

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Чтобы произведение цифр числа равнялось 3375,
нужно:

1) Три-„5“, три-„3“, остальные-„1“

Расставить „5“ $C_3^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ - вар.

Расставить „3“ $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ - вар.

$$56 \cdot 10 = 560 \text{ - вар. когда в числе три-„3“}$$

2) три-„5“, одна „9“, одна „3“, остальные-„1“

Расставить „5“ $C_3^3 = 56$ - вариантов

Поставить 9 - 5 вар. и 3 - 4 вар.

$$56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120 \text{ - когда одна „9“}$$

Других вариантов нет.

$$560 + 1120 = 1680 \text{ - вар. всего}$$

Ответ: 1680

N5

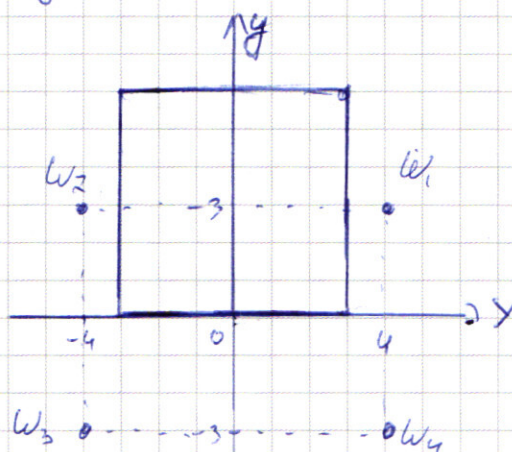
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) задаёт квадрат со стороной 6 и центром $(0; 3)$.

(2) задаёт 4 окр-ти (или их части) с центрами $(4; 3)$, $(-4; 3)$, $(-4; -3)$, $(4; -3)$ - которые существуют только в I, II, III, IV четвертях каждая соответственно.

$$R = \sqrt{a}, a \geq 0.$$

Картина сим-ка,
поэтому будем искать
 a , при которых есть реш.,
по одну сторону от Oy ,
например, $x \leq 0$



Первое a , которое подходит $a=1$, когда окр-ть w_1 ^{с ц. $(4; 3)$} касается квадрата
Разделим a на несколько промежутков, когда количество
реш. не меняется

$a \in [0; 1)$ - когда ни одна окружность не пересекает квадрат

$a=1$ - окружности w_1 и w_2 касаются квадрата (2 реш.)

$a \in (1; 5)$ - окружности w_1 и w_2 пересекают квадрат в 2-х т. (4 реш.)

$a=5$ - ~~окр-ти~~ окр-ти пересекают квадрат в его углах (4 реш.)

$a \in (5; 25)$ - w_1 и w_2 пересекают кв. дважды, w_3 и w_4 по одному разу ^{в тех же т.} (8 реш.)

$a=25$ - окр-ти пересекают квадрат в т. $(0; 0)$ и $(0; 6)$ (2 реш.)

$a \in (25; \infty)$ - ни одна окр-ть не пересекает квадрат (0 реш.)

Т.с. система имеет два решения при $a=1$ и $a=25$

Ответ: $a=1, a=25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - 14x \right)$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin(-4x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \sin(-4x) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \left(-\sin(4x) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0 \\ \sin(4x) = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{5\pi}{4} - 7x + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k \\ x = +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k; +\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k, k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy & x > 0 \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & y > 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение относительно x :

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y - 4)^2$$

$$x = \frac{2y + 4 \pm |4y - 4|}{2} = y + 2 \pm |2y - 2| = y + 2 \pm (2y - 2)$$

Получаем:

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ \begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$1) x = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{y^4}{3} = (y \lg y)^2 \Rightarrow y^2 = 3y \lg y$$

$$\log_{3y} y^2 = \lg y$$

$$\frac{2}{\log_y 3y} = \frac{1}{\log_y 10} \Rightarrow 2 = \log_{10} 3y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^2 = 3y \Rightarrow y = \frac{100}{3}$$

$$x = 3y = 100$$

$$2) x = -y + 4$$

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right)^{\lg(-y+4)} = y^2 \lg(y^2 + 4y)$$

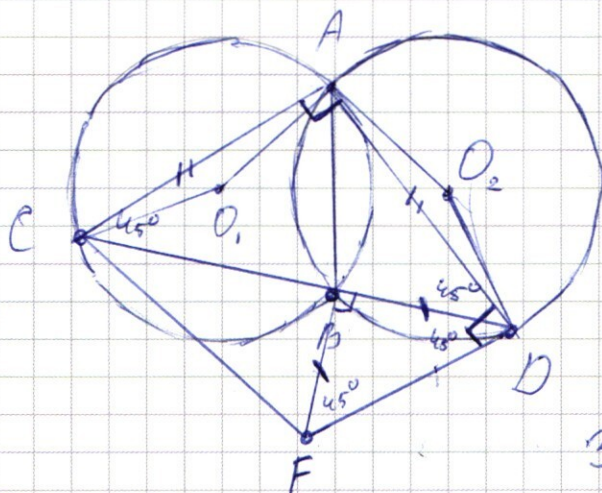
Ответ: $(100; \frac{100}{3})$,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

 $R=5$

Руст6 перпендикуляр из А
на CD - h



$$\begin{aligned} \text{b. } \Delta ABD: R &= \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{4S} = \\ &= \frac{AB \cdot AD \cdot BD}{2h \cdot BD} = \frac{AB \cdot AD}{2h} \end{aligned}$$

Ан-но в $\triangle CAB$: $R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S} =$
 $= \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2a \cdot CB} = \frac{AB \cdot AC}{2a}$

Значит, $AC = AD$

По т. косинусов в $\triangle ACO$: $AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \alpha$ ($\alpha = \angle COA$)

Ан-но в $\triangle ADO_2$: $AD^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos \beta$ ($\beta = \angle ADO_2$)

$$H_0: AP = AC \Rightarrow L = \beta$$

Вывод: окружность Q_1A_1 -центр

Δ FBP при 4092, $\angle BFP = \angle BAP \Rightarrow \angle BFP = \angle DFB = 45^\circ$

ΔACD прямоуг., равноб. ($AC = AD$) $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

$$\angle FDA = 90^\circ$$

№7

$$\begin{cases} y > 2^x - 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x \end{cases}$$

Сначала найдем все x , которые подходят

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + x \cdot 2^{64} - x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 - x - 2^x > 2^{64}(6 - x)$$

Очевидно, при $x < 6$

правая часть больше и будет возрастать при увеличении x , а левая часть будет убывать

при $x = 6$ обе части закрываются. Т.е. $x \leq 6$ - не подходит.

$$2^x + x - 70 < 2^{64}(x - 6)$$

$x = 7$ подходит, $x = 8$ подходит, ..., $x = 69$ подходит

При $x = 70$ обе части приравниваются

При $x > 70$ левая часть будет больше правой.

Значит, как подходят: $x \in [7; 69]$

При конкретном x , значений y будет подходить:

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = (70 - x) - 2^x + 2^{64}(x - 6)$$

$$x = 7: 63 - 2^7 + 2^{64}$$

$$x = 8: 62 - 2^8 + 2 \cdot 2^{64}$$

$$x = 69: 1 - 2^{69} + 63 \cdot 2^{64}$$

две арифм. прогрессии
одно-геометр.

$$A = \frac{1+63}{2} \cdot 63 = 2016 - \text{сумма первой прогрессии.}$$

$$B = \frac{2^{64} - 2^7}{2} \cdot 63 = 63 \cdot (2^{64} - 2^7) = (2^{65} + 63 \cdot 2^{63}) \cdot 63$$

$$C = \frac{2^{69} - 2^{62}}{2^{62}} = 2^7 - 2^0 = 127 - 1 = 126$$

Всего корней $(A - C + B)$

$$\text{Ответ: } 2016 - 2^7 + 2^0 + 63 \cdot (2^{65} - 2^7) = 2016 - 2^7 + 2^0 + 63 \cdot 2^{64}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 115} \\ 30 \overline{) 225} \\ 37 \overline{) 225} \\ 30 \overline{) 225} \\ 75 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 125 \\ 27 \\ 875 \\ 250 \\ 3375 \end{array}$$

$$555 \cdot 0.001$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$\cos 14x = \cos(11x + 3x) = \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 11x(1 - \cos 3x) - \cos 3x - \sin 11x(1 + \sin 3x) \sin 3x = 0$$

$$\cos 11x - \sin 11x - \cos 3x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 11x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 11x \right) + \sqrt{2} \left(\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\cos x \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(x + \beta) + \cos(x - \beta))$$

$$\sin x \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(x - \beta) - \cos(x + \beta))$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin(4x) = \cos 14x$$

$$\cos \beta \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \cos 4x = \cos 14x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 7x + \cos 7x) \cdot \sin(4x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 4x - \cos 4x) \cos 4x$$

$$\sin x \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(x + \beta) + \sin(x - \beta))$$

$$\sin x =$$

$$\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin(-4x) = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

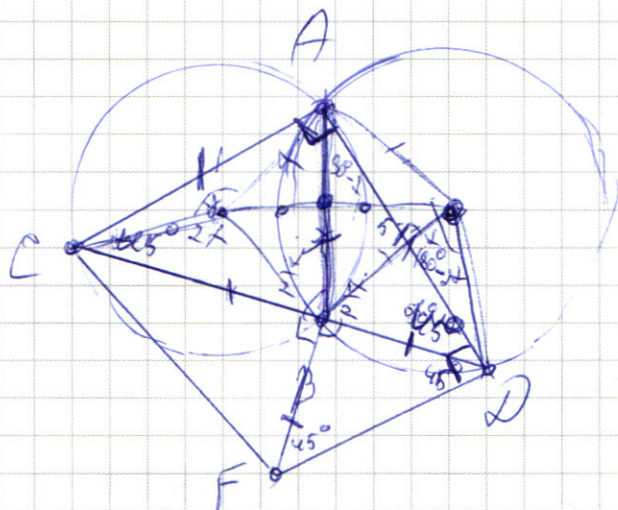
$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 = 2xy + 8$$

$$\log_{10} x = a \quad y = 9^x$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log_{10} x} = y^2 \cdot \log_{10} xy$$

$$\log_x a = \log_{10} a$$

$$\log_{y^2} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log_{10} x} = \log_{10} xy \quad \text{or} \quad \log_{\frac{y^5}{x}} y^2 \log_{10} xy = \log_{10} xy$$

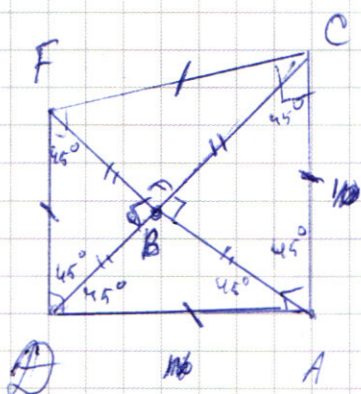


$$y > 3.2^{65}$$

$$R = \frac{ab \sin C}{\sin A} = \frac{AD \cdot AB \cdot BD}{2h \cdot BD}$$

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{2h \cdot BC}$$

$$AB \cdot AC = AB \cdot AD$$



$$a \in (0, 1)$$

$$a \in (1, \sqrt{10})$$

$$a \in (\sqrt{10}, 5)$$



$$BC = \sqrt{2R^2(1 - \cos \beta)} \quad BD = \sqrt{2R^2(1 + \cos \beta)}$$

$$\frac{BC}{BD} = \tan(\alpha/2)$$

$$\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{4} - 11x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{4} - 3x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2} - 14x\right) = 2\sin(\dots)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 3 - x \geq 0$
 $y \geq x + 3$
 $y = 12$

$y - 3 + x \geq 0$
 $y \geq -x + 3$

$y - 3 - x + y + 3 = x = 6$
 $-4x = 3$
 $-2y = 0$

$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 9$

$S_n = \frac{b_n(q^n - 1)}{q - 1}$
 $S_3 = \frac{8^3 - 1}{8 - 1} = \frac{511}{7} = 73$

$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 4x = 2 \cos 14x$
 $2 \sin 7x \left(\frac{1}{2} \sin 4x + \frac{1}{2} \cos 4x \right) = 2 \cos 14x$
 $2 \sin 7x \cdot \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin 7x \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$
 $\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$
 $\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x = \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x$

$\log_2 8 = \frac{1}{\log_3 2}$
 $2 = \log_3 3 + \frac{1}{\log_3 10}$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)' = y^2 \log y$$

$$y^5 = x y^2 \log y$$

$$a^5 = 6^{10}$$

$$a = 6^2$$

$$x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = (x-y-2-4/y-1)(x-y-2+4/y-1)$$

$$D = (4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y) = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y-1)^2$$

$$x_1 = 2y+4 = y+2 \pm 4(y-1)$$

$$(x-y)^2 - 16(y-1)^2 =$$

$$= x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4x + 4y - 16y^2 + 32y - 16 = x^2 - 2xy - 4x - 15y^2 + 36y - 12$$

$$x = y+2 \pm 4/y-1$$

$$x = y+2 - 4/y-1$$

$$y \geq 1 \quad x = -3y+6$$

$$x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

$$x = y+2 \pm (4y-4) \quad y \geq 1 \quad x = y+2+4y-4 = 5y-2$$

$$\left(\frac{y^5}{5y-2}\right)' = y^2 \log(5y^2-2y)$$

у

$$\frac{y^5 \log x}{y^{2 \log y}} = x^{\log x}$$

$$\frac{y^5}{5y-2} = y^2 \log y = y^2 \cdot y^{\log y}$$

$$y^3 = (5y-2) y^{\log y}$$

$$y^{(3-\log y)} = (5y-2)$$

$$\log(5y-2) y^3 = y^{\log \frac{y^3}{5y-2}} = x^{\log x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x = \cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin (-4x) - \cos 11x \cdot \cos 3x = 2 \sin 7x (\cos 4x) - \sin 11x \cdot \sin 3x$$

$$2 \sin 7x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} = \cos \left(\frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos 11x - \frac{1}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 4x =$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) =$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right)$$

$$= \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2} (\cos 14x + \cos 8x) + \frac{1}{2} (\cos 14x - \cos 8x)$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos 14x$$

5

$$2^x + 3 \cdot 2^{64} < 70 + (2^{64} - 1)x = 70 + 2^{64}x$$

$$2^x + 2^{64}(8-x) < 70 - x$$

$$2^{64}(8-x) < 70 - x - 2^x$$

$$x=3, x=4, x=5, x=6, \dots, x=69$$

$$x=128$$

$$-64 \cdot 2^{64} < 70 - 128 - 2^{64}$$

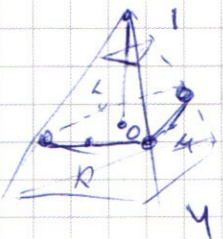
$$2^{64} < -2^{70}$$

$$67 \cdot 2^{64} > 70 - 70$$

$$67 \cdot 2^{64} > 0$$

$$68 \cdot 2^{64} > 2^{71} - 1 \text{ - не верно}$$

$$2^{64}(68 - 2^7) > -1$$



$$y > 8 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot 3$$

$$70 + 2^{64} - 3 - 3 \cdot 2^{65} - 8 =$$

$$= 59 - 3 \cdot 2^{64}$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin$$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1) \cdot x = 70 + x \cdot 2^{64} - x$$

$$2^{64}(6-x) < 70 - x - 2^7$$

$$x = 7$$

$$70 + 7 \cdot 2^{64} - 7 - 2^7 - 3 \cdot 2^{65} = 63 + 2^{64}(7-6) - 2^7$$

$$62$$

$$x = 8$$

$$70 - 8 + 8 \cdot 2^{64} - 2^8 - 3 \cdot 2^{65} = 1 + 2^{64}(68-6) - 2^{68}$$

$$= 62 + 2^{64}(8-6) - 2^8$$

$$2^{64} + 2^{64}$$

$$1 + \dots + 63 \dots - 2^7 \dots - 2^{68}$$

$$x = 4 - y$$

$$16 - 8y + y^2 - 8y + 7y^2 - 16 + 4y - 3y^2 + 12y$$

$$\frac{y^2}{3} = (y^{\frac{1}{3}})^2$$

$$y^2 = 3y^{\frac{1}{3}}$$

$$\log_{3y} y^2 = \log_{10} y$$

$$2 \log_{3y} y = \log_{10} y$$

$$\frac{2}{\log_3 3y} = \frac{1}{\log_y 10}$$

$$2 = \log_{10} 3y \Rightarrow 3y = 100$$

$$\frac{y^{\frac{5}{2}}}{-y+4} = y^{\log y}$$

$$y^{\frac{5}{2}} = 4y^{\log y}$$

$$-y = -y^{\log 10}$$