

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $(9; 3), (2; 2)$

№ 5

Рассмотрим первое уравнение

если $y > 3+x$ и $y > 3-x$, то $y=6$

если $y < 3+x$ и $y < 3-x$, то $y=0$

если $y > 3+x$ и $y < 3-x$, то $x=-3$

если $y < 3+x$ и $y > 3-x$, то $x=3$

Второе уравнение задаёт окружности с радиусами $\sqrt{a}$ с центрами в точках

$(4; 3), (-4; 3), (4; -3), (-4; -3)$

Картина:

два решения

в случае

$a=1; 25; 130$

или

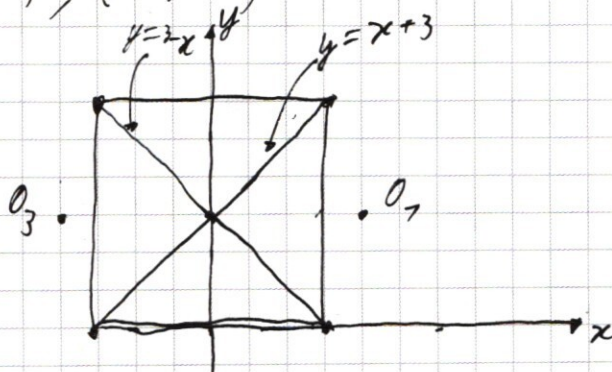
$a < 1$ нет решений

$a > 130$ нет решений

$a \in (1; 25) \geq 4$ решений

$a \in (25; 58] \geq 4$ решений

$a \in (58; 130) \geq 3$ решений



$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

1. $x \in [0; 69]$ это можно
определить по тому, что начиная

с 70 не существуют подходящих "y"

и тоже самое для $x < 6$

ко-во подходящих "y" для фиксированного x

$$S_x = 2^{64}(x-6) - x - 2^x + 69$$

$$\text{отв.} = S_6 + S_7 + \dots + S_{69} = -6 \cdot 2^{64} \cdot 63 + 69 \cdot 63 - V - \Omega + 2^{64} \cdot V$$

$$\text{где } V = \frac{69 \cdot 70}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2}, \text{ а } \Omega = 2^{70} - 1 - 2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2$$

$$\text{отв.} = 2^{64} \left(\frac{69 \cdot 70}{2} - \frac{6 \cdot 7}{2} - 6 \cdot 63 \right) + 69 \cdot 63 - \frac{69 \cdot 70}{2} + \frac{6 \cdot 7}{2} + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 - 2^{70}$$

$$= 2^{64} (35 \cdot 69 - 21 - 6 \cdot 63 - 2^6) + 69 \cdot 63 - 69 \cdot 35 + 21 + 63 =$$

$$= 2^{64} (2475 - 21 - 378 - 64) + 7932 + 84 = 2^{64} \cdot 1952 + 2016$$

$$S_x = 2^{64}(x-6) - x - 2^x + 70$$

$$\text{отв.} = S_6 + S_7 + \dots + S_{69} = -6 \cdot 2^{64} \cdot 64 + 70 \cdot 64 - V - \Omega + 2^{64} \cdot V$$

$$\text{где } V = \frac{69 \cdot 70}{2} - \frac{5 \cdot 6}{2}, \text{ а } \Omega = 2^{70} - 1 - 2 - 4 - 8 - 16 - 32$$

$$\text{отв.} = -6 \cdot 2^{70} + 70 \cdot 64 - 69 \cdot 35 + 15 - 2^{70} + 63 + 2^{64} (69 \cdot 35 - 75)$$

$$= -7 \cdot 2^{70} + 69 \cdot 28 + 64 + 75 + 63 + 2^{64} (2400) = 2^{69} (75 - 74) + 142 + 792$$

$$= 2^{69} \cdot 61 + 2074$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4

пл-мн $A'B'C'$ $\parallel$ пл-мн ABC



$$\frac{AS}{A'S} = \frac{BS}{B'S} = \frac{CS}{C'S}$$

подобные пирамиды

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{1}{2}$$

$$2h = h + 2R$$

$$h = 2R$$

$$R = \frac{2}{3}h$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{h+R} = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

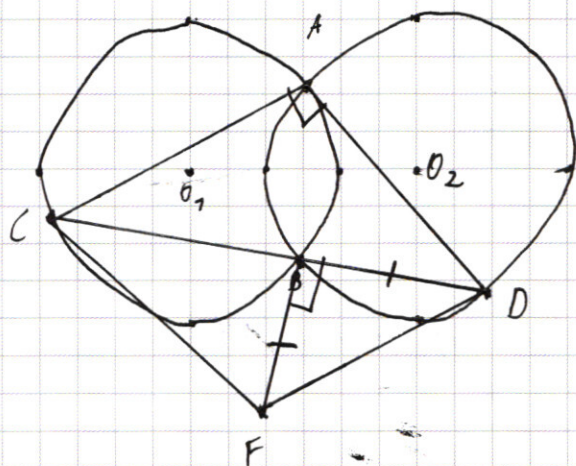
$$\sqrt{S_{\text{сеч.}}} = \frac{(h+R)(1-\sin \alpha)}{h} = \frac{\left(\frac{2}{3}+1\right) \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3}$$

1 (используя подобие)

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{9}{25}$$

Так видно, что угол α вершиной BS и отрезки SO и точками K, L и M не зависят от букв, значит высоты B $\triangle KSO$, $\triangle LSO$, $\triangle MSO$ попадут в одну точку, которая обязательно лежит в плоскости сечения, которая перпендикулярна BC .

N5



1. $O, AO_2 B$ - прокс
(все столбцы 5)

5

$$\angle A O_1 B = \angle A O_2 B$$

2. $\angle AOB = \angle AOB$

(вписанный)

$$3. \angle ACB = \angle \frac{AO_1B}{2}$$

(Виксанын)

4. $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$

$(\angle CAD = 90^\circ)$

5. $AC = AD$ (р/б треугольник)

6. Из теоремы Кэли для углов $\angle ADB$ и

~~$$\angle ACB \quad BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = CB^2 - 2CB \cdot AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$~~

обозначим $AC = AO = x$, $BO = y$

$$y^2 - \sqrt{2}xy = (\sqrt{2}x - y)^2 - \sqrt{2}x(\sqrt{2}x - y)$$

6. *Решите* $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $BD = x$, $CB = y$

Then $CF = \sqrt{a^2 + b^2}$

Заметки, что

3. Lemma, aus $\angle + \beta = \frac{\pi}{2}$ u. $\frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\gamma}{\sin \beta}$

$$\sin \beta = \cos 2 \rightarrow x = 4 \cos 2 \Rightarrow CF = \sqrt{4^2 (7 + \cos 2)} =$$

$$= \frac{4}{\cos 2} = \frac{4}{\sin \beta} = 2R = 10$$

7. $CB=6 \Rightarrow \frac{6}{\sin \beta} = 70 \quad \sin \beta = \frac{3}{5} \quad \sin \angle = \frac{4}{5} \quad BD=8$

$$g. \sin \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \angle ACF = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$g. AC = \frac{CB + BD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$10. S_{ACK} = \frac{24}{\sqrt{2}} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{20} \cdot \frac{1}{2} = 49$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

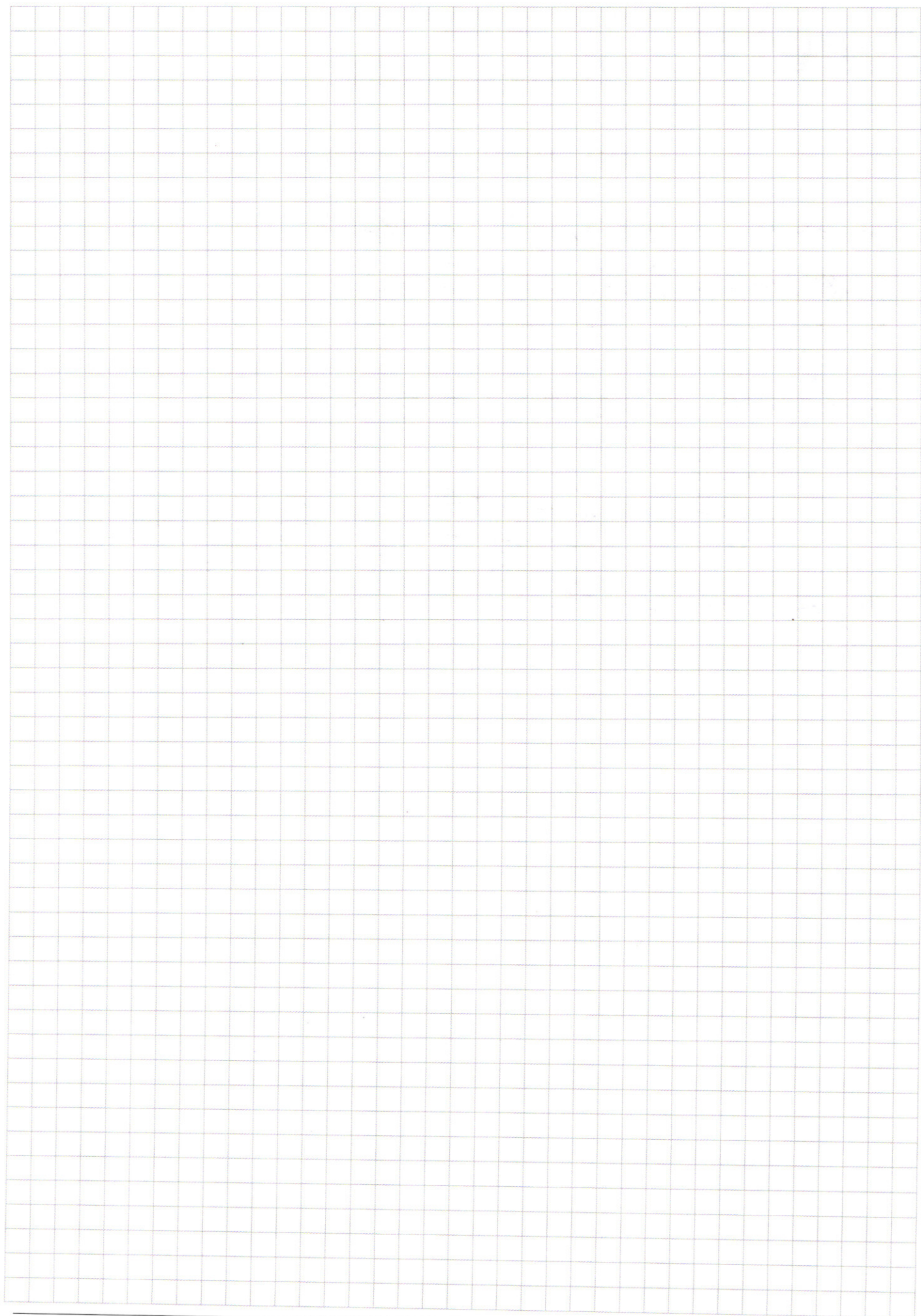
~~$$\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$~~

~~$$2 \sin(4x + \frac{\pi}{4}) \sin(-4x) = \cos 4x$$~~

Ответы к задаче №2:

$$x = \frac{\pi n - \frac{\pi}{4}}{2}; \quad \frac{\frac{\pi}{4} - 2\pi k}{3}; \quad \frac{\frac{5\pi}{4} - 2\pi m}{77}$$

$n, k, m \in \mathbb{Z}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$3375 = 5 \cdot 645 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27$$

5 5 5 и 5 цифр среди которых

или 9 и 3 и единицы, или 3 3 3 и единицы

1) если 9 и 3 тогда $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$
 $= 56 \cdot 20 = 1120$

2) если 3 3 3 тогда $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 6} = 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 =$
 $= 560$

Итого 1680 чисел

N2

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 7x$$

амплитуда и фаза

$$\sqrt{2} \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cdot \cos 7x$$

делим на $\sqrt{2}$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 7x$$

разность косинусов

$$2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \sin(4x) = \cos 7x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$$

$$\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \sin(-4x) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$1) 4x + \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n - \frac{\pi}{4}}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\pi - 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m$$

$$k, m \in \mathbb{Z}$$

N3

$$\begin{cases} y^{5\lg x - 4x} = y^{2\lg x + 2\lg y} \\ x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0 \\ x^{-4x} = y^{2\lg y - 3\lg x} \\ (x-y)^2 - 4y^2 - 4(x-3y) = 0 \\ \begin{cases} x = y^{3-2\log_x y} \\ (x-3y)(x+y) - 4(x-3y) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

1) $x = 3y$

$$3y = y^{3-2\log_{3y} y}$$

$$3 = y^{2-2\log_{3y} y} = 3^{\log_3 y (2 - 2 \cdot \frac{\lg y}{\lg y + \lg 3})}$$

$$= 3^{\frac{\lg y}{\lg 3} \cdot 2 \cdot \frac{\lg 3}{\lg y + \lg 3}} = 3^1$$

$$2 \cdot \frac{\lg y}{\lg y + \lg 3} = 1 \quad \log_{3y} y = \frac{1}{2} \quad \sqrt{3y} = y$$

$y = 3$
 $x = 9$

2) $x = 4 - y$

$$4 = y(1 + y^{2-2\log_{4-y} y})$$

$y = 2 \quad x = 2$

$y \in (0; 4) \quad y \neq 3$

$4-y$ убывает

y ... возрастает при $y > 1$

убывает при $y < 1$

минимум в $y = 1$ равен $\neq 1$

$$4-y \quad f' = -1$$

$$y^{3-2\log_{4-y} y} \quad f' =$$

$$y^{2-2\log_{4-y} y} \cdot (-2 \cdot \frac{4-y}{y})$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

