

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол $\angle KSO$ и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

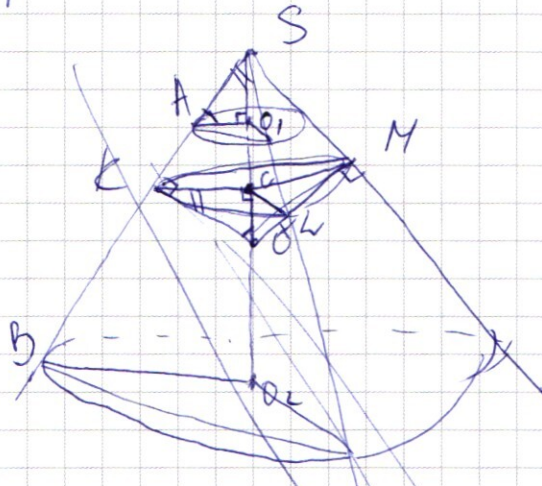
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\angle KSO - ?$

$$S_1 = \pi r_1^2 = 4 \Rightarrow r_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

$$S_2 = \pi r_2^2 = 9 \Rightarrow r_2 = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$$

$$AO_1 = r_1$$

$$BO_2 = r_2$$

$$R = OK = OL = OM = OO_1 = OO_2$$

- радиус сферы.

$\triangle BSO_2 \sim \triangle ASO_1$ (по углам)

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{AO_1}{BO_2} = \frac{2}{3}$$

$$OO_2 = SO_2 - SO_1 = \frac{3 \cdot SO_1}{2} - SO_1 = \frac{SO_1}{2}$$

$$OO_2 = 2R \Rightarrow R = \frac{SO_1}{4}$$

$\triangle ASO_1 \sim \triangle OSK$ (по углам)

$$\frac{AS}{OS} = \frac{SO_1}{SK} = \frac{AO_1}{OK} ; \quad \frac{AS}{SO_1 + OO_2} = \frac{AO_1}{OK}$$

$$\frac{AS}{SO_1 + \frac{SO_1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot \frac{SO_1}{4}} \Rightarrow \frac{AS \cdot 4}{5SO_1} = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{\pi} \cdot SO_1}$$

$$AS = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$$

$$\sin \angle ASO_1 = \sin \angle KSO = \frac{AO_1}{AS} = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 10} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

Пусть С - центр. С - центр треугольника

Пусть С - центр $\triangle KLM$.

из подобия $\triangle OKS$ и $\triangle AOS \Rightarrow \angle AOS = \angle OSK$

6D-W

~~DSK~~ $\rightarrow$ OCK

$$\sin \angle CKO = \frac{CO}{KO} \Rightarrow CO = R \cdot \sin \angle CKO$$

$$CO = R \cdot \sin \angle ASO$$

6D-W ASO₁

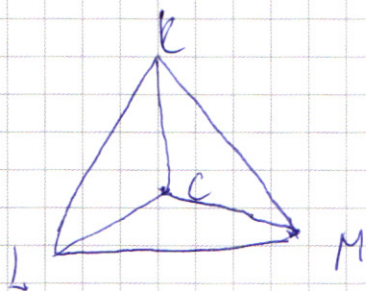
$$SO_1 = \sqrt{\frac{100}{\pi} - \frac{4}{\pi}} = \sqrt{\frac{96}{\pi}} = 4\sqrt{\frac{6}{\pi}} = R$$

$$CO = 4\sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$ 6D-W OCK

$$CK = \sqrt{\frac{96}{\pi} - \frac{16 \cdot 6}{\pi \cdot 25}} = \sqrt{\frac{96}{\pi} - \frac{6}{\pi \cdot 25}} = \sqrt{\frac{96}{\pi} \left(1 - \frac{1}{25}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{96 \cdot 24}{\pi \cdot 25}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 24 \cdot 4}{\pi \cdot 25}} = \frac{48}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a^2}{2}$$

$$\frac{a^3}{R} = \sqrt{3} \cdot a^2$$

$$a = R \cdot \sqrt{3} =$$

$$a = R \cdot \sqrt{3} = \frac{48}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{48 \cdot 48}{25} \cdot \frac{3}{\pi} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1728\sqrt{3}}{25\pi}$$

ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$

$$S_{KLM} = \frac{1728\sqrt{3}}{25\pi}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 8

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\begin{array}{r} 16875 \quad | \quad 5 \\ 15 \quad 3375 \quad | \quad 5 \\ 18 \quad 30 \quad | \quad 5 \\ 15 \quad 57 \quad | \quad 5 \\ 37 \quad 35 \quad | \quad 5 \\ 35 \quad 25 \quad | \quad 5 \\ 25 \end{array}$$

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$\Rightarrow$ в концерте есть шесть
1 единица.

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 210 \\ 76 \\ 126 \\ 21 \end{array}$$

$$(3360)$$

$$= 30 \cdot 7 \cdot 16 = 210 \cdot 16$$

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (2 \cos 5x - 1) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (2 \cos 5x - 1) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x)) = 0$$

$$\cos x$$

$$\sin 5x = \cos 5x$$

$$1) \cos x = 0$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$\rightarrow x$

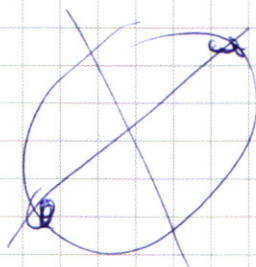
$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{1} \end{cases}$$

$$\sin x - \cos x = 0$$

$\sin$



$$\begin{aligned} \frac{1}{10} + \frac{n}{2} \frac{3}{8} + k \\ 4 + 8n = 15 + 40k \end{aligned}$$

$$8n - 40k = 11$$

$$\frac{5}{8} + k = \frac{1}{10} + \frac{n}{8}$$

$$25 + 40k = 4 + 8n$$

рез.

первое и второе

имеют общие точки с окружностью

$$R = 2$$

$$2 = 6a$$

$$a = 4$$

$$2 \leq \sqrt{36 + 186} \leq \sqrt{232}$$

$$(x-6)^2$$

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = 232$$

$$36 + 14^2 = 232$$

$$3 \text{ и } 4$$

$$40 < a < 120$$

$$36 + 14^2$$

$$(x+6)^2 + (y-8)^2 = 232$$

$$36 + 14^2$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{1}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

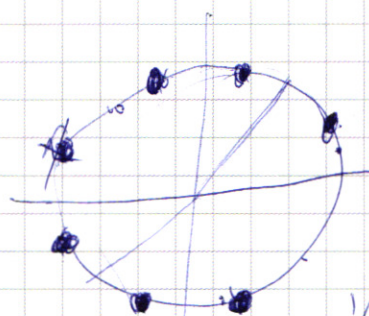
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{5\pi}{8} + \pi n$$



$$\frac{3\pi}{10}, \frac{4\pi}{10}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{n}{2}$$

$$\frac{1}{10} + \frac{n}{2} \frac{1}{8} + k$$

$$4 + 8n = 5 + 40k$$

$$8n - 40k = 1$$

$$\frac{1}{8} + k = \frac{1}{10} + \frac{n}{8}$$

$$\frac{1}{8} + k = \frac{1}{10} + \frac{n}{8}$$

$$\frac{1}{8} + k = \frac{1}{10} + \frac{n}{8}$$

$$\frac{1}{8} + k = \frac{1}{10} + \frac{n}{8}$$

$$(12; 6) \text{ корни}$$

$$7 < a \leq 232$$

$$a = 4 \text{ 1 корень}$$

$$a = 232 \text{ 0 корней}$$

$$36 + 18^2 = 20$$

$$18^2 + 14^2$$

$$11 + 6 = 18$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\cos x - \ln \sin x) (\omega_2 x - \omega_1 (x - \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\int \left(\frac{x^4}{y^2} \right) \log y = (-x) \log(-xy)$$

$$dy^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$g^2 - 2xy + y^2 x^2 + y^2 = 0$$

$$y^2 - xy + y = 0$$

$$y^2 - xy + \frac{x^2}{4} + y - \frac{(x^2)}{4} - 4x - 8y = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{y} \right)^2 \log y = (-x) \log(-x) + \log y$$

$$\left(\frac{x^2}{y} \right)^2 \log y = (-x) \log(-x) + (-x) \log y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2 - x} \right) \log y = (-x) \log(-x)$$

$$\left(\frac{-x^3}{y^2} \right) \log y = (-x) \log(-x)$$

$$\log^2 y$$

$$\log y = a$$

$$\log x = b$$

$$\log y \cdot \log \left(\frac{x^3}{y^2} \right) = \log(-x) \cdot \log(-x)$$

$$\log y \cdot (\log(-x^3) - \log y^2) = \log(-x) \cdot \log(-x)$$

$$\log y (3 \log(-x) - 2 \log y) - \log(-x) = 0$$

$$3ab - 2b^2 - a^2 = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\log y = \log(-x)$$

$$\log y = \log x^2$$

$$\begin{cases} y = -x & (1) \\ y = x^2 & (2) \end{cases}$$

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy)$$

$$45 - 4 - \frac{1}{2} = 0$$

$$5 > 0$$

$$-xy > 0$$

$$xy < 0$$

$$x < 0$$

$$16 - 4 - 9 - 4 = 0$$

$$-\frac{2}{8} - \frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 4$$

$$+15 - 4$$

$$2 - 1 - 4 - 5$$

$$a \log a$$

$$-2 - 1 + 5 - 4$$

$$(1) \quad 2x^2 + x - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0 \quad x = 0 \text{ or } x = 2$$

$$2x(x-2) = 0$$

$$2x^4 - x^3 - x^2 - 4x - 8x = 0$$

$$2x^4 - x^3 - 9x^2 - 4x = 0$$

$$2x^3 - x^2 - 9x - 4 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$(x+1) \left(x^2 - \frac{1}{2}x - 4 \right) = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$\frac{SO_1}{SK} = \frac{8}{\sqrt{\pi} \cdot SO_1 \cdot SK \cdot SO_1 \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \frac{SO_1}{4}$

$\frac{SO_1}{SK} = \frac{4}{SO_1 \cdot \sqrt{\pi}} \quad SO_1^2 = SK \cdot \frac{8}{\sqrt{\pi}} = \frac{16 \cdot 6}{\sqrt{\pi}}$

$\sin \angle KSO_2 = \frac{KO}{SO} = \frac{AO_1}{AS} = \frac{SO_1 \cdot 8}{SO_1 \cdot \sqrt{\pi}}$

$AX^2 = 2R_1^2 - 2R_1 \cdot \omega_2 = 2R_1^2(1 - \omega_2)$

$BY^2 = 2R_2^2(1 - \omega_2)$

$\frac{AX}{BY} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{SO_1}{4}$

$\frac{AS}{KS} = \frac{AX}{KL}$

$\frac{KO}{SO} = \frac{AO_1}{AS} = \frac{AO_1}{AS} = \frac{10}{\sqrt{\pi}} = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\sqrt{\pi} \cdot SO_1 = \frac{SO_1}{SK}$

$SK = \frac{SO_1^2 \cdot \sqrt{\pi}}{8}$

$AS = \frac{10}{\sqrt{\pi}}$

$\sin \angle = \frac{2 \cdot \sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi} \cdot 10} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

2) ① $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
 $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
 $4 \cdot 3$
 $10 \cdot 48 \cdot 7$
 $2 \cdot 480 \cdot 7$
 $2 \cdot 3360$

$SK = \frac{\sqrt{\pi} \cdot 6 \cdot 16}{\pi \cdot 8} = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\angle CAD = 50^\circ$
 $BF = BD$
 $CF = 1$
 $\frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}$
 $AC = x$
 $AD = x$
 $BC = 1 + x$
 $\frac{1+x}{x}$

$R = 13$
 $\frac{5x}{4}$

$\frac{AC}{AD} = \frac{2}{3}$
 $2 \cdot \sin \alpha = 13$
 $\frac{BC}{BD} = \frac{1 \text{ mps}}{\omega \beta} = 4 \beta$
 $\sin^2 (\sin \beta + \omega \beta)^2 =$

$2 \cdot 4 \cdot \sin^2 \cdot 16 \beta^2 = 1$
 $= (2 \sin \beta 13 + 2 \sin \beta 13)^2$
 $2 \cdot 4 \cdot \sin^2 \cdot 16 \beta^2 = 1$
 $2 \beta^2 = 1$
 $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\frac{2 \sqrt{5}}{2}$
 $\frac{56}{2} \sin$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

15

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1)

$$\begin{cases} x-6-y > 0 & y < x-6 \\ x-6+y > 0 & y > 6-x \end{cases}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$a = 12^2$$

$$2x-12 = 12$$

$$x-6 = 6$$

$$x = 12$$

6-!

$$(2) \begin{cases} x-6-y > 0 & y < x-6 \\ x-6+y < 0 & y < -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$y = x-6$$

$$\begin{cases} x-6-y < 0 & y > x-6 \\ x-6+y < 0 & y < -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$x = 0$$

1) уравнение (1) задает квадрат

2) окружности с центрами в точках

$(6, 8)$ $(-6, 0)$ $(-6, -8)$

чтобы они все пересекались

$$1) R = 2$$

$$a = R^2$$

$$a = 4$$

2) минимизируем при

$$r_2 < a < r_2^2$$

$$3) \sqrt{400} < a < \sqrt{18^2+4^2} = \sqrt{18^2+14^2}$$

$$a > \sqrt{18^2+4^2} = 0 \text{ или } a < \sqrt{18^2+4^2}$$

$$\sqrt{256} < a < \sqrt{18^2+14^2}$$

$$\int \Delta CP = \frac{AC \cdot CP}{2} \cdot \sin \angle ACP$$

$$2b^2 = 34^2$$

$$b = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle ACP = (45 + 5) = 2$$

$$\sin \beta = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$= \sin(45 + \arcsin \frac{12}{13})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{17}{13}$$

$$\frac{17}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{20} + \frac{n}{5} = \frac{1-2k}{3}$$

$$3 + 12n = 5 - 40k$$

$$12n + 40k = 2$$

$$6n + 20k = 1$$

$$2kSO = 1$$

$$SO_1 = 4$$

$$OR_1 = 23$$

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{41}}$$

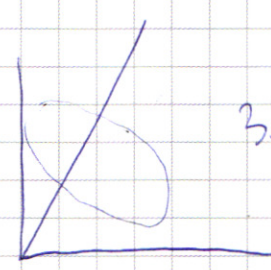
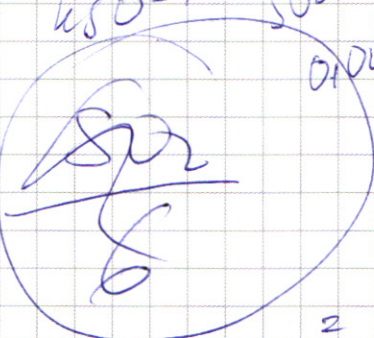
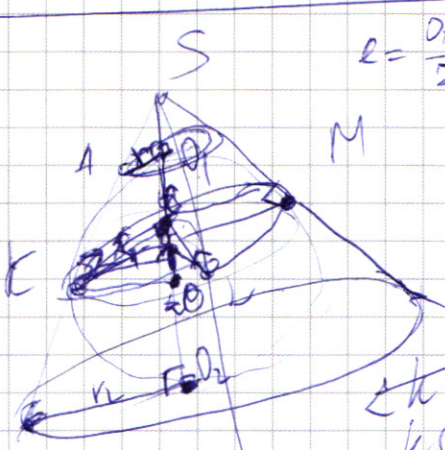
$$r_2 = \frac{3}{\sqrt{41}}$$

Cor

$$\triangle ASO_1 \sim \triangle OSK$$

$$\frac{AS}{OS} = \frac{SO_1}{SK} = \frac{AO_1}{OK}$$

$$= \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{41} \cdot SO_1}$$



$$3SO_1 + 2SO_2 = 2SO_1$$

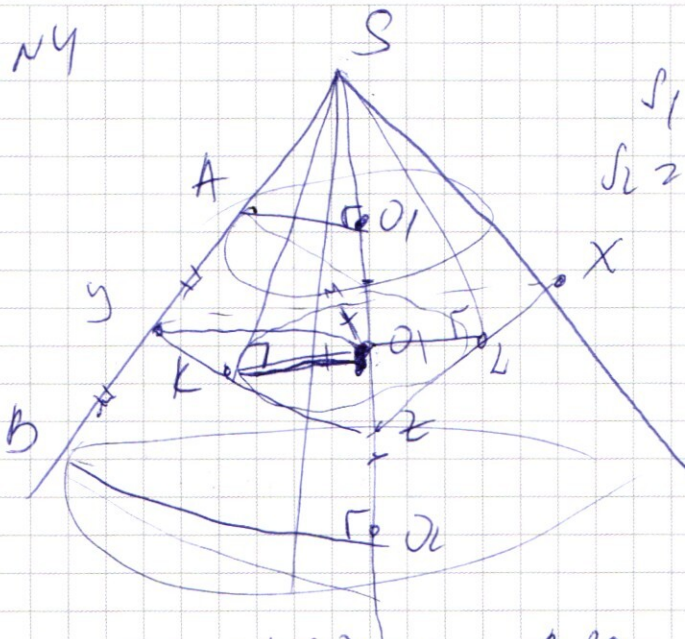
$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$$

$$SO_1 = SO_2 - \frac{SO_1}{2}$$

$$= SO_2 - \frac{SO_2}{3}$$

$$= \frac{2}{3} SO_2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S_1 = \pi r_1^2 = 4 \Rightarrow r_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$S_2 = \pi r_2^2 = 9 \Rightarrow r_2 = \frac{3}{\sqrt{\pi}} = 3\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$$R = O_1K = O_1O = O_2L$$

$$\angle KSO = ?$$

$$\sin \angle KSO = ?$$

$$\triangle ASO_1 \sim \triangle BS O_2 \text{ (по углам)}$$

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{AS}{BS} = \frac{2}{3}$$

$$O_1O_2 = SO_2 - SO_1 = \frac{3SO_1}{2} - SO_1 = \frac{SO_1}{2}$$

$$O_1O_2 = 2R = O_1O + O_2O \Rightarrow R = \frac{SO_1}{4} = KO$$

$$SO = SO_2 - O_2O = SO_2 - \frac{O_1O_2}{2} = \frac{3SO_1}{2} - \frac{SO_1}{4} =$$

$$= \frac{5SO_1}{4} \Rightarrow \text{в } \triangle KSO \quad \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO}$$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{SO_1 \cdot 4}{4 \cdot 5 \cdot SO_1} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

Пусть плоского сечения плоского KLM -
BYX.

~~бд~~ А

→ ASD, N Δ YSD

$$\frac{AO_1}{y_0} \approx \frac{AS}{y_s} = \frac{SO_1}{y_0} \approx \frac{4}{5}$$

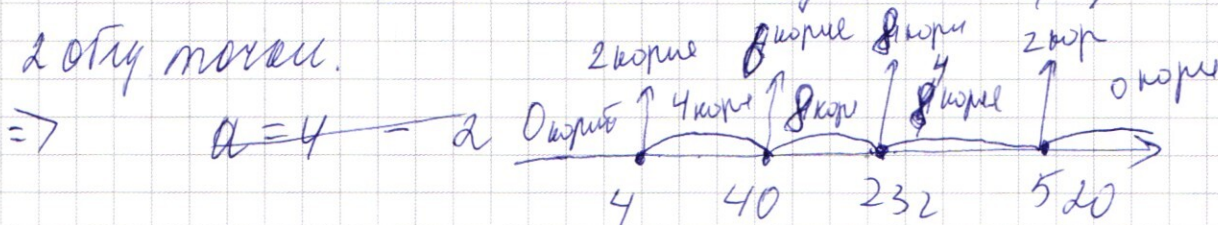
$$\frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot y_0} \approx \frac{4/2}{5}$$

$$y_0 \approx \frac{5}{2 \cdot \sqrt{\pi}}$$

ответ. $\angle KSO \approx \arcsin \frac{1}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

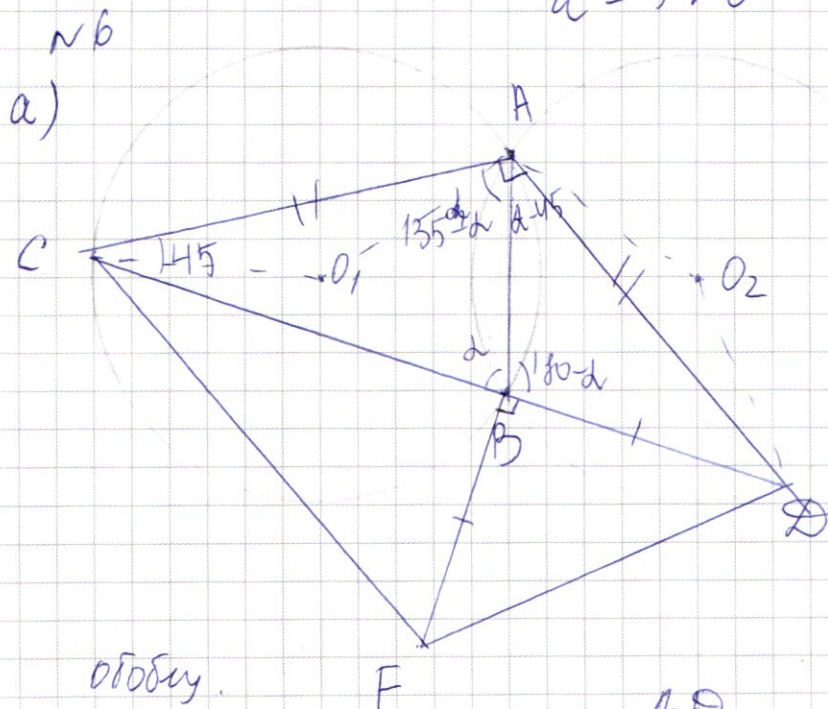
окружности 3 4 4 при $a = 40$ имеют две общ. точки
ABCD, при $40 < a < 520$ 4 общие точки, при $a = 520$
2 общ. точки.



Ответ.

$$a = 4$$

$$a = 520$$



общ. $\#$ по теор. синусов $\frac{AD}{2 \sin \angle ABD} = R = \frac{AC}{2 \sin(180^\circ - \angle ABD)}$

$$\sin(180^\circ - \angle ABD) = \sin \angle ABD \Rightarrow AD = AC$$

$$CF^2 = BF^2 + BC^2$$

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2AC^2$$

$$BC^2 + BD^2 + 2BC \cdot BD = 2AC^2, \quad BD = BF \text{ по усл. } \Rightarrow$$

$$CF^2 = 2(AC^2 - BC \cdot BD)$$

$\Rightarrow CO, A$ по теор. косинусов $AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha$

по теор. синусов $\frac{BC}{2 \sin(135^\circ - \alpha)} = R$

$$BC = 2 \sin(135^\circ - \alpha) R$$

$$BD = 2 \cdot R \cdot \sin(45^\circ + \alpha) = 2R \cdot \cos(135^\circ - \alpha)$$

$$CF^2 = 2(2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha - 4R^2 \sin(135^\circ - \alpha) \cdot \cos(135^\circ - \alpha))$$

$$CF^2 = 4(R^2 - R^2 \cos 2\alpha - R^2 \sin(2 \cdot 135^\circ - 2\alpha))$$

$$CF^2 = 4(R^2 - R^2 \cos 2\alpha + R^2 \cos 2\alpha)$$

$$CF = 2R = 26$$

$$5) BC = 10$$

$$BF = \sqrt{676 - 100} = 24 = BD$$

$$\angle AC^L = \angle DC^L = (24 + 10)^L = 34^L$$

$$AC = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

т.к. $0^\circ < \angle BCF < 90^\circ$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{12}{13}, \cos \angle BCF = \frac{5}{13}$$

$$\angle ACF = 45^\circ + \angle ACD + \angle DCF = 45^\circ + \arcsin \frac{12}{13}$$

$$\sin(\angle ACF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} = \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot 2}$$

$$S_{ABF} = \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin \angle ACF = \frac{26 \cdot 34}{2} \cdot \frac{17 \cdot \sqrt{2}}{13 \cdot 2} = 289$$

ответ: $CF = 26$

$$S_{ABF} = 289$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12) $y = -x$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8y^x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$x \neq 0 \quad \& \quad x - 2 = 0 \quad x = 2 \text{ не подходит}$$

$y = x^2$

$$2x^4 - x^3 - x^2 - 4x - 8x^2 = 0$$

$$2x^4 - x^3 - 9x^2 - 4x = 0$$

$$2x^3 - x^2 - 9x - 4 = 0$$

$$(2x+1)(x^2 - x - 4) = 0$$

$$x < 0 \quad \cancel{x=0}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x^2 - x - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$x = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \quad y = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{9} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

№ 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

а) (1) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$$1) \begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y > 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$$

$$x-6-y+x-6+y=12$$

$$\underline{x=12}$$

$$3) \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y-x+6-y=12$$

$$\underline{x=0}$$

$$2) \begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y-x+6-y=12$$

$$\underline{y=-6}$$

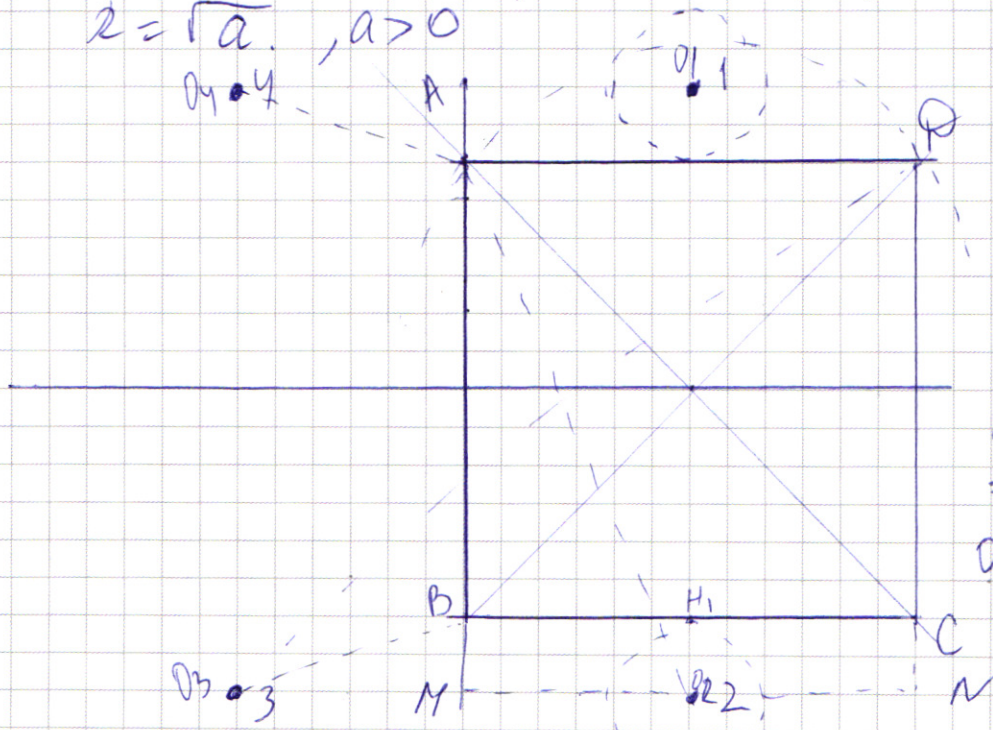
$$4) \begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y > 0 \end{cases} \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$-x+6+y-x+6-y=12$$

$$\underline{y=6}$$

2) окружности с центрами в точках
семейства окружностей с центрами в точках
(6; 8) (-6; -8) (6; -8) (-6; 8) и радиусом

$$r = \sqrt{a}, a > 0$$



$$O_2 H_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$O_2 A = \sqrt{O_2 M^2 + M A^2} =$$

$$= \sqrt{232} \Rightarrow R = \sqrt{32}$$

$$\Rightarrow a = 232$$

$$O_3 B = \sqrt{O_3 M^2 + M B^2} =$$

$$= \sqrt{40} \Rightarrow a = 40$$

$$O_3 D = \sqrt{O_3 N^2 + N D^2} =$$

$$= \sqrt{80} \Rightarrow a = 80$$

окружности 1 и 2 при $a = 4$ или $a = 4$ имеют
две общие точки с квадратом
ABCD, при $4 < a \leq 232$ 4 общие точки; при
 $a > 232$ 0 общих точек.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

т.к. 3 и 5-кратные числа и в разложении
числа 16875 всего 7 простых чисел, то
 $\Rightarrow$ в восьмизначном числе будет 1

→

• • • • •

На первом месте любое из 8 чисел, на втором
любое из 7 и т.д. ..., но т.к. число 5

исп. 4 штуки, а число 3 3 штуки,

то

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3} = 10 \cdot 48 \cdot 7 = 3360$$

ответ: 3360

№ 2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) \right) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$1) \sin 5x = \cos 5x$$

$$\sin 5x - \cos 5x = 0$$

$$\sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

N3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot (\lg(x^4) - \lg(y^2)) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg(y)) (\lg(-x))$$

$$\lg y = a \quad \text{и} \quad \lg(-x) = b$$

$$4ab - 2a^2 = a^2 + ab \quad b^2 + ab$$

$$2a^2 + b^2 - 3ab = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(-x) \\ \lg y = \lg x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x^2 \end{cases}$$