

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1
разложим число 3375 на простые множители

$$3375 = 225 \cdot 3 \cdot 5 = 5^3 \cdot 3^4$$

заметьте, что в таком случае наше восьмизнач. число будет состоять из трёх троек, трёх пятёрок и двух единиц. (п.к 5·3 - не ав. чётной)

тогда:

$$N = \frac{8 \cdot 7}{2!} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3!}$$

↑
способы расположить
единицы

|||

↑
способы расположить
тройки

где N-кол-во
возможных
восьмизнач. чисел.

↑
способы расположить
пятёрки

$$N = 28 \cdot 20 \cdot 1 = 560$$

Отв: $N = 560$

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

замети, что второе уравнение - это несколько модифицированное уравнение окружности. Если бы модулей не было то мы имели бы круг с отр.

радиусом a и коорд центра $x_0 = 4$ и $y_0 = 3$, как известно модуль x или y даёт нам, отображение от осей OY и OX

второе уравнение - это 4 окр. радиусом a и центрами в $(4; 3); (4; -3); (-4; 3); (-4; -3)$ теперь раскроем модуль:

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$\begin{cases} y-3 \geq x \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \leq y-3 \leq x \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3 \leq -x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x \leq y-3 \leq -x \\ x = -3 \end{cases}$$

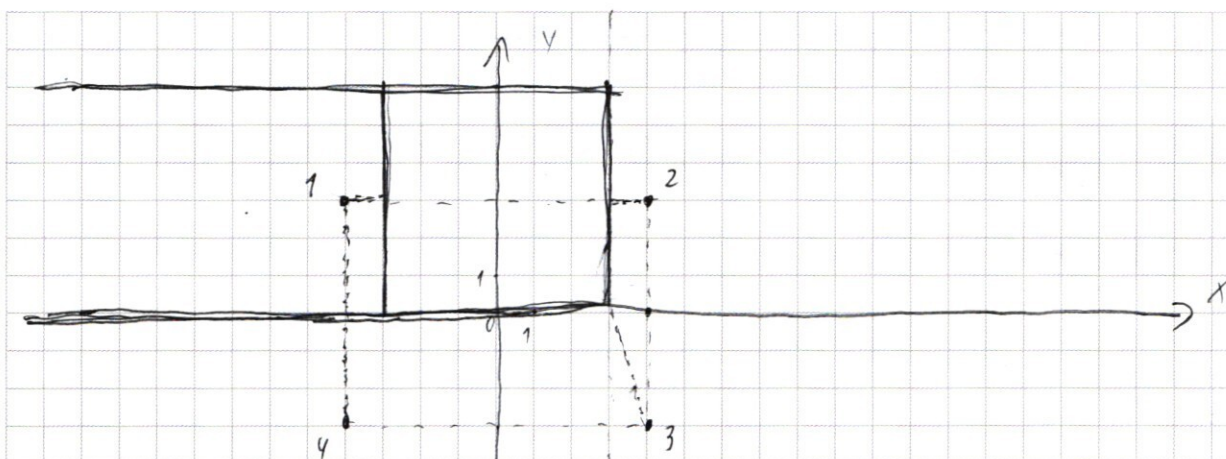
$$\begin{cases} x \leq 3 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 6 \\ x = 3; -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

изобразим полученное на графике:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



здесь процикированные ~~матрицы~~ точки - центры
окружностей; пусть δ_x - расстояние от x -ого центра
до локонной; из тех. пиллер:

~~$$\delta_1 = \delta_4 = 3$$

$$\delta_2 = 1$$

$$\delta_3 = \sqrt{10}$$~~

прямая окр.-сти с помощью ~~двух~~
явл. ~~решения~~
из системы (1) ~~матрицы~~, что при
 $a=1$ - одно решение, а при $a>1$ как минимум
два решения (из-за 2-ой окр.) ~~то~~, при $a=3$ -
четыре решения и ~~более~~ при $a>3$ - более двух -

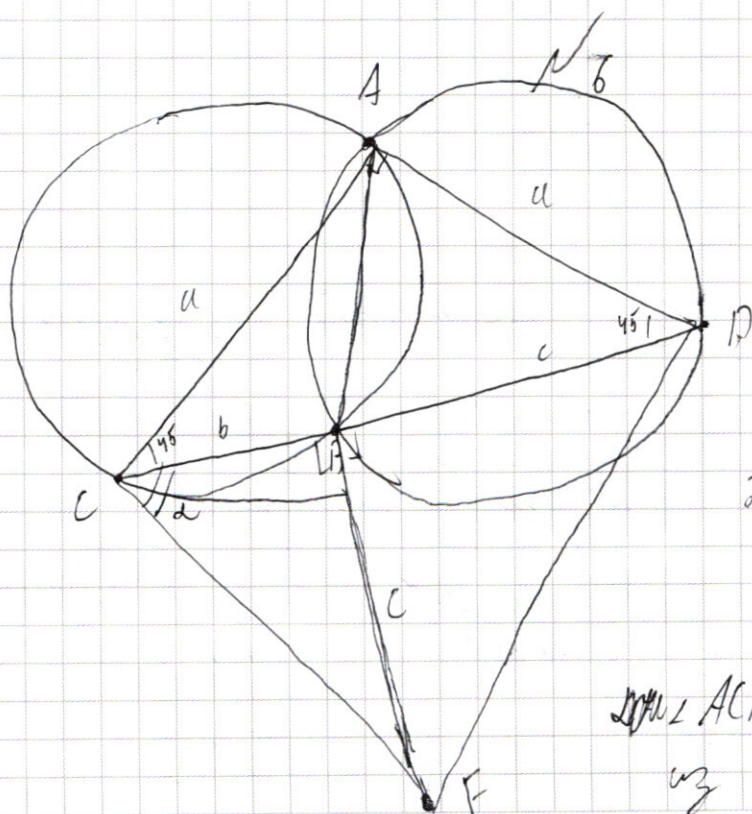
решений $\Downarrow$ $uz = 3a$ окр. 1, 4
 Ответ: $a \in (1, 3)$

$$(1) \begin{cases} s_1 = s_2 = 1 \\ s_3 = \sqrt{10} \\ s_4 = 3 \end{cases}$$

пересеч. окр. с хордой -
 решения

тогда при uz системы (1) при $a=1$ - два решения, далее при $a>1$ -
 далее вх решения $uz=3a$ окр. 1, 2

Ответ: $a=1$



а) заметим, что $\angle ACB$; $\angle ADB$ опираются на хорду AB ; в окр. равной радиуса. это означает, что $\angle ACB = \angle ADB$

$$\angle ACB = \angle ADB = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$$

из $\triangle ACD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~погр. из теор. пиф. в $\triangle ADB$ где $\angle ADB = 45^\circ$~~

тогда из теор. син. :

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R$$

$$AB = 2R \sin 45 = \sqrt{2}R$$

теперь запишем теор. пиф. в $\triangle ADC$ и
теор. кос. в $\triangle ABC$:

пусть $AC = AB = a$ — ($\triangle ADC$ — р/с т.к. углы равны)
 $CB = b$; $BD = c = BF$ из у.а.

$$(b+c)^2 = 2a^2$$

$$\text{или } AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle ACB$$

$$\Downarrow$$

$$a^2 = \frac{(b+c)^2}{2}$$

$$\text{или } 2R^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$$

подставим a

$$2R^2 = \frac{(b+c)^2}{2} + b^2 - (b+c)b$$

$$4R^2 = b^2 + c^2$$

из теор. пиф. в $\square$ CBF:

$$CF^2 = b^2 + c^2$$

$$\Downarrow$$

$$CF^2 = 4R^2$$

$$CF = 2R = 10$$

Отв. н. 10: CF = 10

д) пусть $\square$ BCF = 2

из п. 1а) известно, что

$$b^2 + c^2 = 4R^2$$

$$b = 6 \quad - \text{ по укл}$$

$\Downarrow$

$$c = \sqrt{4R^2 - b^2} = 8$$

$\Downarrow$

из записанной ранее теор. пиф.

$$2a^2 = (b+c)^2$$

$\Downarrow$

$$a = \frac{b+c}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$\Downarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

значимые теор. сн. в $\rightarrow$ СВФ:

$$\frac{C}{\sin \alpha} = \frac{CF}{\sin 90}$$

$$\sin \alpha = \frac{C}{CF} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{3}{5} \quad - \text{из осн. триг. соотнош.}$$

и найдем синус угла ACF:

$$\sin \angle ACF = \sin(\alpha + 45^\circ) =$$

$$= \sin \alpha \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos \alpha = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

и

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\angle ACF)$$

вотмыздается
найденным
синусом:

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} a \cdot R \cdot \frac{7}{5\sqrt{2}} = 49$$

Снв и л. (д):

$$S_{ACF} = 49$$

$$\sqrt{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

II

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

III

воспользуемся формулой гор. или

$$\sqrt{2} \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

IV

воспользуемся формулой разности синусов; сократим на $\sqrt{2}$

$$2 \sin\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(11x + \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

V

$$2 \sin\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin 8x = \cos 14x$$

VI

воспользуемся формулой приведения

$$-2 \cos 14x \cdot \sin 8x = \cos 14x$$

VII

$$\sin 8x = -\frac{1}{2}$$

VIII

$$8x = \begin{cases} \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}$$

IX

принимая во внимание что

n - целое число

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \frac{h+2R}{h+2R} = k \\ & k^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{h = 2R}$$

замечим, что $\angle SKO = 90^\circ$ (SK-касат.)

$$\Downarrow$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{3}$$

$$\Downarrow$$

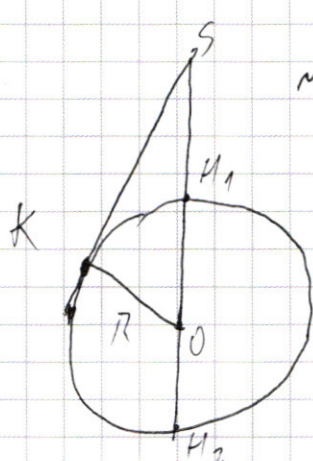
$$\text{Отг: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{y}{x} \right)^{1/3} = y^{2/3} x^{1/3} \\ & x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{aligned} \right.$$

преобразуем второе уравнение

✓

Ответ: $X = \begin{bmatrix} \frac{7}{48} \pi + \frac{\pi}{4} \\ \frac{11}{48} \pi + \frac{\pi}{4} \end{bmatrix}$ $\swarrow$ π -угол



$\swarrow$ $\parallel$ - параллельно ; R - радиус окр.

$\leftarrow$ сечение содержащее S O K

пусть $SO \cap \omega = H_1; H_2$
 H_1 - ближе к S
 ω - заданная сфера

заметьте, что $H_1; H_2$ - содержатся
 в описанных в угл. плоскостях
 (т.к. H_1, H_2 - попадают под окр., а
 касат. в точке - единственна)

заметьте, что две пирамиды отсеченные
 плоскостями подобны (по трём углам в вершине
 и $\parallel$ основаниями)

пусть K - линейный коэффициент подобия,
 $SH_1 = h$ тогда:

$$\frac{SH_2}{SH_1} = \frac{h+2R}{h} = K$$

$$\frac{S_{\text{осн } 2}}{S_{\text{осн } 1}} = K^2$$

$S_{\text{осн } 1,2}$ - площади
 соотв. оснований

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - (2y)^2 - 4(x-3y) = 0$$

||

$$(x-3y)/(x+y-4) = 0$$

||

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

всё множество решений
второго уравнения

в первом уравнении разделим на y , пусть

$$x = ny ; \text{ тогда}$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

||

$$\left(\frac{y^4}{n}\right)^{\lg ny} = y^{4 \lg y + 2 \lg n} \cdot 2 \lg ny^2$$

||

$$\left(\frac{y^4}{n}\right)^{\lg y + \lg n} = y^{4 \lg y + 2 \lg n}$$

||

$$n^{\lg y + \lg n} = \frac{y^{4 \lg y + 4 \lg n}}{y^{4 \lg y + 2 \lg n}}$$

||

$$n^{\lg y n} = y^{2 \lg n}$$

вспомогательное, это
приведя к виду $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$$(y n)^{\lg n} = (y^2)^{\lg n}$$

||

$$y n = y^2$$

||

$$\boxed{y = n}$$

||

$$\boxed{x = ny = n^2}$$

тогда: пересекся с решениями второго
уравн. имеем:

$$\boxed{x = 3y} \Rightarrow \underline{y = 3 \quad x = 9}$$

$$\boxed{x + y = 9} \Rightarrow \begin{aligned} n + n^2 &= 9 \\ \downarrow \\ n &= \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

||

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

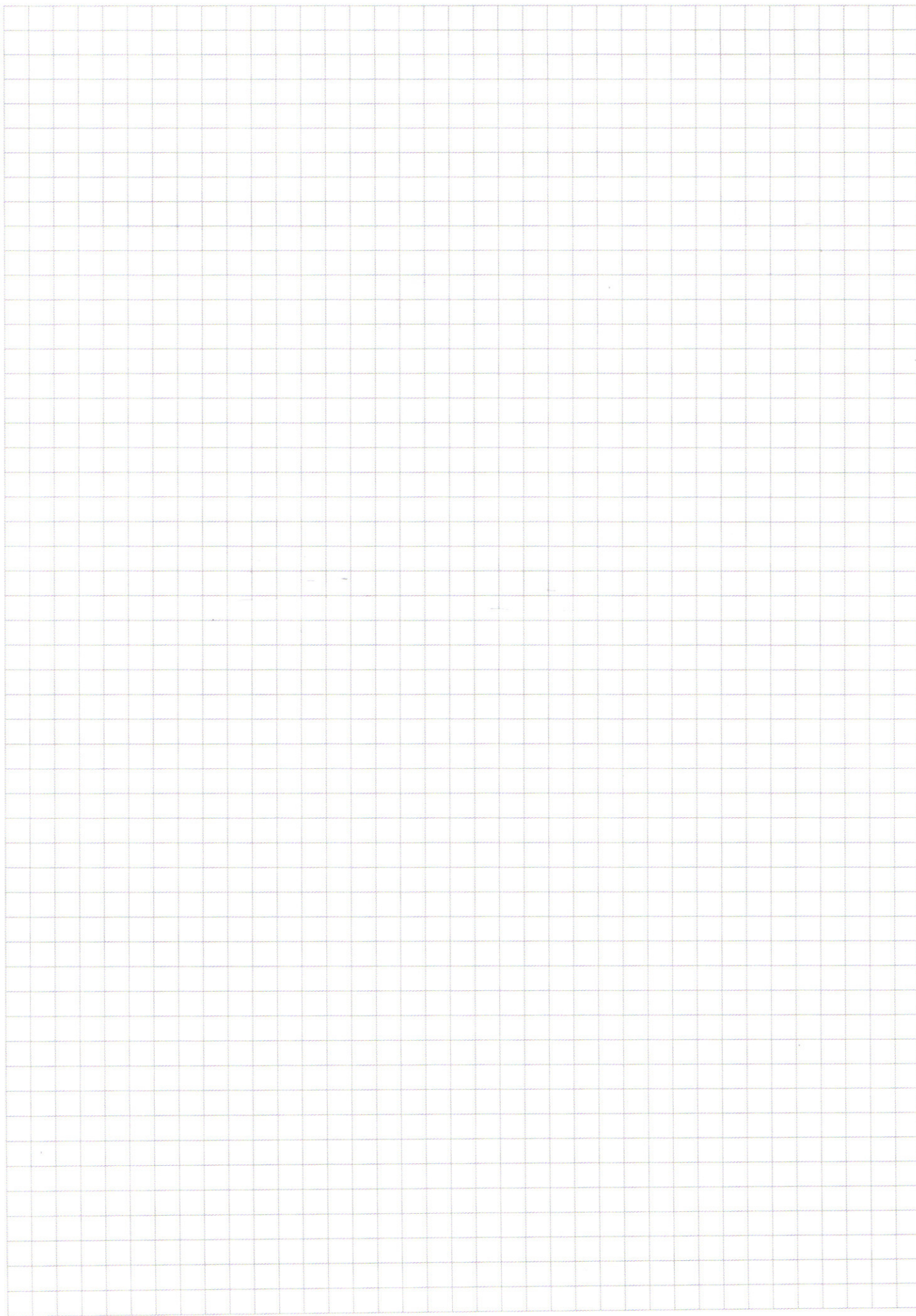
1 - " м.к в сумме должны 4

$$x = y^2 = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

!!!

Отв: $\left[\begin{array}{l} x = 9 \quad ; \quad y = 3 \end{array} \right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \quad y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{array} \right.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-3y)/(x+y) - 4(x-3y) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3/4}{1} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{h}{h+2R}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$2h = h + 2R$$

$$h = 2R$$

$$\frac{1}{2} \cos 8x$$

$$\cos 3x + \frac{\pi}{4}$$

$$\cos 3x$$

$$\cos 14x + \frac{\pi}{4} - \cos 3x + \frac{\pi}{4} = \cos 14x$$

$$\cos 14x - \cos 3x - \sin 14x + \sin 3x =$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 14x =$$

$$(2^3)^2 = (2^3)^4$$

$$\sqrt{2} \cos 3x \cos 14x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 14x$$

$$\frac{1}{2} \sin\left(14x + \frac{\pi}{2}\right) \sin(8x) = \cos 14x$$

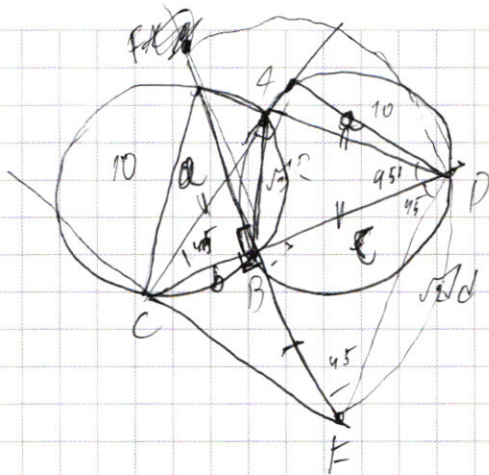
$$\sin(8x) = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 8x &= \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \\ &= \frac{11\pi}{6} + 2\pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{7\pi}{48} + \frac{\pi n}{4} \\ &= \frac{11\pi}{48} + \frac{\pi n}{4} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{R}{\sin \alpha} &= \frac{3R}{2} \\ n &= \frac{4 \pm \sqrt{14}}{2} \\ x &= \pi y \\ -n - n^2 &= 4 \end{aligned}$$



$$x \leq y-3 \leq -x$$

$$\text{кл. } x = -3$$

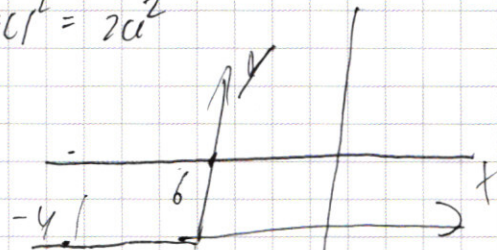
$$2R^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab \quad \text{ок } \leq 6$$

$$2R^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$$

$$(b+c)^2 = 2a^2$$

$$2R^2 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$$

$$2R^2 = a^2 + c^2 - \sqrt{2}ac$$



$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

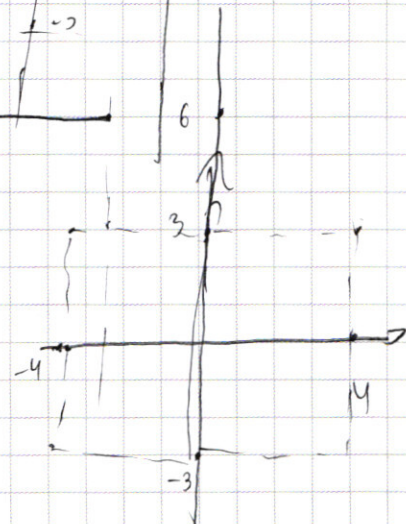
$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 6$$

$$x = 4 - y$$

$$\left| \frac{y-5}{y-4} \right|$$

$$y-3 > x$$

$$x-3 < -x$$

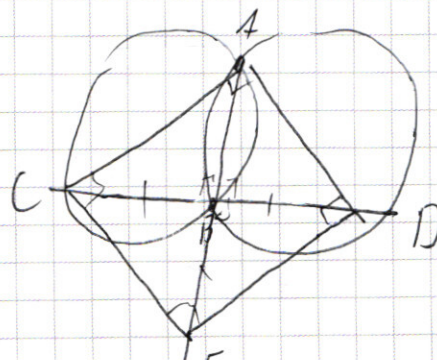


$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$\text{ок } 3 > x$$

$$(b+c)^2 = 4R^2$$



$$2R^2 = \frac{(b+c)^2}{2} + b^2 - (b+c)b$$

$$2R^2 = \frac{(b+c)^2}{2} + c^2 - (b+c)c$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс



ВАРИАНТ 5

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

