

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

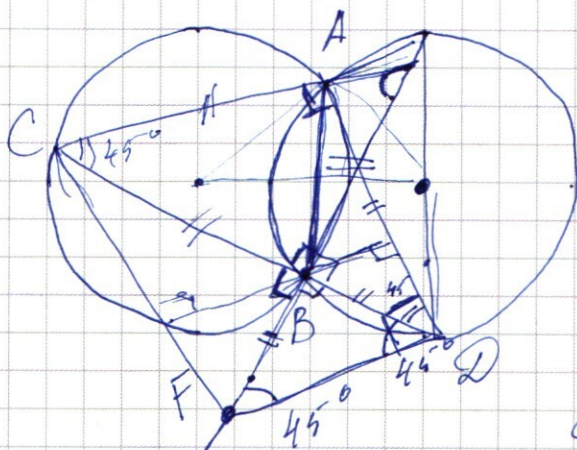
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

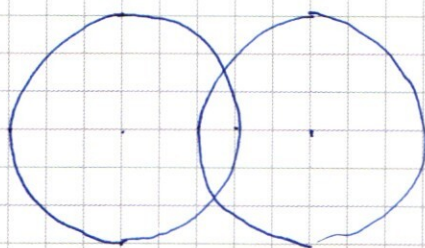
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

85



$$R = 5.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 \sqrt{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 42.$$



$$\cos \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

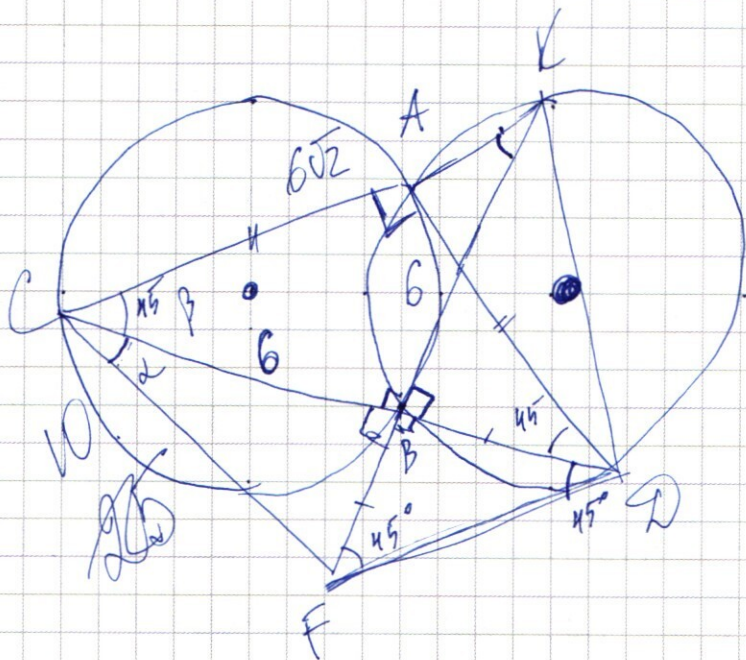
$$\sin \beta = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



$$-2 \sin(4x) \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x.$$

$$-2 \sin(4x) \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x.$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (\cos(-3x - \frac{\pi}{4}) - \cos(11x + \frac{\pi}{4})) = \cos 14x$$

$$= (\cos(3x + \frac{\pi}{4}) - \cos(11x + \frac{\pi}{4})) = \cos 14x.$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(3x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(11x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(11x) \right) = \cos 14x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin(7x) \sin(4x) + 2 \sin(-4x) \cos(7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin(7x) \sin(4x) - 2 \sin(4x) \cos(7x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\sin(7x) - \cos(7x))$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ -10 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ -5 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \quad 8!$$

$$9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \quad 8!$$

$$2 \cdot 8! =$$

$$5! = 120; \quad 6! = 720; \quad 8! = 5760$$

$$2 \sin(-4x) \cos(7x) = \frac{720}{5760} = \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) \cos(7x) = \cos 14x \quad N2.$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin 3x - \cos 3x - (\sin 11x - \cos 11x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 14x$$

$$2 \sin(-4x) \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) \cos(7x) = \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) \cos(7x) = 2 \cos^2(7x) - 1$$

$$\cos^2(7x) - \sin^2(7x)$$

$$\cos^2(7x) - \sin^2(7x) + 2 \sin(4x) \cos(7x) = 0$$

$$2 \cos^2(7x) - 1 + 2 \sin(4x) \cos(7x) = 0$$

$$2 \cos(7x) \left(\cos(7x) + \sin(4x) \right) - 1 = 0$$

$$2 \cos(7x) \left(\cos(7x) + \sin(4x) \right) = 1$$

$$\cos(7x) \left(\cos(7x) + \sin(4x) \right) = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin(-4x) \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) \left(\cos(7x) \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(7x) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \sin(4x) (\sin 7x + \cos 7x) = \cos 14x$$

$$-\sqrt{2} \sin(4x) \sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

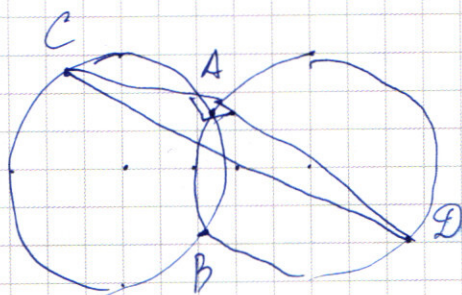
$$-2 \sin(4x)$$

$$-2 \sin(4x) \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

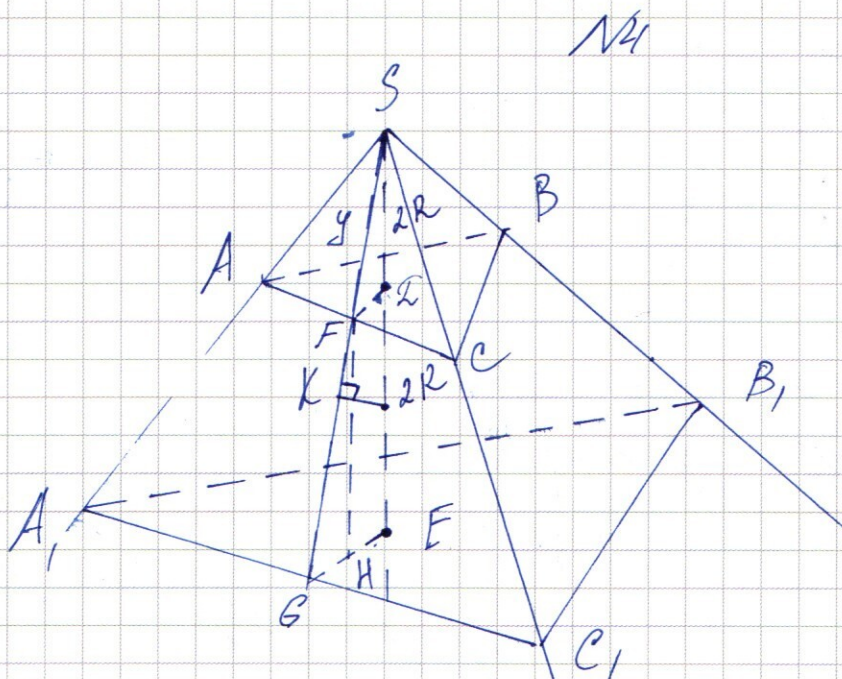
$$-2 \sin(4x) \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 \sin^2(7x)$$

$$2 \sin^2(7x) - 2 \sin(4x) \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$$

$$2 \sin^2(7x) - 2 \sin(4x) \left(\sin(7x) \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos(7x) \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 1 = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $KD = FD = x$, тогда $GE = 2x$; $CH = x$,
и $FG = \sqrt{x^2 + 4R^2}$. Если $SF = y$, то.

$$\frac{y}{y + \sqrt{x^2 + 4R^2}} = \frac{x}{2x}$$

Отсюда видно, что $\triangle SFD = \triangle SGE$ по
катету ($GH = FD = x$) и ~~по~~ острому
углу ($FD \parallel GE$). Значит, $SD = FH = DE = 2R$.



черновик



чистовик

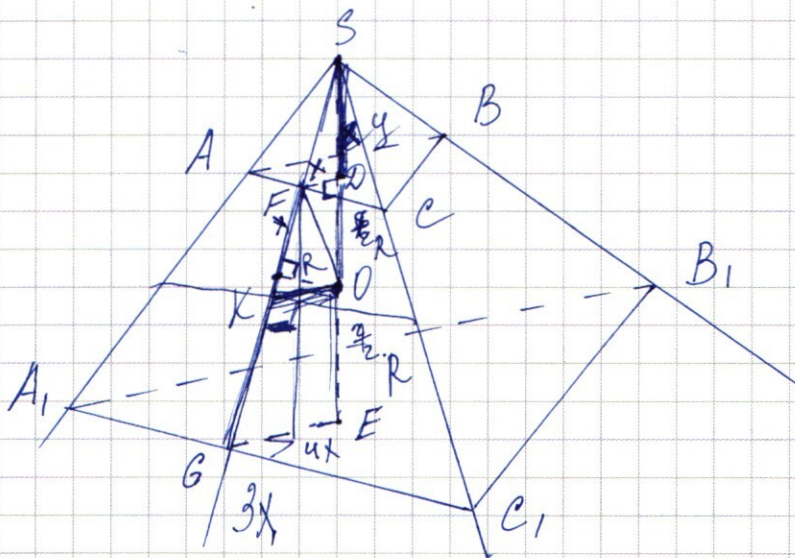
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.



$$\sqrt{9x^2 + 4R}$$

$$\frac{SD}{SK} =$$



черновик

☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ☒

(Нумеровать только чистовики)

Из рисунка видно, что в ситуации, требуемой в задаче, все 4 окружности должны иметь ровно две общие точки с квадратом.

Рассмотрим пару окружностей с центрами в т. А и В. Они дают две общие точки с квадратом при $a = 1$ (со стороны окружностей с центрами в т.т. С и D общих точек нет). При дальнейшем увеличении радиуса первых двух окружностей общих точек будет больше, пока они не ~~пересек~~ пересекутся в т.т. $(0; 0)$ и $(0; 6)$ при $a = 25$.

Но при $a = 25$ имеются и другие общие точки с окружностями с центрами в С и D (они появляются уже при $a = 10$).

Другая конфигурация окружностей А и

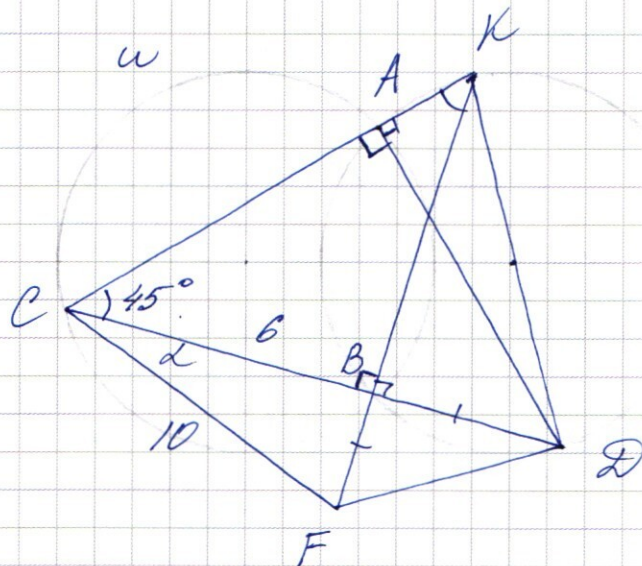
В требуемого не даёт (при $a > 25$ точек либо больше, либо вообще нет).

Аналогично рассматривая пару окружностей С и D, заключаем, что они дают нужное количество точек при $a = 130$.

Ответ: 1; 130.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NB.



б) Пусть $FB \cap \sigma = K$.
Проведём КД.
КД - диаметр σ ,
т.к. $\angle KBD$ - пря-
мой, вписанный.

Но тогда аномально LKAD-приём,

откуда следует, что $A \in SK$. $\triangle SKB: \angle ASB = \angle SKB$ как опирающиеся на равные дуги окружностей равных радиусов. Значит, $\triangle SKB$ - р/б и $SB = KB$. Тогда $\triangle SBF = \triangle KBD$ по двум катетам и $BF = KD = d = 2R = 10$.

$$BC = BK = 6, \quad CK = 6\sqrt{2}.$$

$\angle KCB = 45^\circ$ (острый угол в р/б прилегающ. треугол.)

$$\pi_{\text{comb}} \angle BCF = 2. \quad \cos 2 = \frac{3}{5}; \quad \sin 2 = \frac{4}{5}.$$
$$\text{Moga } \sin \angle ACF = \sin(2 + 45^\circ) = \sin 2 \cos 45^\circ + \cos 2 \sin 45^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{5}$$
$$BF = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8; \quad BD = BF = 8; \quad CD = 14.$$
$$\triangle ACD: CD = AC\sqrt{2}, \Rightarrow AC = \frac{14}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \sin ACF \cdot CF \cdot AC =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = 49.$$

Ответ: а) 10; б) 49.

N 5.

Построим графики данных уравнений в системе $y(x)$.

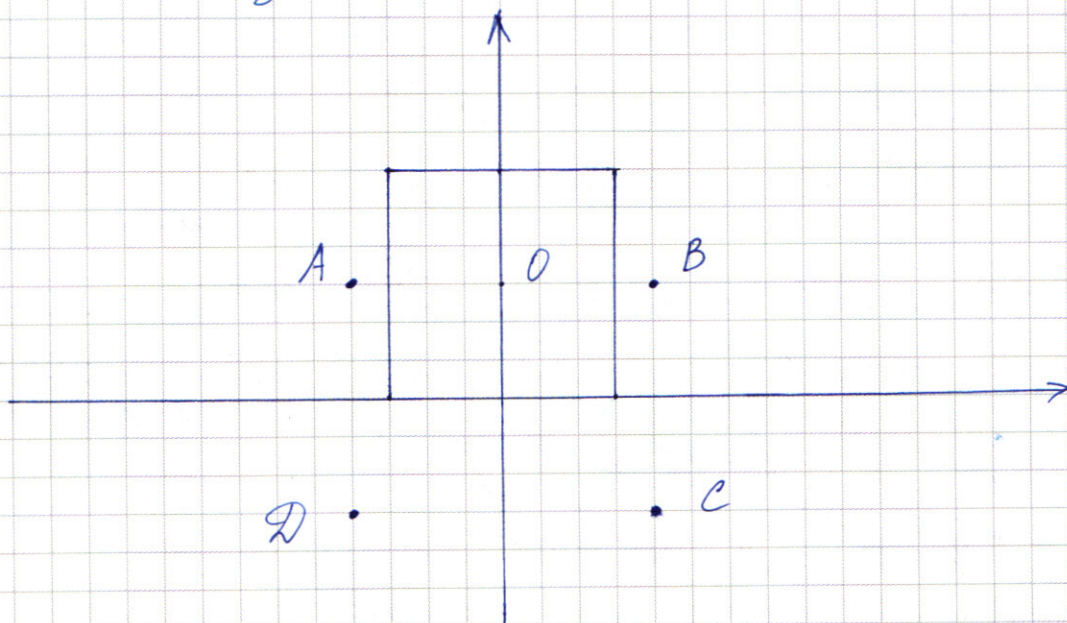
Графиками второго уравнения являются 4 окружности с центрами $(4; 3)$; $(-4; -3)$; $(-4; 3)$; $(4; -3)$ и радиусом $\sqrt{a}$.

Для построения графика первого уравнения также рассмотрим 4 случая:

$$\begin{cases} y > 3-x \\ y > 3+x \end{cases} \Rightarrow y = 6; \quad \begin{cases} y < 3-x \\ y > 3+x \end{cases} \Rightarrow x = -3$$

$$\begin{cases} y < 3-x \\ y < 3+x \end{cases} \Rightarrow y = 0; \quad \begin{cases} y > 3-x \\ y < 3+x \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Отсюда видно, что график ^{первого} ~~второго~~ уравнения — квадрат с центром $(0; 3)$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Заметим, что $3375 = 3^3 \cdot 5^3$. Ясно, что данное произведение может быть переписано как произведение однозначных сомножителей только двумя способами:

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$3375 = 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

(с точностью до перестановок сомножителей). Действительно, все другие варианты используют двузначные сомножители, которые не могут в 10-й системе счисления являться цифрами числа. Дополнив каждый из указанных наборов единицами (чтобы кол-во сомножителей было 8), получаем два ^{различных} набора из 8-ми цифр. Из них можно составить $2 \cdot 8! = 80640$ чисел.

Ответ: 80640.

N2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$(\sin 7x + \cos 7x)(-2\sin 4x - \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)) = 0.$$

Преобразуя по методу вспомогательного угла, получаем:

$$\sqrt{2} \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \left(-2\sin 4x + 2\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0.$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) (\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin 4x) = 0.$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

$$\left[\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \right.$$

$$\left. \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right.$$

$$\left. \cos\left(\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \right.$$

$$\left[7x + \frac{\pi}{4} = n\pi \right.$$

$$\left. \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = n\pi \right.$$

$$n, \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\frac{11}{2}x - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + n\pi \right.$$

$$\left[7x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \right.$$

$$\left. \frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + n\pi \right.$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\frac{11}{2}x = \frac{9\pi}{8} + n\pi \right.$$

От вет:

$$-\frac{\pi}{28} + \frac{n\pi}{7};$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3};$$

$$\frac{9}{44}\pi + \frac{2n\pi}{11};$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$\left[x = -\frac{\pi}{28} + \frac{n\pi}{7} \right.$$

$$\left[x = \frac{\pi}{12} + \frac{2n\pi}{3} \quad n \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left[x = \frac{9}{44}\pi + \frac{2n\pi}{11} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} (x-4)^2 + (y-3)^2 &= a \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 &= a \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 &= a \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 &= a \end{aligned} \quad \Rightarrow 4 \text{ окр. } a.$$

$\begin{pmatrix} 4; 3 \\ -4; 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4; -3 \\ 4; -3 \end{pmatrix}$

$\sqrt{a}$

$$|(y-3)-x| + |(y-3)+x| = 6. \quad ?$$

$y > 3$
 $x > 0$

$(y-3) > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$(y-3) = x$

$$\begin{cases} y+x > 3 \\ y-x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+x < 3 \\ y-x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x < 3 \\ y-x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y+x > 3 \\ y-x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x > 3 \\ y-x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+x < 3 \\ y-x > 3 \end{cases}$$

$$(y-3) - x > 0. \quad y-3+x$$

$$y-3-x > 0.$$

$$y-x > 0.$$

$$|y-x-3| + |y+x-3| = 6.$$

$$\begin{cases} y > 3-x \\ y > 3+x \end{cases} \quad 2y - 6 = 6$$

$$\boxed{y = 6}$$

$$\begin{cases} y < 3-x \\ y > 3+x \end{cases} \quad y - x - 3 - y - x + 3 = 6$$

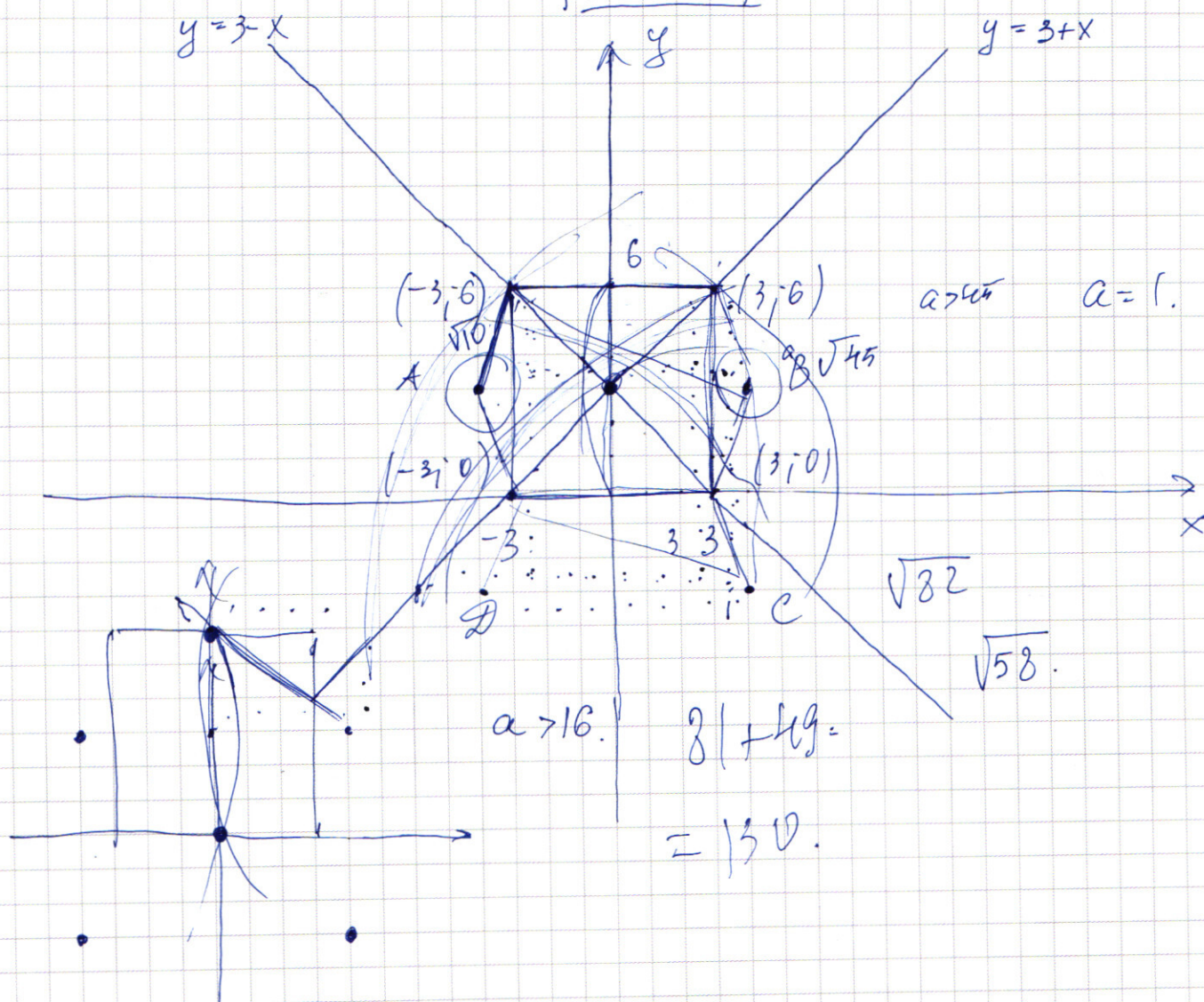
$$\boxed{x = -3}$$

$$\begin{cases} y < 3-x \\ y < 3+x \end{cases} \quad -y + x + 3 - y - x + 3 = 6$$

$$\boxed{y = 0}$$

$$\begin{cases} y > 3-x \\ y < 3+x \end{cases} \quad -y + x + 3 + y + x - 3 = 6$$

$$\boxed{x = 3}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$-2 \sin(4x) (\sin(7x) + \cos(7x)) = \sqrt{2} (\cos(7x) - \sin(7x)) (\cos(7x) + \sin(7x))$$

$$(\sin(7x) + \cos(7x)) (-2 \sin(4x) - \sqrt{2} (\cos(7x) - \sin(7x))) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) (-2 \sin(4x) + \sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) (\sin(7x + \frac{\pi}{4}) - \sin(4x)) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) 2 \sin \frac{7x + \frac{\pi}{4} - 4x}{2} \cos \frac{7x + \frac{\pi}{4} + 4x}{2} = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{3}{2}x + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{11}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0$$

...



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases} \quad \text{N3.}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0. \end{cases}$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0.$$

$$\begin{aligned} y^{2 \lg xy} &= y^{2(\lg x + \lg y)} \\ &= (y^2)^{\lg x} + (y^2)^{\lg y} = \\ &= y^{2 \lg x} + (y^{\lg y})^2 \end{aligned}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} - y^{2 \lg x} - 2y^{2 \lg y} = 0$$

$$\begin{aligned} 2y &= y + \frac{3}{2}x \\ y &= \frac{3}{2}x \\ \lg &= \frac{1}{\frac{3}{2}} \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ y &= \frac{1}{\arctg \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$y^{5 \lg x} - y^{2 \lg x} x^{\lg x} - y^{2 \lg y} x^{\lg x} = 0.$$

~~ура~~

