

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg(x)} = y^{2\lg(xy)}$$

ОДЗ: $x > 0; y > 0$.

$$x^2 - 2xy - 4x - 5y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - x(2y+4) - 5y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = (y(y-1))^2$$

$$x_1 = \frac{2y+4 - y(y-1)}{2} = 4 - y$$

$$x_2 = \frac{2y+4 + y(y-1)}{2} = 5y$$

$$\frac{y^5 \lg(x)}{x \lg(x)} = y^{2\lg(x)} \cdot y^{2\lg(y)}, \text{ т.к. } y \neq 0$$

$$y^{3\lg(x)} = x^{\lg(x)} \cdot y^{2\lg(y)}$$

1) Пусть $y=1$, то:

$$1 = x^{\lg(x)} \Rightarrow x=1 \text{ (не подходит, т.к. } x = \begin{bmatrix} 3y \\ 4-y \end{bmatrix})$$

2) $y \neq 1$.

$$\frac{y^{3\lg(x)}}{y^{2\lg(y)}} = \frac{x^{\lg(x)}}{y^{2\lg(y)}}$$

$$\frac{y^{3\lg(x)-2\lg(y)}}{1} = \frac{x^{\lg(x)}}{y^{2\lg(y)}} \text{ т.к. } y \neq 1$$

$$3\lg(x) - 2\lg(y) = \frac{\lg(x) \cdot \lg(x)}{\lg(y)}$$

Заменим $\lg(y) = b$, $\lg(x) = a$

$$3a - 2b = \frac{a^2}{b}$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9a^2 - 4b^2 = b^2$$

см. стр 2

u3 (продолжение)

$$a_1 = \frac{3 \cdot 6 + 6}{2} = 2 \cdot 6 \Rightarrow \lg(x) = 2 \lg(6) \Rightarrow x = 6^2$$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 6 - 6}{2} = 6 \Rightarrow \lg(x) = \lg(6) \Rightarrow x = 6$$

1) $x = 6^2$

1.1) $x = 4 - y$

$$4 - y = y^2 \Rightarrow y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{т.к. } y > 0, \text{ то}$$

$$y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \Rightarrow x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}$$

1.2) $x = 3y$

$$y^2 = 3y \quad (\text{т.к. } y \neq 0, \text{ то})$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 9$$

2) $x = y$

2.1) $x = 4 - y$

$$y = 4 - y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 2$$

2.2) $x = 3y$

$$y = 3y \quad (\text{т.к. } y \neq 0)$$

Ответ: $x_1 = 2; y_1 = 2; x_2 = 9; y_2 = 3;$

$$x_3 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}; y_3 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 4

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\cos(14x - 3x) - \cos(3x) - \sin(14x - 3x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\cos(14x) \cos(3x) + \sin(14x) \sin(3x) - \sin(14x) \cos(3x) + \cos(14x) \sin(3x) + \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\sin(14x) (\sin(3x) - \cos(3x)) + \cos(14x) (\sin(3x) + \cos(3x)) + \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

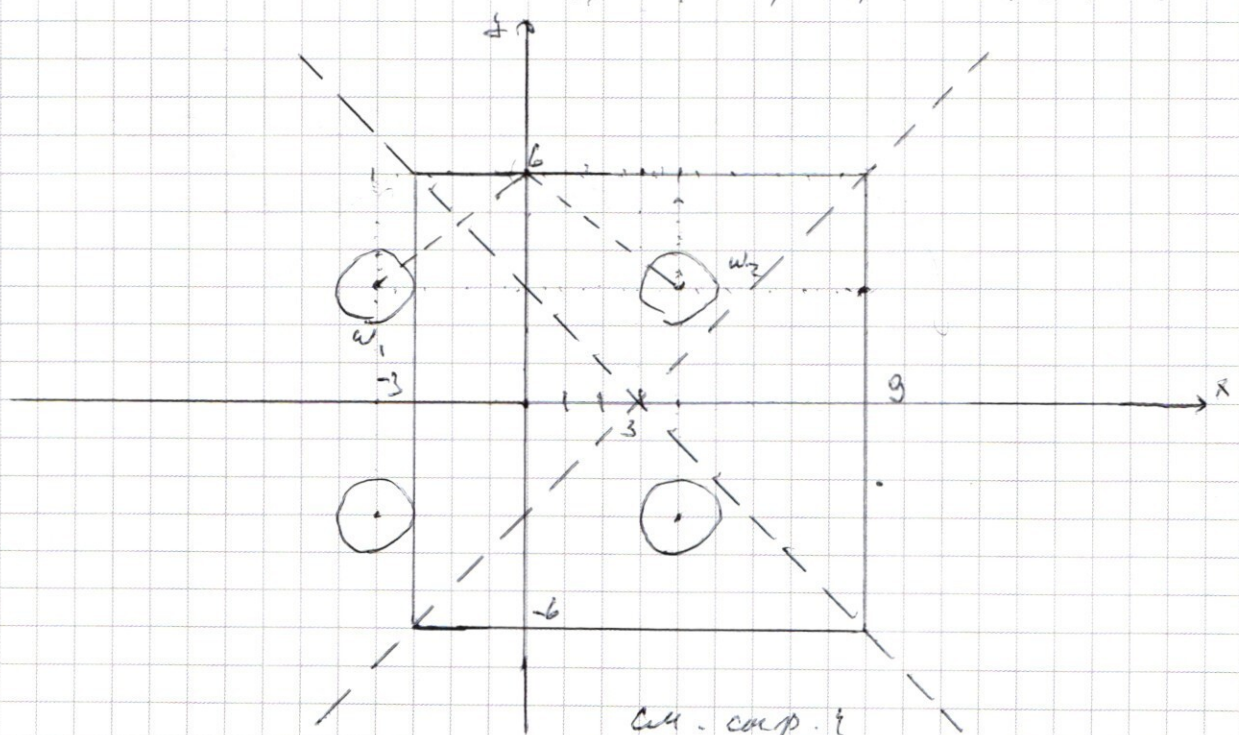
$$2 \sin(7x)$$

✓ 5

$$|15 - 3 - x| + |15 - 3 + x| = 6 \quad (1)$$

$$(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = 9 \quad (2)$$

Нарисовав гр. (2) даёт нам 4 экстр. или их
часть с центрами $(-4, 3)$; $(-4, -3)$; $(4, 3)$; $(4, -3)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\cos(4x) - \cos(3x) - \sin(4x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

$$\cos(4x) - \cos(3x) - \sin(4x) + \sin(3x) = \sqrt{2} (\cos(4x)\cos(3x) - \sqrt{2} \sin(4x)\sin(3x))$$

$$\cos(4x) (1 - \sqrt{2} \cos(3x)) - \cos(3x) - \sin(4x) (1 - \sqrt{2} \sin(3x)) + \sin(3x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(4x) (\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(3x)) + \frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(3x) - \sqrt{2} \sin(4x) (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)) - (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)) = 0$$

$$\sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(3x)) (\cos(4x) + \frac{1}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2} (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)) (\sin(4x) + \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$$

$$(\cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(3x)) (\cos(4x) + \cos(\frac{\pi}{4})) - (\sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(3x)) (\sin(4x) + \sin(\frac{\pi}{4})) = 0$$

$$4 \sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) +$$

$$+ 4 \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) (\sin(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8}) +$$

$$+ \cos(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8})) = 0$$

$$\sin(\frac{3x + 4x}{2} + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(7x + \frac{\pi}{4}) \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$1) \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \pi \frac{k}{7}$$

$$2) \sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n$$

$$3) \cos(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi p$$

см. смр. 6

шс (продолжение),

$$\frac{11x}{2} = \frac{5\pi}{8} + \pi p$$

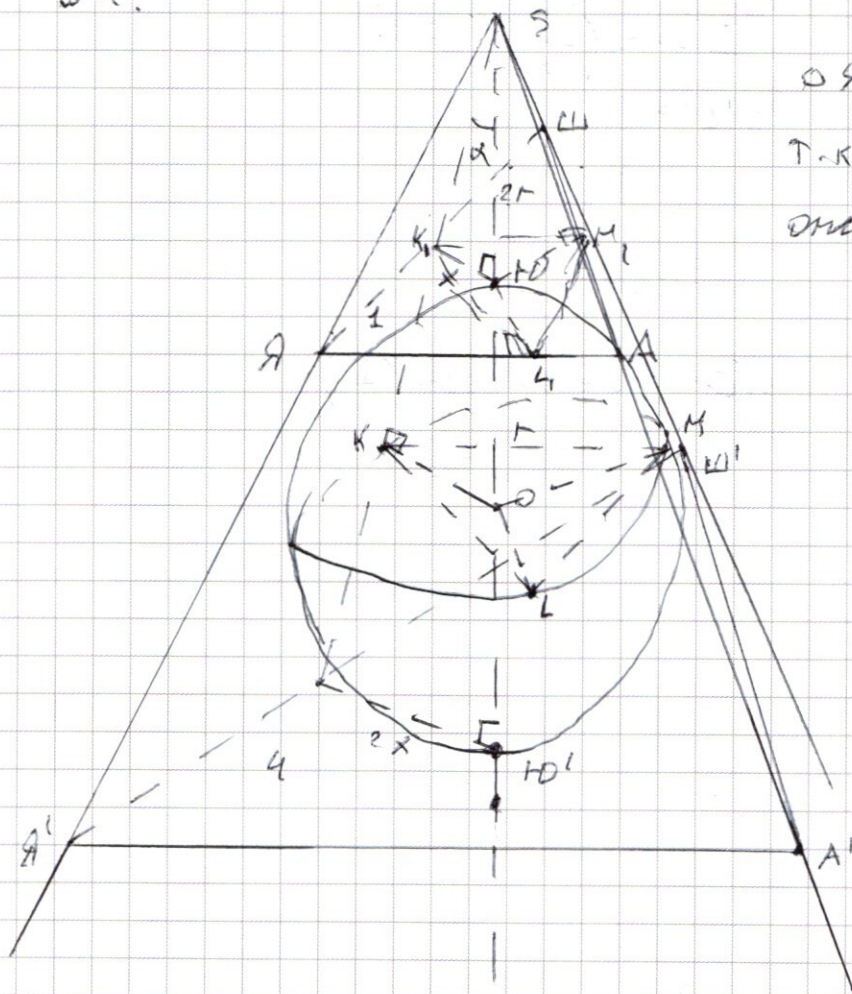
$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi p.$$

Ответ: $x_1 = \frac{-\pi}{28} + \frac{1}{7}\pi k$; $x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$; $x_3 = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi p$;

k, n, p - целые.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.



$$\triangle SBA \sim \triangle S'BA' \quad (\angle K = \angle L)$$

$$\text{т.к. } (SBA) \parallel (S'BA') \quad \text{и}$$

они в одн. пл.



$$SO = S'O' = 2r,$$

где r — радиус
шара.

т.к. SK — кас. к
шару, то
 $OK \perp SK$, $OK = r$.

$$\triangle OKD$$

$$\sin(\alpha) = \frac{r}{3r} = \frac{1}{3}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$$

по т. Пифагора:

$$SK = \sqrt{3r^2 - r^2} = 2r\sqrt{2}$$

$$\triangle SKH \sim \triangle SKD \Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{2r}{SK}$$

$$x = r \cdot \frac{2r}{2r\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

спроецируем KLM на (SBA)

$$SBA \sim \triangle PBA \quad \text{и} \quad SBA \sim \triangle PBA$$

$$r\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

см. см. 8.

уч. (приращение).

$$\frac{S_{\text{OBA}}}{S_{\text{K'L'M'}}} = \frac{4}{1} \Rightarrow S_{\text{K'L'M'}} = \frac{S_{\text{OBA}}}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{S_{\text{KLM}}}{S_{\text{K'L'M'}}} = \left(\frac{r\sqrt{2}}{r} \right)^2 = 2$$

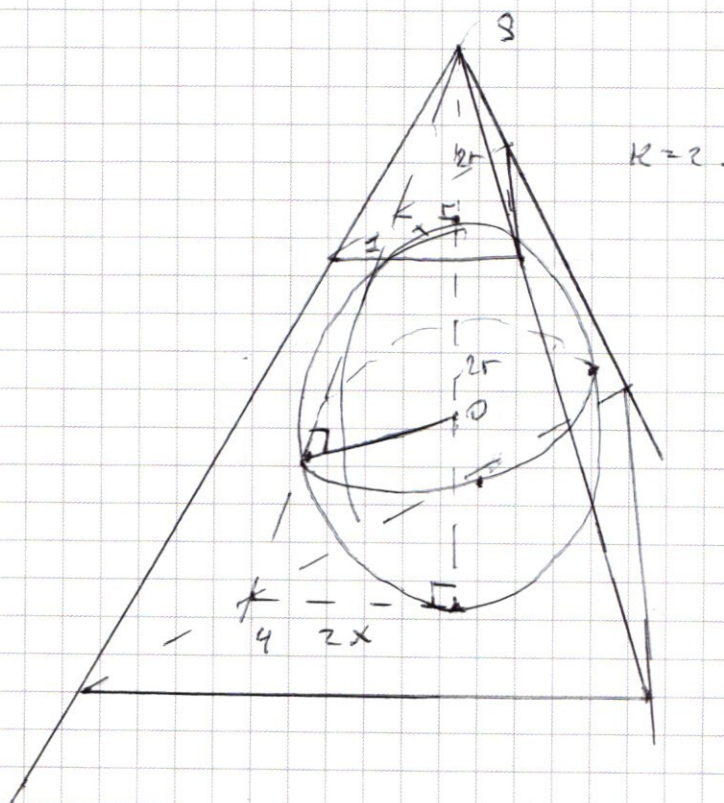
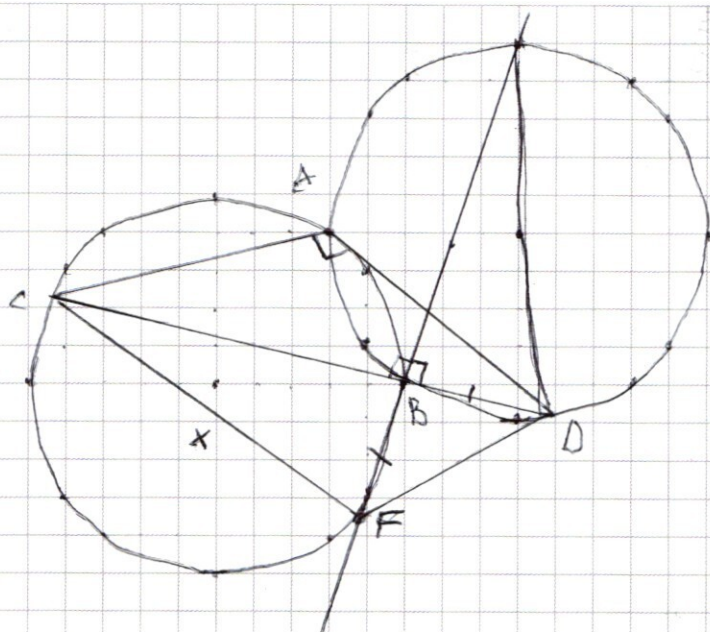
↓

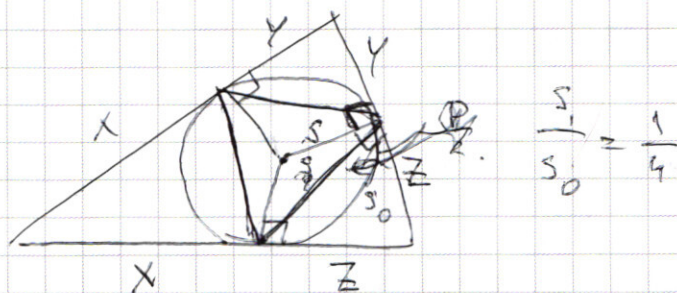
$$S_{\text{KLM}} = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$S_{\text{KLM}} = \frac{1}{2}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

У5.

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

$$y = x + 3$$

$$y = 3 - x$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \end{cases}$$

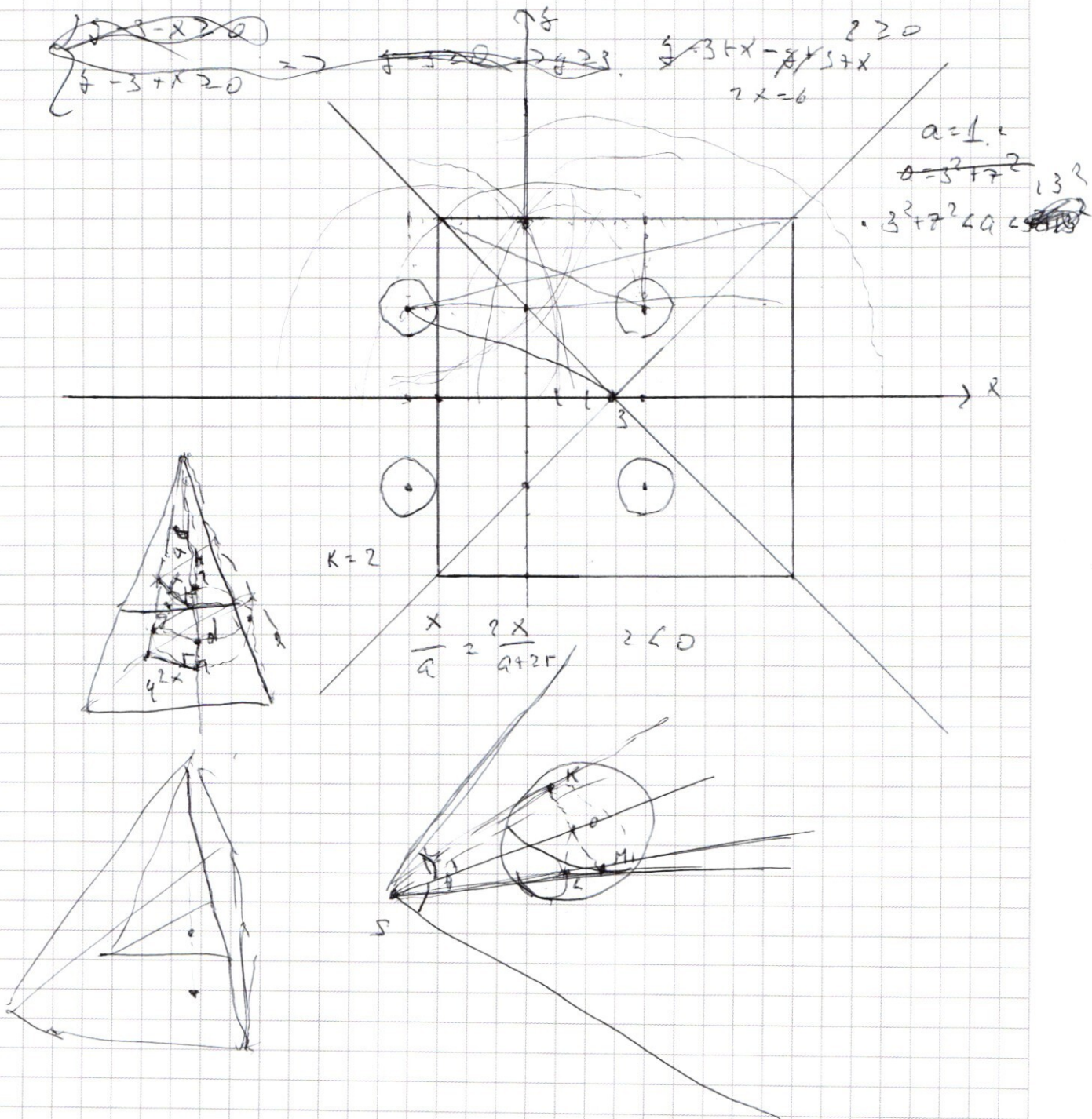
$$\begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x + 3 \\ y \geq 3 - x \end{cases}$$

$$2x = 6$$

$$a = 1$$

$$a = 3^2 + 3^2$$

$$3^2 + 3^2 < a < 13^2$$



$$\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(4x)$$

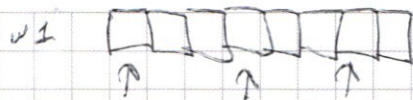
$$\cos(11x) (1 - \sqrt{2} \cos(3x)) - \cos(3x) - \sin(11x) (1 - \sqrt{2} \sin(3x)) - \cos(3x) + \sin(3x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(11x) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(3x)\right) - \sqrt{2} \sin(11x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(3x)\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)\right) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos(3x)\right) (\sqrt{2} \cos(11x) + 1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin(3x)\right) (\sqrt{2} \sin(11x) + 1) = 0$$

$$4 \sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + 4 \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{4x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

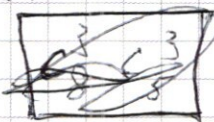


$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ -30 \overline{) 675} \overline{) 5} \\ \underline{375} \overline{) 135} \overline{) 5} \\ -35 \overline{) 17} \overline{) 10} \overline{) 27} \\ \underline{25} \overline{) 15} \overline{) 35} \\ \underline{25} \overline{) 25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ + 8 \\ \hline 56 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= 2 \sin\left(\frac{x + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \\ &= 2 \sin\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 169 \end{array}$$

ω_2

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = -\sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\begin{aligned} -2 \cos(7x) \sin(4x) - 2 \sin(7x) \cos(4x) &= \\ &= -2 \cos(11x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x \pm \beta) &= \sin(x) \cos(\beta) \pm \cos(x) \sin(\beta) \\ \sin(x - \beta) &= \sin(x) \cos(\beta) - \cos(x) \sin(\beta) \\ \cos(x \pm \beta) &= \cos(x) \cos(\beta) \mp \sin(x) \sin(\beta) \\ \cos(x - \beta) &= \cos(x) \cos(\beta) + \sin(x) \sin(\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2 \sin(4x) (\cos(7x) + \sin(7x)) &= \\ &= -2 \sin(11x) \end{aligned}$$

$$-4 \sin(4x) \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\begin{aligned} \cos(x \pm \beta) + \cos(x \mp \beta) &= \\ &= 2 \cos(x) \cos(\beta) \\ \cos(x) - \cos(\beta) &= \\ &= -2 \sin\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(4x) \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) &= \\ &= \sqrt{2} \cos(14x) \end{aligned}$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos(14x)$$

$$-\cos(7x - \frac{\pi}{4}) \sin(4x) = \cos(14x)$$

$$\cos \sin(x) - \cos(\beta) =$$

$$= \sin(x) - \sin(\frac{x}{2} - \beta) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \beta}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \beta}{2}\right)$$

$$-2 \sin(4x) \cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos(14x)$$

$$-(\sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x)) = \cos(14x)$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(4x - \frac{\pi}{4}) = \cos(14x)$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sin(4x - \frac{\pi}{4}) + \cos(14x)$$

$$\begin{aligned} \cos(11x + 3x) &= \\ &= \cos(14x) \cos(5x) - \sin(11x) \sin(3x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(x) &= \\ &= \sin(x) + \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \\ &= 2 \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$= 2 \sin(\frac{\pi}{4}) \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sin(x) + \cos(\beta) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \beta}{2}\right) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{x - \beta}{2}\right) =$$

$$\sin(x) - \cos(\beta) =$$

$$= 2 \sin\left(\frac{x - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \beta}{2}\right) =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{x + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{x - \beta}{2}\right) =$$

$$\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{2} - x) =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin(x - \frac{\pi}{4}) = \\ &= \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\cos(11x) - \cos(3x) - \sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\cos(14x) \cos(3x) + \sin(14x) \sin(3x) - \sin(14x) \cos(3x) + \cos(14x) \sin(3x) + \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$4 - 8 - 8 - 12 + 24 = 0$$

$$\sin(14x) (\sin(3x) - \cos(3x)) + \cos(14x) (\sin(3x) + \cos(3x)) + \sin(3x) - \cos(3x) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\sin(14x) - \cos(3x)$$

$$\sqrt{2} \sin(14x) \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(14x) \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(14x)$$

$$\cos(14x - 3x + \frac{\pi}{4}) = \cos(14x)$$

u3.

$$\left(\frac{g}{x}\right)^{18(x)} = g^{24xg}$$

$$x^2 - 2xg - 4x - 3g^2 + 12g = 0$$

$$x = 10^{18(x)}$$

$$x^2 - 2xg - 4x - 3g^2 + 12g = 0$$

$$x^2 - 2xg - 4x - 3g^2 + 12g = 0$$

$$x^2 - x(2g + 4) - 3g^2 + 12g = 0$$

$$D = 4g^2 + 16g + 16 + 12g^2 - 48g =$$

$$= 16g^2 - 32g + 16 = 16(g^2 - 2g + 1) =$$

$$x = \frac{2g + 4 \pm \sqrt{16(g-1)^2}}{2} = 4 - g$$

$$= 16(g-1)^2$$

$$\sqrt{D} = 4(g-1)$$

$$x = \frac{2g + 4 \pm 4(g-1)}{2} = 3g$$

$$C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 =$$

$$C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 1}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$C_8^3 \cdot C_8^1 \cdot C_8^1 =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$\lg\left(\frac{x^3}{g^2}\right) = \frac{\lg(x)}{\lg(g)}$$

$$3a - 2b = \frac{a^2}{b}$$

$$3ab - 2b^2 = a^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$1) g = 0$$

$$2) g \neq 0$$

$$g^{31g(x)} = x^{1g(x)} \cdot g^{21g(g)}$$

$$\left(\frac{g}{x}\right)^{31g(x)} = \left(\frac{g}{x}\right)^{21g(g)}$$

$$g^{31g(x)} = x^{1g(x)} \cdot g^{21g(g)}$$

$$\lg\left(\frac{x^3}{g^2}\right) = \frac{\lg(x)}{\lg(g)}$$