

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{array}{r} 1) \begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 7 & 5 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 5 & \\ 1 & 3 & 5 & 5 & \\ & 2 & 7 & 3 & \\ & & 9 & 3 & \\ & & 3 & 3 & \\ & & 1 & & \end{array} \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$0) \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2) ~~для любой единственной цифры~~ в числе нет цифр 0, иначе произведение = 0

3) единственная цифра $\neq 0 : 5 - 5$

число $3375 : 5^3$ и не $5^4 \Rightarrow$ в числе ровно 3 5-ки

вариантов их расставить - $\binom{5}{3}$ и останется $8-3=5$ позиций

4) остальные цифры в произведении дают $3375 : 5^3 = 3^3 \Rightarrow$

известны степени $3 \Rightarrow \in \{1; 3; 9\}$, а показатели степеней в сумме дают 3.

способов составить 3 из ~~1 и 2~~ всего 2: $3=2+1$

(оке выдает)

$$3=1+1+1$$

$\Rightarrow$ остальные три цифры - $\{9, 3, 1, 1, 1\}$ или $3, 3, 3, 1, 1$

первые можно расставить на 5 позиций

$$\binom{5}{3} \cdot 2$$

↑ ↑
где стоит 1 3 и 9 можно менять

способами

вторые можно расставить $\binom{5}{3}$ (где стоит 3) способами

$$5) \text{ всего чисел: } \binom{5}{3} (\binom{3}{5} \cdot 2 + \binom{3}{5}) = 3 \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{3}{5} = 3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{8!}{4 \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 42 \cdot 40 = 1680$$

Ответ: 1680

~ 2

$$\begin{aligned} 1) \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned} \quad \ominus$$

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\alpha = \alpha + \beta \quad \beta = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \end{aligned} \quad \ominus$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha = \alpha + \beta \quad \beta = \alpha - \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$3) \quad a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$4) \quad (\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) \sqrt{2} \sin(7x + \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ берём } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 2 \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) (\sin 7x + \cos 7x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -\sin 4x = \sin(7x + \frac{3\pi}{4}) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x & \cos 7x \neq 0 \text{ (иначе } \sin 7x = \pm 1 \neq 0) \\ -4x = 7x + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -4x + 7x + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg 7x = -1 \\ -11x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x + \frac{3\pi}{4} = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

~ 3

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (*) \\ \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{\lg x} \quad (**) \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} x \in (0; \infty) \\ y \in (0; \infty) \end{cases}$$

(*) $y^2 + x(-2y - 4) - 3y^2 + 12y = 0$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 4^2(y^2 - 2y + 1) = 4^2(y-1)^2$$

$$x = \frac{-4y \pm 4|y-1|}{2} = y+2 \pm 2|y-1| \quad \begin{cases} x = y+2+2y-2 \\ x = y+2-2y+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$x = 3y$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} &= y^{2\lg 3y^3} & \left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} &= y^{\lg 2y^2} \\ \frac{y^{4\lg 3y}}{y^{2\lg 3}} &= y^{2\lg 3} \cdot y^{4\lg y} & \frac{y^{4\lg 3y}}{y^{2\lg 3}} &= y^{2\lg 3y^2} \cdot y^{2\lg 3} \\ y^{2\lg 3} &= y^{2\lg 3} \end{aligned}$$

$$\lg y \cdot 2 \lg 3 = \lg 3 \cdot \lg 3y$$

$$y=3 \quad x=3y=9$$

$$2 \lg y = \lg 3 + \lg y$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$\boxed{x=9 \quad y=3} - \text{решоб}$$

$$x=4-y: \quad (y \in (0;4)) \text{ т.к. } x>0 \text{ и } y \in (0;4) \Rightarrow 4-y \in (0;4)$$

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2 \lg(y(4-y))}$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = y^{2 \lg(y(4-y)) \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}}$$

$$\text{при } y=1: \quad 1 = 1 \cdot 3^{\lg 3} - \text{не верно} \Rightarrow y \neq 1$$

$$\lg y \cdot 5 \lg(y(4-y)) = 2 \lg(y(4-y)) + \lg y + \lg(4-y) \cdot \lg(4-y)$$

$$5 \lg y \cdot \lg(y(4-y)) = 2 \lg y \cdot \lg y + 2 \lg y \cdot \lg(4-y) + \lg^2(4-y)$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg y \cdot \lg(4-y) + \lg^2(4-y) = 0$$

$$D = 9 \lg^2(4-y) - 8 \lg^2(4-y) = \lg^2(4-y)$$

$$\lg y = \frac{3 \lg(4-y) \pm 1 \lg(4-y)}{4}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) \\ \lg y = \frac{1}{2} \lg(4-y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4-y \\ y^2=4-y \end{cases}$$

$$y=2$$

$$\begin{cases} y^2+y-4=0 \end{cases} \quad (1)$$

$$y=2$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y=2 \quad x=2 - \text{решоб}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2} - \text{решоб} \end{cases}$$

$$(1): \quad y^2+y-4=0$$

$$D = 1+16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y > 0 \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x=9 & y=3 \\ x=2 & y=2 \\ x = \frac{7 \pm \sqrt{17}}{2} & y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

~ 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} |(y-3)-x| + |(y-3)+x| = 6 \quad (*) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \quad (A) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(*) $|y-x| + |y+x| = 2b, \quad b \geq 0$

если (y, x) лежит, то $(y, -x)$ тоже лежит ($|y-x| + |y+x| = |y+x| + |y-x|$)

$\Rightarrow$ построим для $x > 0$, а отразим относительно Oy

$$-x < y < x$$

$$x - y + x - y = 2b$$

$$x - b = y$$

$$y = -b$$

$$-x \leq y \leq x$$

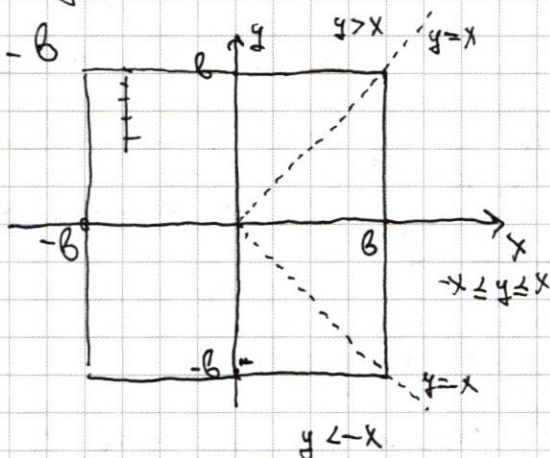
$$x - y + y + x = 2b$$

$$x = b$$

$$x < y < \infty$$

$$y - x + y + x = 2b$$

$$y = b$$



таким $y = -b$
симметрично относительно Ox

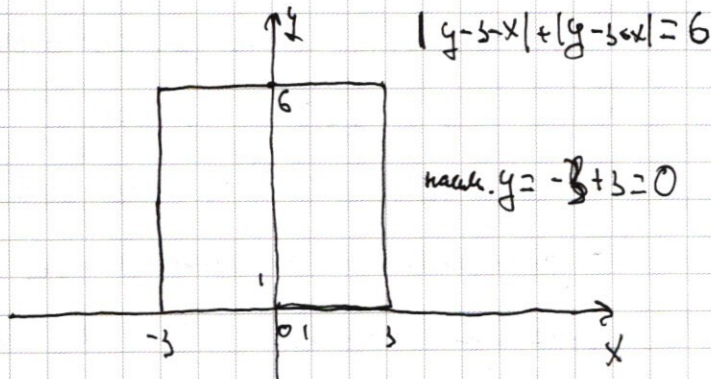
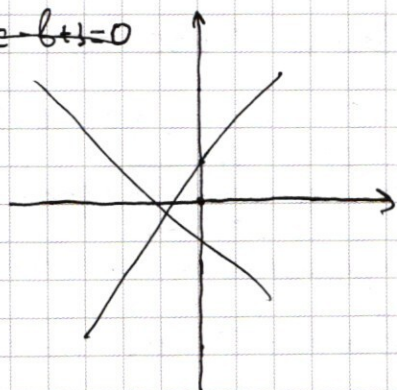
$$|y-x| + |y+x| = 2b$$

на 3 б. в. в. в.

$$|(y-3)-x| + |(y-3)+x| = 2b$$

споем симметрично относительно $y=3$

$$наконец $y = -b+3 = 0$$$



(A): $\sqrt{(x-4)^2} + \sqrt{(y-5)^2} = a$

$$y \text{ в } (*) \text{ so } \Rightarrow |y| = y$$

должно пересекаться (+), найденный

$$x < 0, y < 0$$

$$|x+4|^2 + |y-3|^2 = a$$

$$|x+4|^2 + |y-3|^2 = a$$

- окружность с радиусом

$$\sqrt{a} \text{ и центр } (-4, -3)$$

$$x < 0, y \geq 0$$

$$|x+4|^2 + |y-3|^2 = a$$

$$|x+4|^2 + |y-3|^2 = a$$

- окружн. с рад.

$$\sqrt{a} \text{ и центр } (-4, 3)$$

$$x \geq 0, y < 0$$

$$|x-4|^2 + |y+3|^2 = a$$

- окружн. с рад.

$$\sqrt{a} \text{ и центр } (4, -3)$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

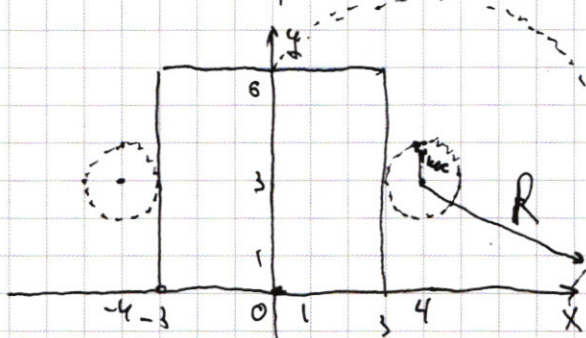
$$|x-4|^2 + |y-3|^2 = a$$

- окружн. с рад.

$$\sqrt{a} \text{ и центр } (4, 3)$$

Этот график представляет из себя 4 окружности, каждая из которых не выходит из своей четверти

(*) лежит в первой и 2-ой кв. $\Rightarrow$ окружности из 3-ей и 4-ой четвертей можно не рассматривать



- при $\Gamma_{\text{окр } 1}$ они соприкасаются.

кас. (*) т.к. все симметрично

оу $\Rightarrow$ в этом положении 2

корня

$$\Gamma_{\text{кас}} = P(y=3, (4, 3)) = 1 \Rightarrow \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=1} - \text{удов.}$$

- при $\Gamma_{\text{окр}} > \Gamma_{\text{кас}}$ и $\Gamma \leq R$ окружности пересекаются (*) в

2-х точках каждая (т.к. симметричны относительно оу и относительно $y=3$)

нулев равно 4 корня $\Rightarrow$ должны совпадать $\Rightarrow$ окружн. для обеих окружн. (не выск за свою четверть) $\Rightarrow y=0 \Rightarrow$

$$\text{это } y=6 \cap y \geq 0 \text{ и } y=6 \cap x=0 \Rightarrow (6, 0) \text{ и } (0, 0)$$

$$R = P((6, 0), (4, 3)) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = \sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=25} - \text{удов.}$$

R - расстояние от точки центра окружности до самой

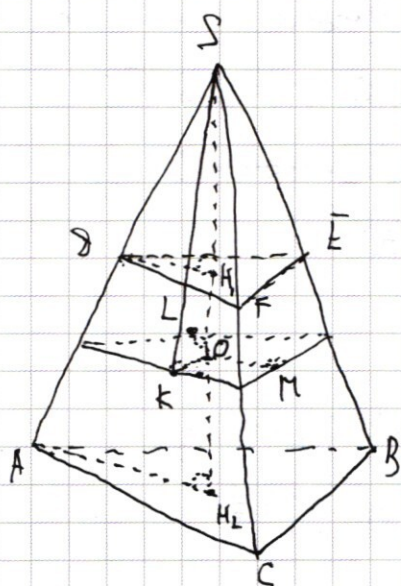
- удаленной точки (*) в 4-ой четверти $\Rightarrow$ при радиусе

окр. $\geq R$ не будет пересечений $\Rightarrow$ не можем быть

2-х решений

Ответ: при $a=1, a=25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



нч

$$1) \begin{cases} (DEF) \perp SO \\ (ABC) \perp SO \end{cases} \Rightarrow (ABC) \parallel (DEF)$$

$$2) \begin{cases} FE = (SBC) \cap (DEF) = FE \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (DEF) \parallel (ABC) \end{cases} \Rightarrow FE \parallel BC$$

3) аналогично $DF \parallel AC$ и $DE \parallel AB$

$$4) \begin{cases} DF \parallel AC \\ FE \parallel CB \end{cases} \Rightarrow \angle DFE = \angle ACB$$

5) аналогично $\angle BAC = \angle EDF$

$$6) \triangle DFE \sim \triangle ACB \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow \frac{DF}{AC} = k = \sqrt{\frac{S_{DFE}}{S_{ACB}}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2DF = AC$$

7) (SAC) :

$$\triangle ASC \sim \triangle DSF \text{ (} \angle S \text{-общий, } \angle SDF = \angle SAC \text{ - н/к т.к. } DF \parallel AC) \Rightarrow$$

$$\frac{DS}{SA} = \frac{DF}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$8) SO \cap (DEF) = H_1, SO \cap (ABC) = H_2 \text{ (} \angle ASH_2 = 90^\circ \text{ т.к. } SO \perp (ABC) \text{ и } \angle DSH_1 = 90^\circ \text{ т.к. } SO \perp (DEF))$$

$$9) \triangle DSH_1 \sim \triangle ASH_2 \text{ (} \angle S \text{-общий, } \angle DSH_1 = \angle ASH_2 = 90^\circ) \Rightarrow \frac{SH_1}{SH_2} = \frac{SD}{SA} = \frac{1}{2}$$

$$10) HH_2 - диаметр т.к. $O \in HH_2 \Rightarrow HH_2 = 2r$, r - радиус сферы
 $\Rightarrow SH_2 = SH_1 + r$$$

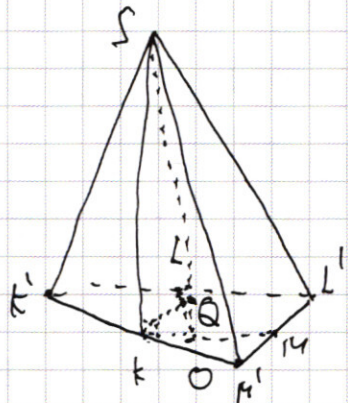
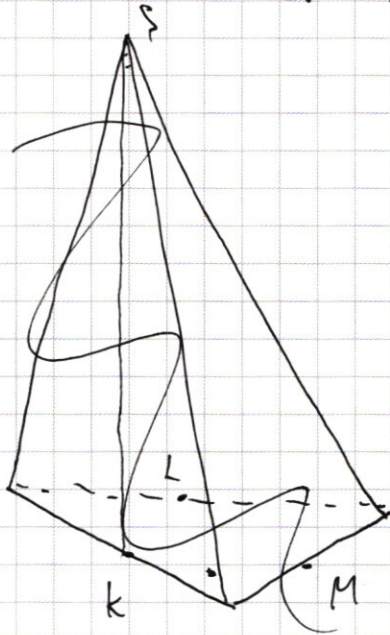
$$11) \frac{SH_1}{SH_2} = \frac{SH_1}{SH_1 + r} = \frac{1}{2} \Rightarrow SH_1 = 2r \Rightarrow SO = SH_1 + HO = 3r$$

12) ΔSKO ($\angle K = 90^\circ$ т.к. K - точка касания сечения $\subset (ABC)$, KO - радиус $\perp (DEF)$)

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{KO}{SO} \text{ то опред.}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{3\Gamma}{3\Gamma} = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO \in \left\{ \arcsin \frac{1}{3}, \pi - \arcsin \frac{1}{3} \right\}$$

13)



KQ - высота ΔSKO на

$$OS \perp QO \Rightarrow KQ \perp SO$$

$$KQ = OS \cdot \cos \angle KSO$$

$$SQ =$$

$$\angle KSO - \text{острый} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3},$$

т.к. ΔSKO прямоугольный.

$$\cos \angle KSO = \frac{8}{9}$$

14) KQ - высота ΔSKO на $OS \Rightarrow KQ \perp OS \Rightarrow SQ = SO \cdot \cos \angle KSO =$
 $= 3\Gamma \cdot \frac{8}{9} = \frac{8\Gamma}{3}$

15) гипотенузы SK и $SL = SQ$ (гипотенузы на Q) соответственно $\Rightarrow$
 $SO \perp KQ, SO \perp LQ, SO \perp QM \Rightarrow SO \perp (LQK)$

16) $Q \in QM$

$$QM \perp SO$$

$$SO \perp (LQK)$$

$$\Rightarrow M \in (LQK) \Rightarrow (MLK) \perp SO \Rightarrow (MLK) \perp ((ABC) \cap (DEF))$$

17) аналогично плоскости $(DEF) \cap (ABC)$ рассмотрим от S

до плоскости $\left(\frac{P((DEF), S)}{P((LMK), S)} \right)^2 = \frac{S_{DEF}}{S_{LMK}} = \frac{(2\Gamma)^2}{\left(\frac{8\Gamma}{3}\right)^2} = \frac{1}{S_{LMK}}$

$$\frac{4}{64:9} = \frac{1}{S_{LMK}}$$

$$S_{LMK} = \frac{64}{4 \cdot 9} = \frac{16}{9}$$

$$\angle M'K'L' - \text{острый (гла. (LMK))}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}, S_{LMK} = \frac{16}{9}$



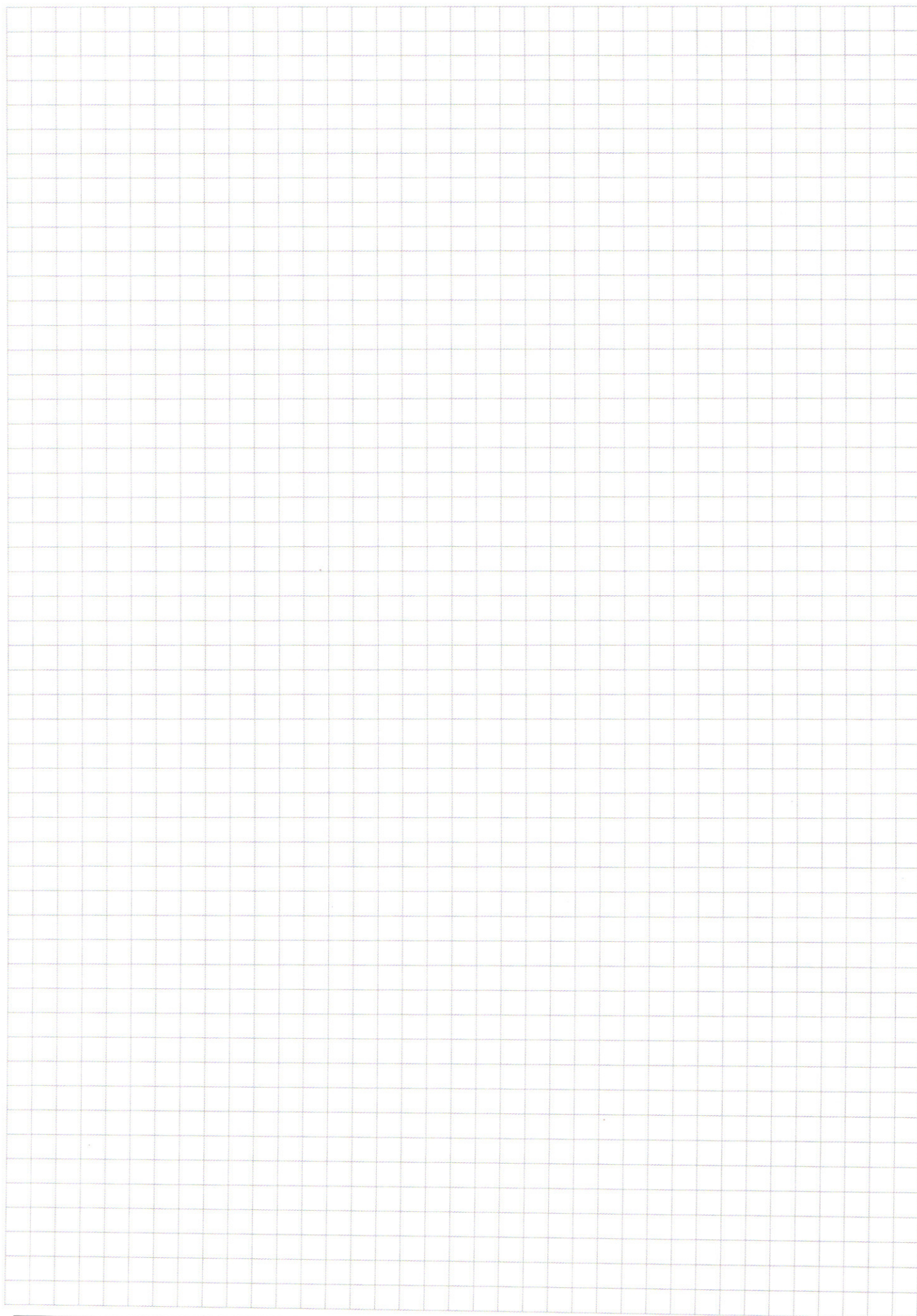
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \sin(4x + \varphi) + \sqrt{2} \sin(7x + \varphi') = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \varphi' = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \varphi' = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

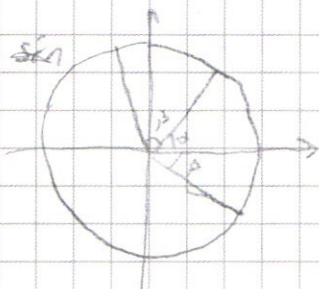
$$\varphi = \frac{3\pi}{4} \quad \varphi' = -\frac{\pi}{4}$$

$$2 \sin\left(\frac{14x + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{8x + \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 4x$$

$$\sin 3x + \sin(-11x) = 2 \sin(-4x) \cos(7x)$$

$$2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos^2 7x + \sin^2 7x)$$



$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = (1 + \cos(\alpha + \beta))^2 + \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$1 + \cos y = 2 \cos \frac{y}{2} = \cos y + 1$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x + 2 \sin(-4x) \cos(7x) = \sqrt{2} (\cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x) (\sin 7x + \cos 7x)$$

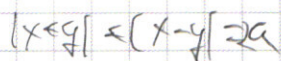
$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad (+)$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\sin 7x - \cos 7x)$$

$$-2 \sin 4x = 2 \sin(7x + \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$



Q. 15

$$(-a) \sin \alpha = b \cos(\alpha)$$

↓
a

3



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 27 \\ + 875 \\ \hline 250 \\ 3375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55593111 \\ \hline 33311 \end{array}$$

$$C_8^3 = \left(C_5^3 \cdot 2 + C_5^3 \right) = 3 \cdot C_5^3 = C_5^3 =$$

$$= 3 \cdot \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 3 \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2} = \frac{3 \cdot 8!}{4 \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4} =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40 \cdot 42 = 1680$$

$$2 \sin\left(\frac{74x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{8x}{2}\right) = \cos 14x$$

$$0) \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sim 5^+$$

$$(4-y)^2 - 2(4-y)y - 4(4-y) + 3y^2 + 12y =$$

$$= 16 - 8y + y^2 - 8y + 2y^2 = 16 + 4y - 5y^2 + 12y =$$

$$= 16 - 8y + 3y^2 - 8y - 16 + 4y - 5y^2 + 12y =$$

$$= -8y - 8y + 4y + 12y = 0$$

$$\sim 3$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} = y^{1/3} x^{-1/3}$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$x > 0, y > 0$$

$$y^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + x(-2y-4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y^2 - 2y + 1) = 4(y-1)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 4|y-1|}{2} = y+2 \pm 2|y-1|$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = -2y + 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{5}{4-y}\right)^{\lg 3} = 5^{\lg 3}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{\lg 3y} = 5^{\lg 3y^2}$$

$$5^{\lg 3y} = 3^{\lg 3} \cdot 5^{\lg 3 + 4 \lg y}$$

$$5^{\lg 3 + 4 \lg y} = 3^{\lg 3} \cdot 5^{\lg 3y} \cdot 5^{\lg 3 + 4 \lg y} \quad y \neq 0$$

$$5^{\lg 3} = 3^{\lg 3}$$

$$2 \lg 3 - \lg 3 = \lg 3 - \lg 3y$$

$$2 \lg y = \lg 3y$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3$$

$$\left(\frac{5}{4-y}\right)^{\lg 4-y} = 5^{2 \lg (4-y)y}$$

$$\lg$$

$$y=1?$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{\lg 3}$$

$$\lg \left(\frac{5}{4-y}\right) \cdot \lg (4-y) = \lg 4y - 2 \lg (4-y)y$$

$$(5 - \lg_5(4-y)) \cdot \lg (4-y) = 2 \lg ((4-y)y)$$

$$(5 - \frac{\lg 4-y}{\lg 5}) \cdot \lg (4-y) = 2 \lg (4-y) + 2 \lg y$$

$$(5 - \frac{a}{b}) \cdot a = 2a + 2b$$

$$5a - \frac{a^2}{b} = 2a + 2b$$

$$a^2 \cdot \frac{1}{b} - 3a + 2b = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{1}{b} = 1$$

$$a = \frac{(3 \pm 1)b}{2}$$

$$\begin{cases} a=2b \\ a=b \end{cases}$$

$$\frac{4b^2}{b} - 6b + 2b = 0$$

$$b - 3b + 2b = 0$$

$$\lg (4-y) = \lg y$$

$$y \neq 0$$

$$\lg (4y) = 2 \lg y$$

$$4-y=y^2$$

$$y^2 - y - 4 = 0 \quad D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^y < 70 + (2^x - 1) \cdot x$$

$$\sin(x+\beta) = \sin x \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \sin$$

$$\sin(x-\beta) = \sin x \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos x$$

$$\sin(x+\beta) + \sin(x-\beta) = 2 \sin x \cdot \cos \beta$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$



$$S = \frac{1}{2} ab \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha + \frac{1}{2} b^2 \cos \beta$$