{90^\circ - 6x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{22x - 90^\circ}{2}\right) = 0$$

$$\sin(45^\circ - 3x) = 0 \quad \text{или} \quad \sin(11x - 45^\circ) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$11x - \frac{\pi}{4} = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$11x = \frac{\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z} \quad \text{или}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или}$$

$$x = \frac{\pi}{44} + \frac{\pi m}{11}, m \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^{k+\lg 9} = y^{\lg 3y}$

1) $y=0$ ~~не подходит~~
 $x=0$ ~~не подходит~~

2) $y^{\lg 9} = 3^{\lg 3y}$
 $9^{\lg y} = 3^{\lg 3y}$
 $3^{2\lg y} = 3^{\lg 3y}$
 $2\lg y = \lg 3y$
 $\lg y^2 = \lg 3y$
 $y^2 = 3y$
 $y=0$ ~~не подходит~~
 $x=0$ ~~не подходит~~
 $y=3$
 $x=9$

II) $x+y=4$
 $x=4-y$
 $\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y)^2}$
 $\frac{y^{5\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg(4-y)^2}$
 $\frac{y^{5\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{\lg y} \cdot y^{2\lg(4-y)}$
1) $y=0$ ~~не подходит~~ $x=4$ - не подходит
2) $y \neq 0$
 $y^{\lg(4-y)^3} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y}$
 $y^{\lg(4-y)^3} = y^{\lg y^2} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$
 $y^{\lg\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)} = (4-y)^{\lg(4-y)}$

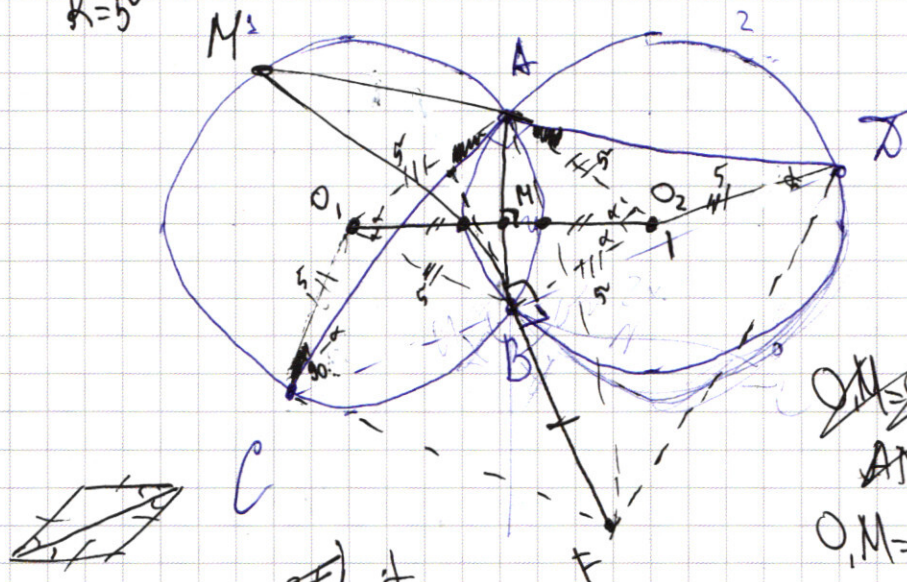
$(4-y)^{3\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y}$
 $(4-y)^{3\lg y - \lg(4-y)} = y^{2\lg y}$
 $\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$

$$R=5$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 45^\circ \\ \alpha &= 45^\circ \\ AC &= AD \end{aligned}$$

$$O, A, O_2 \text{ - коллинеарны}$$

$$\angle O, A, O_2 = 90^\circ$$

$$OA = AO_2 = O_2B = BO_1 = 5 \Rightarrow$$

$$O, A, O_2, B \text{ - вершины ромба} \Rightarrow$$

$$O, M = O_2, M$$

$$AM = MB$$

$$AC = AD$$

$\triangle O, A, O_2 \sim \triangle CAD \Rightarrow$ сделаем гомот. с центром в O, A и O_2, A и C, A и D, A тогда $O_1 \rightarrow C; O_2 \rightarrow D$

$$\triangle BDF \sim \triangle ACF \quad p \parallel n \perp L$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BF}{AC} = \frac{DF}{DC}$$

$$BD \cdot DC = DF \cdot AD \Rightarrow$$

$$DF = DM \quad (\text{из гомот. с центром в } A)$$

$$\alpha = 45^\circ \quad AC = AD$$

$$\triangle ACD \sim \triangle BDF$$

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DF}{DC}$$

$$\sin \angle ABD = \sin \angle ACD$$

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ABD} = \frac{\sin \angle DCF}{\sin \angle CDF}$$

$$\frac{\sin \angle F'CD}{\sin \angle CDF} = \frac{\sin \angle DCF}{\sin \angle CDF}$$

$$BD \cdot DC = AD \cdot DF$$

$$DF = DF'$$

$$FF' \text{ - ортогональна к } AC$$

$$CF = CF' \quad BF = BF' = BD \Rightarrow$$

$$\angle F'DF = 90^\circ \quad (\text{из гомот. с центром в } A)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$3375 \div 5 = 675$$

$$675 \div 5 = 135$$

$$135 \div 5 = 27$$

$$27 \div 3 = 9$$

$$9 \div 3 = 3$$

$$3 \div 3 = 1$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

1) 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1

2) 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1

Или 0.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 5 = 10 \cdot 56 = 560$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 2 = 560 \cdot 2 = 1120$$

$$\Sigma = 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680.

№2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$\cos - \cos = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin - \sin = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y \lg \frac{(4-y)^3}{y^2} = (4-y) \lg(4-y)$$

$$\left(\frac{y}{4-y} \right)^{\lg(4-y)} = y^2 \lg(4-y) y$$

$$\frac{(4-y)^{3 \lg y}}{y^{2 \lg(4-y)}} = (4-y) \lg(4-y)$$

$$(4-y)^{3 \lg y} = (4-y) \lg(4-y) y^{2 \lg(4-y)}$$

$$(4-y)^{3 \lg y} = y^2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$(4-y)^{3 \lg y} = y^2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

Х+у=4
x=4-y>0
xy<4

$$\text{д3.} \left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \right.$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$x > 0$
 $y > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

~~$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$~~

~~$$y^{5 \lg x} =$$~~

$$y^{5 \lg x} = (xy^2)^{\lg x} + y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

~~$$x^{\lg x} = x^{\lg 10}$$~~

$$(x - y - 2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy + 4y - 4x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = (x - y - 2)^2 - 4y^2 - 4 + 8y =$$

$$= (x - y - 2)^2 - (2y - 2)^2 = 0$$

$$(x - y - 2 - (2y - 2))(x - y - 2 + (2y - 2)) = 0$$

$$(x - y - 2 - 2y + 2)(x - y - 2 + 2y - 2) = 0$$

~~$$x - 3y = 0$$~~ $(x - 3y)(x + y - 4) = 0$

$$x = 3y$$

или

$$x + y = 4$$

д3 $x > 0$
 $y \geq 0$
 $\lg y = k$

~~$$\lg y = k$$~~

~~$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$~~

$$\left(\frac{y^5}{3y} \right)^{\lg 3y} = y^{\lg(xy)^2} = y^{\lg 9y^4}$$

~~$$\left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$~~

$$\frac{(y^4)^{\lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = \frac{y^{4 \lg 3y}}{3^{\lg 3y}} = \frac{y^{\lg 81y^4}}{3^{\lg 3y}}$$

~~$$\lg y = t$$~~

~~$$\lg 3y = t + \lg 3$$~~

$$\lg 3y^2 = \lg 3 + 2 \lg y = 2t + \lg 3$$

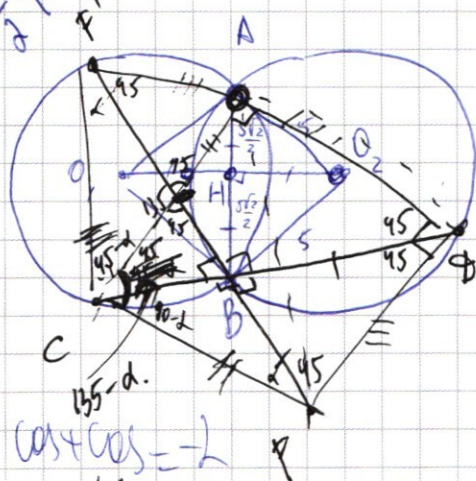
$$\frac{y^{\lg 81y^4}}{3^{\lg 3y}} = y^{\lg 9y^4} \quad \lg 9y^4 = k$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14. $\sin 4x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2} (\cos(4x-4x) - \cos(4x+4x)) = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 8x) = \frac{1}{2} (1 - \cos 8x)$

$\sin 4x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 8x) = \frac{1}{2} (1 - \cos 8x)$

$\sin 4x \cdot \sin 4x = \frac{1}{2} (\cos 0 - \cos 8x) = \frac{1}{2} (1 - \cos 8x)$



$AB = 5\sqrt{2}$

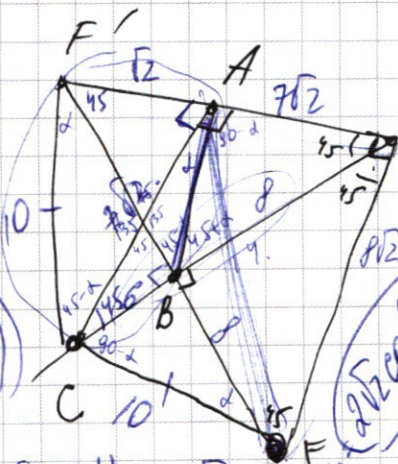
$O_1H = \frac{5\sqrt{2}}{2}, O_2H = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$O_2A', O_2B - \text{кас. к } \omega,$
 $O_1B', O_1A - \text{кас. к } \omega_2$

$\Rightarrow \omega, \omega_2$

$AC - \text{диам. } \angle CFI = 90^\circ$

$\triangle CFI \sim \triangle CFI$



$2AO^2 = 14^2$
 $AO^2 = \frac{14^2}{2} = 7 \cdot 7 \cdot 2$
 $AO = 7\sqrt{2} = AC$

$AB = 5\sqrt{2}$
 $R = 5$

$F'C = d = 10$

$\cos 4x - \cos(4x) =$
 $= -2 \sin 4x \cdot \sin(4x)$
 $= -2 \sin 4x \cdot \sin(4x)$

$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$

$\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 11x) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 11x) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$

$2 \sin \left(\frac{90^\circ - 11x - 45^\circ + 3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{90^\circ - 11x - 45^\circ + 3x}{2} \right) = \cos 4x$

$2 \sin \left(\frac{-11x + 3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{90^\circ - 11x - 45^\circ + 3x}{2} \right) = \cos 4x$

$-2 \sin 4x \cdot \cos(45^\circ - 7x) = \cos 4x$

$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 4x$

$\sin 4x \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 4x$

$\frac{1}{2} (\cos(45^\circ - 3x) - \cos(11x - 45^\circ)) = \frac{1}{2} \cos 4x$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - x)$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 11x) - \sqrt{2} \cdot \sin(45^\circ - 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\sin(45^\circ - 11x) - \sin(45^\circ - 3x) = \cos 14x$$

$$\cos(45^\circ + 11x) - \cos(45^\circ + 3x) = \cos 14x$$

$$\cos(45^\circ + 11x) - \cos 14x = \cos(45^\circ + 3x)$$

$$+ 2 \sin\left(\frac{45^\circ + 25x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x - 45^\circ}{2}\right) = \sin(45^\circ - 3x)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \cos 45^\circ\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x + \sin 45^\circ\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 14x$$

$$\cos(11x + 45^\circ) \cos 45^\circ$$

$$- 2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = 2 \cos 14x$$

$$\sqrt{2} (\sin 7x \sin 4x - \sin 4x \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\sin 4x \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(7x - 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$2 \sin 4x \cdot \sin(7x - 45^\circ) = \cos 14x$$

$$+ 2 \sin \frac{p}{2} \cdot \sin \frac{p-q}{2} = \sin(p-q)$$

$$\sin(p-q) \cdot \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) = \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin(p-q) = \cot\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

$$\sin(p-q) = \cot\left(\frac{p+q}{2}\right) \Rightarrow p-q = \arccot\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

2) $1 + (y-3)^2 = a$
- 2 перм
 $y^2 - 6y + 10 = a$
 $\Delta = 36 - 4(10-a) = 0$
 $a = 4$
 $x = \pm y$
 $y = 3$
 $y = 6$
 $y = 0$

$|y-3| = 3$
 $y = 6$
 $y = 0$

$x < 0, y \geq 0$
 $x \geq 0, y \geq 0$
 $x \geq 0, y < 0$
 $x < 0, y < 0$

$x = 3, y = 0$
 $x = 0, y = 6$

$a < \sqrt{3}$
 $a > 1$
 $a \in (1, \sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1)$

Ответ: $a \in (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$

1) $y-3-x+y-3+x=6$
 $y=6$
 $|x| \geq 3$

2) $y-3-x-y+3-x=6$
 $x=-3$
 $x=12$
 $x=\sqrt{12}$
 $x=-\sqrt{12}$

3) $-y+3+x+y-3+x=6$
 $x=3$

4) $-y+3+x-y+3-x=6$
 $y=0$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
 $x \leq -3$

$y^{\log y} = \frac{y^{\log y}}{y^{\log y}} = 1$
 $y^{\log y} = \frac{y^{\log y}}{y^{\log y}} = 1$
 $y^{\log y} = \frac{y^{\log y}}{y^{\log y}} = 1$

$$3x=2$$

$$\cos \alpha - \cos \beta + \sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$11x=p$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x - \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2} \cdot \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2} +$$

$$\sin = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{2^x + 3 \cdot 2^{65}}{m} < y \leq \frac{70 + (2^{64} - 1)x}{n}$$

Если x — целое и $m \leq n$, то мы можем взять $y = n$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$+ \frac{1 - \cos(\alpha + \beta)}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta) + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1$$

$$(1 - \cos(\alpha + \beta)) \left(\frac{\cos(\alpha + \beta) + 1}{n - m} \right) = 2 \sqrt{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$(1 - \cos(\alpha + \beta)) = \sqrt{2} \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

если $x < 0$, т.е. $x \leq -1$

$$2^x > 0 \quad 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$(2^{64} - 1) > 0 \quad x < 0 \Rightarrow (2^{64} - 1)x < 0$$

⊗

$$2) \quad x = 0. \quad 1 + 3 \cdot 2^{65} = 70 \quad \otimes$$

$$3) \quad x \geq 64. \quad 2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 2^{64} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{64}(1 + 6) = 7 \cdot 2^{64}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64}x - x$$

$$2^{64}(6 - x) \leq 70 - x - 2^x$$

$$y - y > 0$$

$$\left(\frac{y^3}{4 - y} \right)^{1/3} = \left(\frac{y^2}{1} \right)^{1/3}$$

$$3mn - n^2 = 2m^2$$

$$2m^2 + n^2 = 3mn$$

$$(m - n)^2 + m^2 - mn = 0$$

$$\left(\frac{10^{3m}}{10^n} \right)^n = (10^{2m})^n$$

$$(10^{3m-n})^n = 10^{2m^2}$$

$$(m - n)^2 + m(m - n) = 0$$

$$10^m + 10^n = 4$$

$$6 \cdot 2^{65} = 6 \cdot 2^{64} \cdot 2 = 12 \cdot 2^{64}$$

$$(m - n)(2m - n) = 0$$

$$1) \quad m = n$$

$$2) \quad 2m = n$$

$$(m - n)(m + n) = 0$$

$$(m - n)(m - n + m) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 ч.

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} > 70 + (2^{64} - 1)x$$

если $x \geq 6$.

$$2^{6+k} + 3 \cdot 2^{65} > 3 \cdot 2^{65} + 2^{64}k - 6 - k + 70$$

$$2^{6+k} > 2^{64}k - k + 64.$$

при $k < 58$ (х). $2^{6+k} > 2^{64}k$ $\sin - \sin = \cos$.

~~х~~ $k \geq 59$.

если $x < 6$.

~~х~~

$$2^x > 2^{64}x.$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

при $x > 65$ х.

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$-2 \sin 4x \cdot \cos \left(\frac{90^\circ - 14x}{2} \right) = \cos 14x.$$

$$\frac{1 - \tan^2 5.5x}{1 + \tan^2 5.5x}$$

$$\frac{1 - \tan^2 1.5x}{1 + \tan^2 1.5x}$$

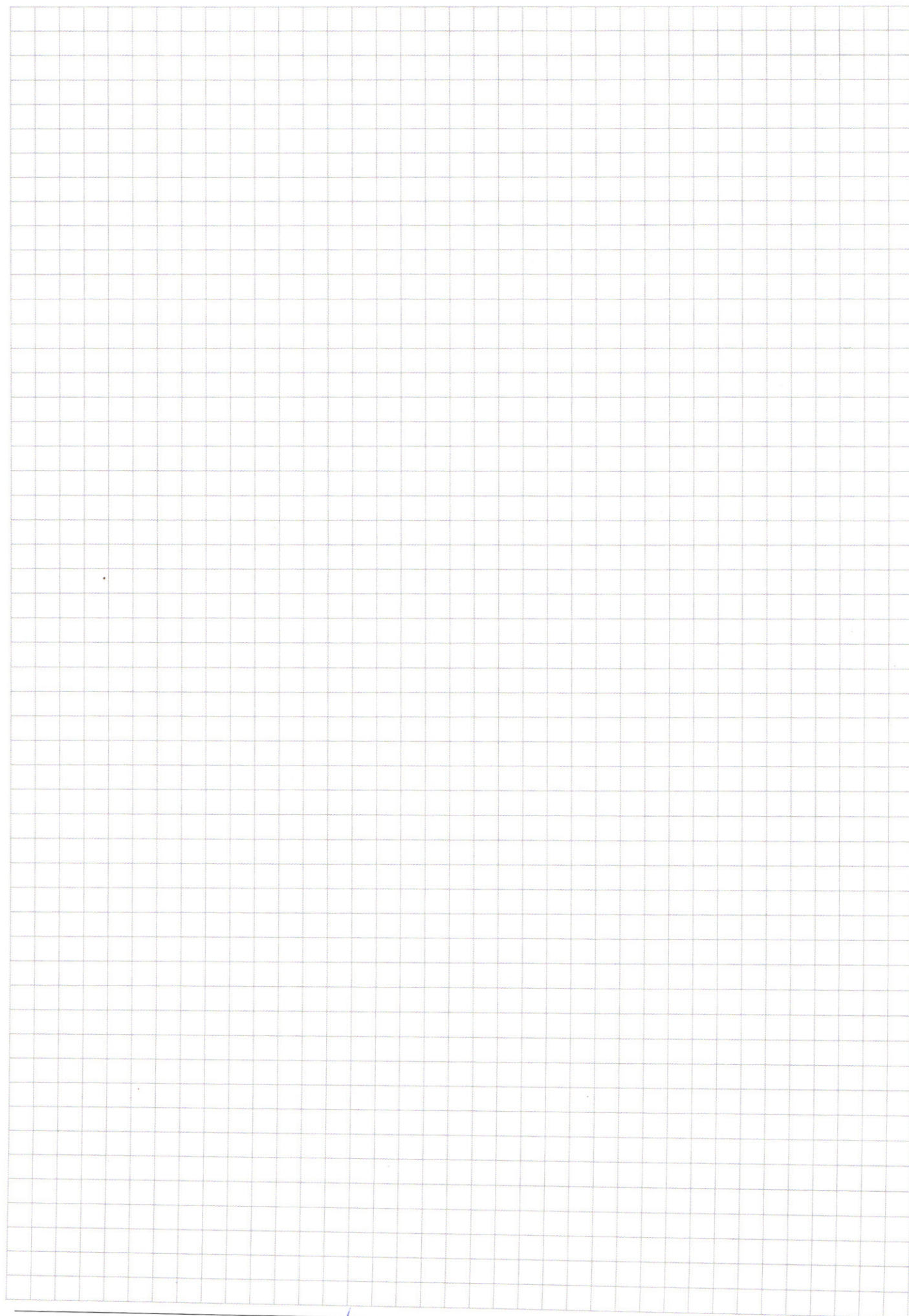
$$\frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

$$\frac{2 \tan 5.5x}{1 + \tan^2 5.5x} + \frac{2 \tan 1.5x}{1 + \tan^2 1.5x} = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\frac{1 - \tan^2 5.5x - 2 \tan 5.5x}{1 + \tan^2 5.5x}$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin 14x}{2}} = \cos 14x.$$

$$(\cos 8x + 1) (1 - \sin 14x)$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)