

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4/1

Заметим, что $3345 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$

произведения цифр

Заметим, что все восьмизначные числа имеют вид $1^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot 3^{a_3} \cdot \dots \cdot 9^{a_9} \cdot 0^{a_0}$ если есть хотя бы 1 ноль, то все произведение равно 0. $\Rightarrow$ в наших восьмизначных числах нет 0.

Наши восьмизначные числа могут состоять из цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 7, 7 или из цифр 1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 9, потому что произведение цифр должно быть равно $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$, а каждая цифра меньше 9 и больше 0 $\Rightarrow$ цифры могут быть 3, 3, 3, 5, 5, 7, 7 либо можно сгруппировать 2 цифры $3 \cdot 5 = 15 > 9$

$3 \cdot 7 = 21 > 9$ $3 \cdot 3 = 9 = 9$ $5 \cdot 7 = 35 > 9$, заметим,

что можно заметить уже 3 на одну 9, чтобы числа были 8 значные, нужно к двум наборам цифр добавить 1, что бы цифр стало 8. 1 не влияет на произведение, а все остальные цифры либо увеличивают в k раз, либо обращают произведение в 0. Теперь осталось посчитать сколько существует 8 значных чисел состоящих из одного из двух наборов цифр.

~~$$\sin 7x + \cos 7x$$~~

$$(-2 \sin 4x - \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x))(\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-2 \sin 4x - \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) = 0 \quad \text{или} \quad \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cdot \sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cdot \cos 7x \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad 4x = \pi - \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$11x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

Никаких других ограничений по x нет $\Rightarrow$ все x подходит.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Задача №3

Заметим, что $\begin{cases} x > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ далее будет видно, что это следует из условий.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1, 3, 3, 3, 5, 5, 7, 7

1 на 8, 3 на 8, 3 оставшихся без учёта порядка, 5 на 2 от без учёта пор.

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 30 \cdot 56 = 1680$$

и 7 на 2 от без учёта пор.

и набор 1, 1, 3, 5, 5, 7, 7, 9

1 на 2 и 8 без учёта порядка, 3 на 6 и 5 на 2 от без учёта порядка,
7 на 2 от без учёта порядка, 9 на ~~оставшихся~~.

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 90 \cdot 56 = 5040$$

Эти два набора ни как друг от друга не зависят $\Rightarrow$
можно сложить количество чисел

$$5040 + 1680 = 6720$$

Ответ: 6720.

Задача №2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \cos 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

Если $\sin 7x + \cos 7x = 0$, то $7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$
 $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

Решим для начала 1 ~~равенство~~ уравнение

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x y}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x}$$

Прологарифмируем левую и правую часть.

$$\lg y^{5 \lg x} = \lg y^{2 \lg x y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\lg y \cdot 5 \lg x = \lg y^{2 \lg x y} + \lg x \cdot \lg x$$

$$\lg y \cdot 5 \lg x = 2(\lg x + \lg y) \lg y + (\lg x)^2$$

$$2(\lg y)^2 - 3 \lg x \cdot \lg y + (\lg x)^2 = 0$$

$$\left(\frac{3 \lg y}{2} - \lg x\right)^2 - \frac{1}{4}(\lg y)^2 = 0$$

$$(\lg y - \lg x)(2 \lg y - \lg x) = 0$$

$$\lg y = \lg x$$

или

$$2 \lg y = \lg x$$

$y > 0$

$$y = x$$

$$y^2 = x$$

$x > 0$

Подставим во 2 уравнение

$$\begin{cases} y = x \\ y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ 4y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 - 2xy^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \text{ или } y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y=x \\ y=0 \text{ не подходит} \\ y=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

Итак из найденных
решений не противоречит
условию $\Rightarrow$ Ответ: $(2; 2);$
 $(9; 3); \left(\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2, -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right).$

Задача №5

Решить нужно графическим методом.

Заметим, что 2 уравнение - это окружность
радиуса $\sqrt{10}$, сдвинутая относительно Ox и Oy и
смещенная по координатам $(4; 3)$ т.е. центр
в точке $(4; 3)$.

Вторая штука это какая-то вот такая дуга

Перебором находим $y=3$
и даем стабильно

$$\begin{cases} y^2=x \\ y=3 \\ y^2+y-4=0 \end{cases}$$

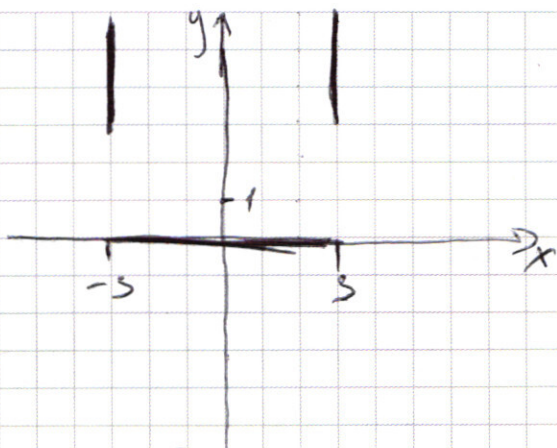
$$\begin{cases} y^2=x \\ y=3 \\ y=\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Решим, что
 $y > 0$, а

$$\sqrt{17} > \sqrt{16} \geq 4 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \\ x=\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \\ y=\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ - не подходит,
т.к. $y < 0$.



Попробую доказать, что она выглядит именно так

Пусть $y=0$, тогда $|3-x|+|-3+x|=6$

Если $x > 3$ или $x < -3$, то $|-3+x| > 0$

$$|3-x| > 6, \text{ а } |3-x| > 0$$

или $x < -3$, то

$$|3-x| > 0, \text{ а } |3-x| > 6.$$

Иначе

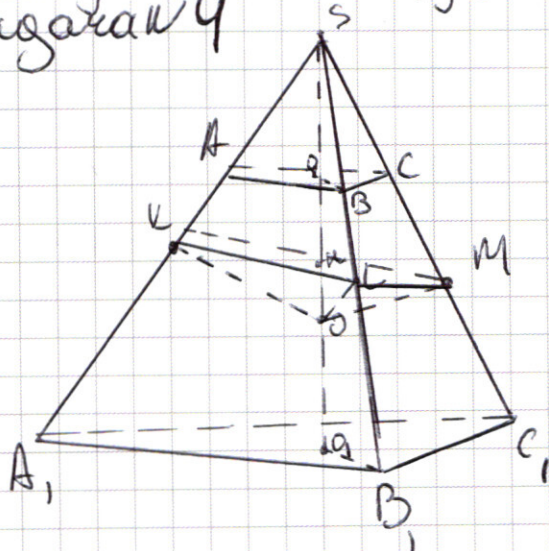
$$|3-3|+|-3+3|=6$$

если $y \neq 0$, то если, то

$$y-3 < 0 \Rightarrow$$

$$y-3-x < -x \Rightarrow |y-3-x| > x, \text{ при } x$$

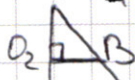
Задача 4



Пусть верхнее сечение касающаяся ~~середин~~ перпендикулярное ~~SO~~ будет ABC, а нижнее A1B1C1.

Рассмотрим плоскость

$\triangle SOB$



Заметим, что

$SO \perp SB$ - общий член

$SO \perp SB$ и $SO \perp SB$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Аналогично рассматриваем для SO_1C_1 и SO_1A_1 ,

и получаем, что $\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SC}{SC_1}$

$\angle B_1SC_1$ - общий $\Rightarrow \triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC$ по 2 сторонам и
углу между, аналогично для всех остальных

и получаем $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{CA_1} = \frac{AB}{A_1B_1} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$,

причем $k = \frac{1}{2}$, т.к. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{4} = k^2 \Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SB}{SB_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{SO_2}{SO_1} = \frac{1}{2}$

$OO_2 = R$ и $OO_1 = R$, $\nmid$

Пусть $SO_2 = 2a$, тогда $SO_1 = 4a$, $OO_2 = 2a \Rightarrow R = a$

AS - касательная к сфере $\Rightarrow OK \perp KS$
 $SO = 3a$
 $KO = R = a$

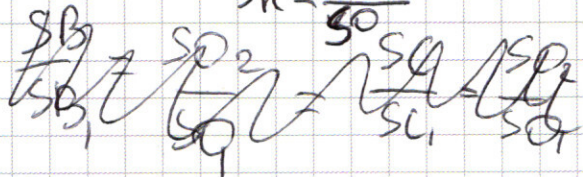
$\Rightarrow \cos \angle KOS = \frac{1}{3}$ $\sin \angle KSO = \frac{1}{3} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$
 $\angle KOS = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

$KS = \sqrt{9a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$

Заметим, что SL и SM - тоже касательные $\Rightarrow$
 $SL = SM = SK = 2\sqrt{2}a$.

Заметим, что КЛМ - выпуклый треугольник
 Пусть K - точка пересечения SD , и плоскости KLM

$$SK = \frac{SK \cdot KD}{SD}$$



Задача 7.

Заметим, что если $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$, и

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x, \text{ то } 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

Если мы решим данное неравенство,
 то мы сможем найти промежуток в который
 лежит y .

$$70 + 2^{64}(x-6) - x - 2^x > 0$$

Это верно при $x \in [67, 69]$, так данная
 функция ~~монотонно~~ параболы

и при $x=6$ $f(x)=0$, что не подходит

при $x=7$ $f(x)>0$, а при $x=10$ $f(x)=0$

а при $x=69$ $f(x)>0$. При $10 \leq x < 7$, то

не сложно проверить, что $f(x) < 0$.

Осталось проверить, все x в ~~неравенстве~~ ~~уравнении~~

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^{58} (1 + 3 \cdot 2^{7}) < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

Ответ: * 63 решения. минимум.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\cos 7x \cdot \sin 4x$$

$$-2\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2\sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2\sin 4x = \sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x$$

$$\sin 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x$$

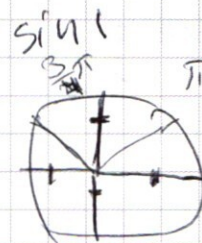
$$\sin 4x = \cos \frac{\pi}{4} \sin 7x - \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 7x$$

$$\sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4})$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \quad \text{или} \quad 4x = \pi - 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$



$$\log y = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

$$y = 10^{\sqrt[3]{\frac{5}{4}}}$$

$$\frac{y^{5 \log x}}{x^{\log x}} = y^{\log x^2 + \log y^2}$$

$$y^{5 \log x} = y^{2 \log x} \cdot y^{\log y^2} \cdot x^{\log x}$$

$$\log a^b (\log y)^3 = \frac{5}{4}$$

$$\log 5 \log y = (\log y)^4$$

$$5 \log x \cdot \log y = 2 \log x \cdot \log y \cdot \log y^2 \cdot \log y \cdot \log x \cdot \log y$$

$$y^5 \log x = y^{2 \log x y} \cdot \log x \cdot \log x$$

$$(x^2 - 4y) (\log y^5 - \log x) \log x = 2 \log x y \cdot \log y$$

$$5 \log x \cdot \log y = 2 \log x y + \log y \cdot \log x \cdot \log x$$

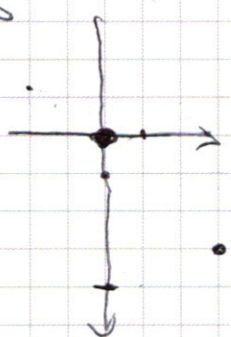
$$5 \log y = (2 \log x + 2 \log y) \log y \log x$$

$$(x^2 - 4xy) - 3(y^2 - 4xy) - 2xy$$

$$2 \log x^2 + 2 \log x \cdot \log y = 5$$

$$a = \log y$$

$$b = \log x$$



$$\log x = 2 \log y + \sqrt{2} \log y$$

$$\log x = \log y^{\sqrt{2}+2}$$

$$x = (y^2 \cdot y^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}+2}} = y^2$$

$$x = y^2$$

$$x = y^2$$

$$y^{2(\sqrt{2}+2)} - 2y^{(2\sqrt{2}+1)} - y^{2+2\sqrt{2}} - 3y$$

$$y^{5 \log x} = y^{2 \log x y}$$

$$2(a+b) \cdot a + b \cdot b$$

$$(5a - b)b = 2(a+b)a$$

$$5ab - b^2 = 2a^2 + 2ab$$

$$2a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

$$\frac{a^2 + 10ab + b^2}{a^2 + 10ab + b^2}$$

$$2a^2 - 3ab + b^2$$

$$(2a + b)^2 - 2a^2 = 0$$

$$(2a - 5a + 5) = 0$$

$$(2a + 5a + 5) = 0$$

$$\log y \cdot 5 \log x$$

$$\log x = \log y$$

$$\frac{1}{4}a^2$$

$$(a-b)(a-b)$$

$$2 \log y = \log x$$

$$y^2 = x$$

$$y^2 = x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, including various calculations, trigonometric identities, and diagrams.

Top Left: A series of numbers: 3345, 1125, 441, 36, 49, 8.1, 4.9, 3.6, 8.1, 4.41, 1.125, 3345. Below them are some smaller numbers: 3, 5.5, 9, 8.1, 4.9, 3.6, 8.1, 4.41, 1.125.

Top Middle: A sequence of numbers: 98755311, 33475531. Below them is a fraction: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b \cdot 5}$.

Top Right: A diagram of a circle with a triangle inscribed in it. To the right of the circle is a vertical line with a horizontal segment at the top, labeled $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Middle Left: A diagram of a triangle with a line segment drawn from one vertex to the opposite side. Below it is a fraction: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b \cdot 5}$.

Middle Right: Trigonometric identities: $\sin x = -\cos x$, $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

Bottom Left: A series of numbers: 6+6+5+5+5+5+3, 18, 20, 35, 1680, 540, 4500, 5040, 1680, 3360, 0. Below them are some smaller numbers: 18, 20, 35, 1680, 540, 4500, 5040, 1680, 3360, 0.

Bottom Middle: Trigonometric identities: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$, $\cos - \sin$, $\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x)$, $-1 - 2 \sin$, $\sin x (7 - 4) - \sin(7 + 4) = -2 \cos x \cdot \sin 4x$.

Bottom Right: A diagram of a circle with a triangle inscribed in it. To the right of the circle is a vertical line with a horizontal segment at the top, labeled $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{35}{8} < \frac{1}{4}$$

$$35 - 12$$

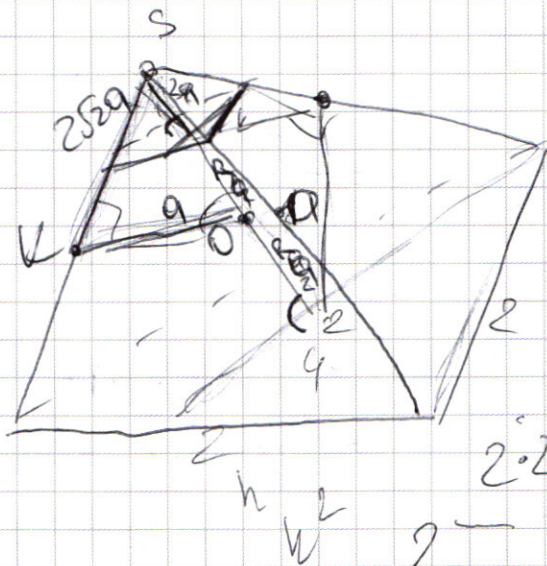
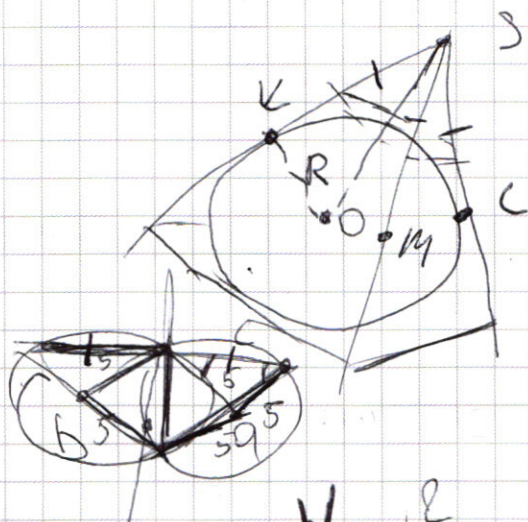
$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg xy}$$

$$y=0 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

ЧР



$$a^2 + b^2 = 4c^2$$

$$c^2 + c^2 = 1,5a^2 - \frac{a^2}{2}$$



$$9a^2 - a^2 = 252a$$

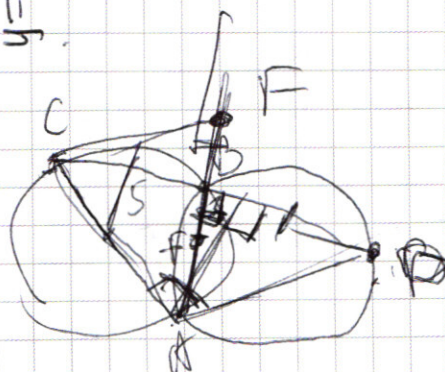
$$S = \frac{V_{abc}}{4R}$$

$$a^2 + b^2$$

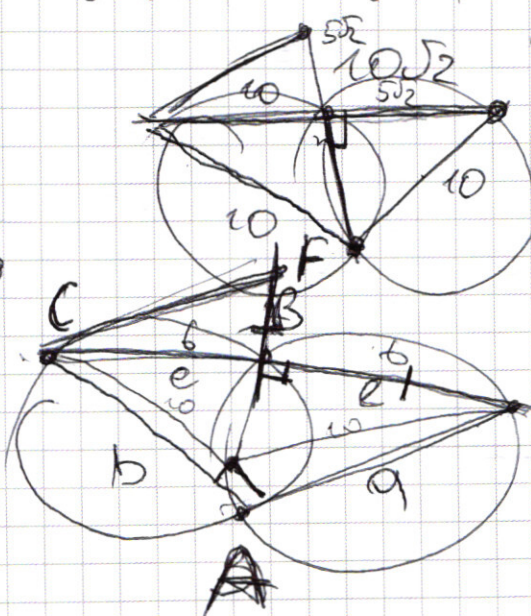
$$(c+e)^2 =$$

$$y^4 - 2y^3 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y=0$$



$$c^2 + e^2 =$$





$$a^2 - (b+c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc$$

$\frac{250}{2} = 125$

$$2529 = 29 \cdot 87$$

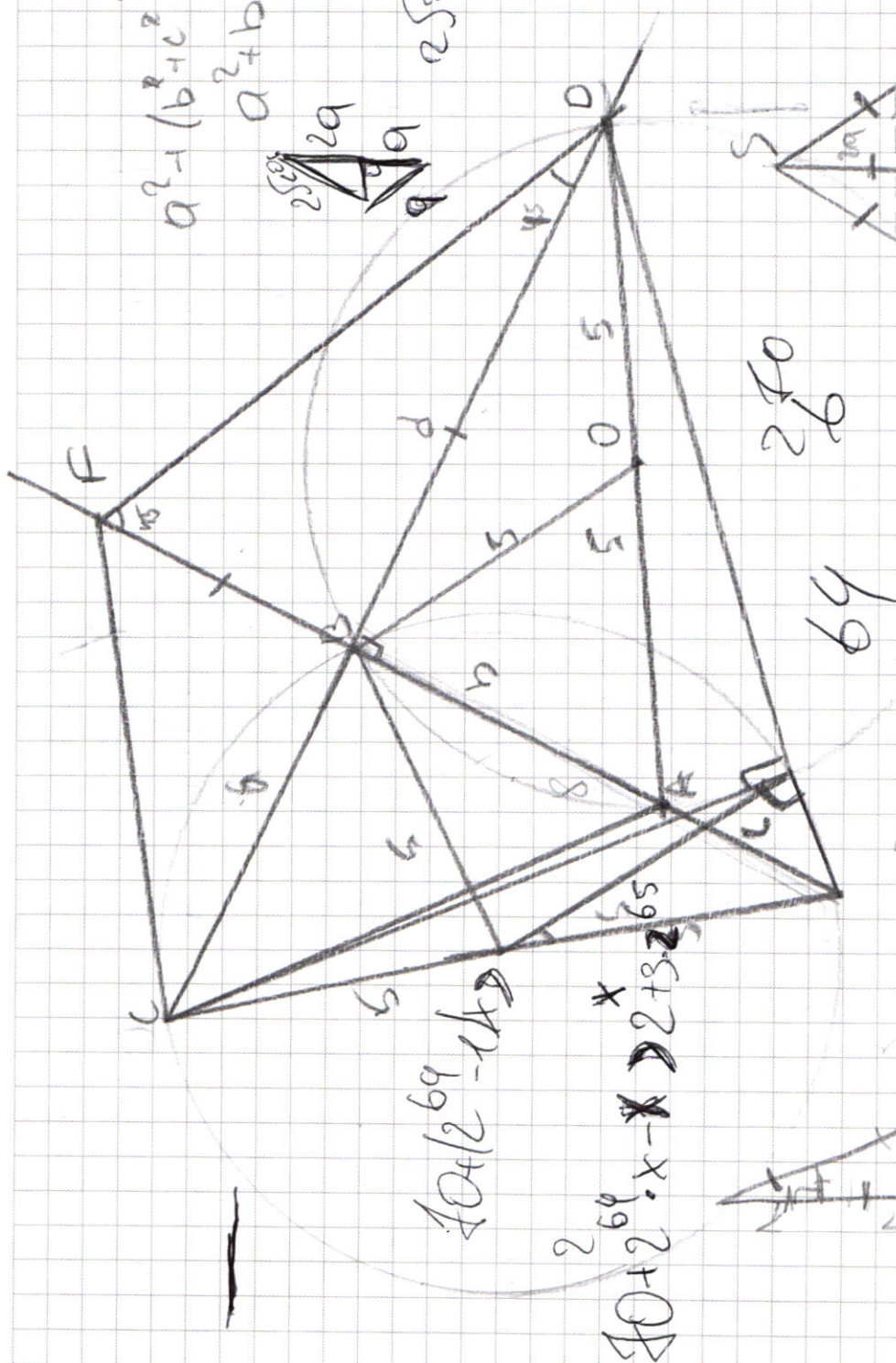
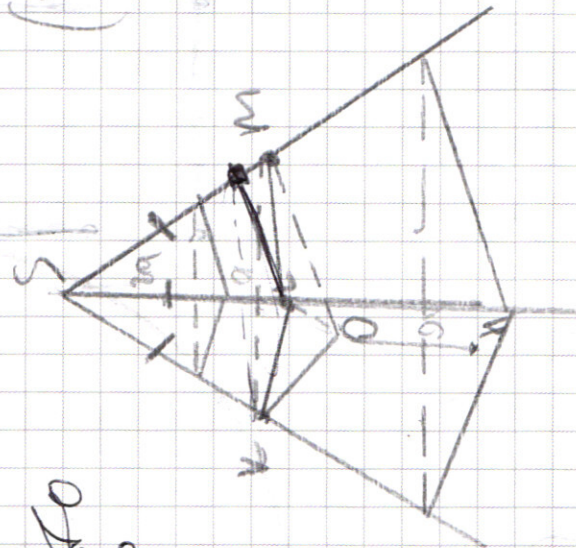
$$9 - 2 + 5$$

$$52 = 10 + 29$$

20

$$9(25+52)$$

5/15/21



104/269-142

$$20 + 2^{64} \cdot x - \cancel{22} + 3.265$$

2020

40

~~8~~

$$f(x) = 10 + 2x^6 - x^2(x-6)$$

64

70-10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

