

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\lg x (\lg y^5 - \lg x) = 2 \lg xy \lg y$$

$$5 \lg x \lg y - \lg^2 x = 2 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$2 \lg y (\lg y - \lg x) - \lg x (\lg y - \lg x) = 0$$

$$(2 \lg y - \lg x) (\lg y - \lg x) = 0$$

$$\begin{cases} x=y \Rightarrow y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0 \Rightarrow -4y^2 + 8y = 0 \\ x=y^2 \Rightarrow y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \Rightarrow y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{array}{r} y^4 - 2y^3 - 4y^2 + 12y = 0 \\ y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0 \\ y^3 - 3y^2 = -4y + 12 \\ y^2 - 3y = -4 + 12/y \\ y^2 - 3y + 4 = 12/y \\ y^3 - 3y^2 + 4y - 12 = 0 \end{array}$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 4y + 12) = 0$$

$$y(y-3)(y^2+y-4) = 0$$

$$y = 1 - 4 \cdot (-4) \cdot 1 = 14$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y_3 = 0$$

$$y_4 = 3$$

$$(y_1 \text{ и } y_2)$$

$$\text{НЕ ПОСЛАДАТ}$$

y	2	3	$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$
x	2	9	$\frac{9 - \sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

Ответ: $\{2; 2\}; \{9; 9\}; \left\{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right\}$.

$$\sqrt[n]{1}$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Из такого набора можно составить два возможных набора цифр:

$$\textcircled{1} 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1 \quad \text{и} \quad \textcircled{2} 5, 5, 5, 8, 3, 1, 1, 1$$

$$\textcircled{1} \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{8}} = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 560$$

$$\textcircled{2} \frac{8!}{3!3!} = \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

ОТВЕТ: 1680.

$$\sqrt[n]{5}$$

$$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

$$(|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 0$$

$$\begin{cases} y - 3 - x + y - 3 + x = 6 \\ y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \end{cases}$$

$$2y = 12$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ x \leq 3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 3 - x - y + 3 - x = 6 \\ y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \end{cases}$$

$$x = -3$$

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y + 3 + x + y - 3 + x = 6 \\ y - 3 - x \leq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \end{cases}$$

$$2x = 6$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

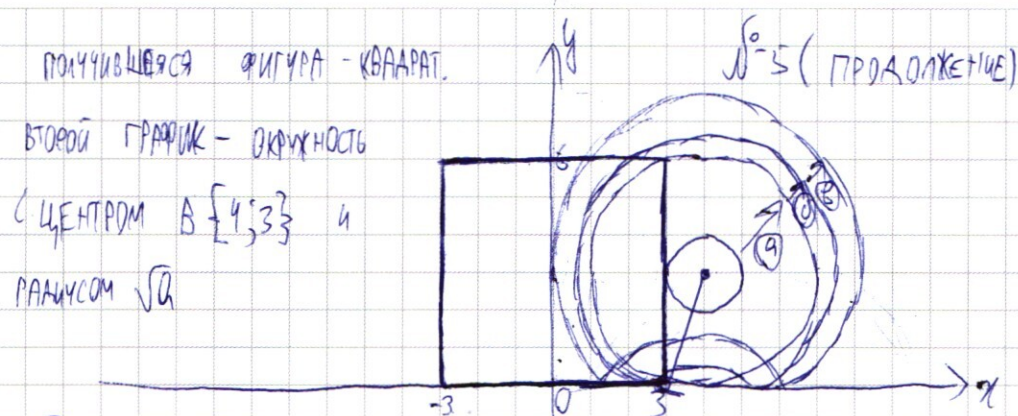
$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$\begin{cases} y - 3 - x \leq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \end{cases}$$

$$-2y = 0$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq -3 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Заметим, что в момент, когда x или y станут 0, сразу появится еще одно решение, помимо двух, которые есть

когда $a \in [1; 3]$, но только если при этом окружность пересекает квадрат новой, отраженной дугой. Найдем, при каком радиусе это происходит: $\sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$. Заметим, что если это произошло, то кол-во корней уже не уменьшится, а значит единственный интервал с 2 корнями это $a \in [1; 10]$

ответ: $a \in [1; 10]$.

$\mathcal{D}^0 = 7$.

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 40 + (2^{64} - 1)x$$

приравняем их

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 40 + 2^{64}x - x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} = 40 + 2^{64}x - x$$

это - показательная функция

а это - прямая.

№ 4 (ПРОДОЛЖЕНИЯ)

У ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ПРЯМОЙ МАКСИМУМ 2 ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ,
УГАДАЕМ ИХ.

$$x=6$$

$$2^6 + 6 \cdot 2^{64} = 70 + 2^{64} \cdot 6 - 6$$

$$64=64$$

$$x = \cancel{40} \quad 40$$

$$2^{40} + 6 \cdot 2^{64} = 40 \cdot 2^{64} - 40 + 40$$

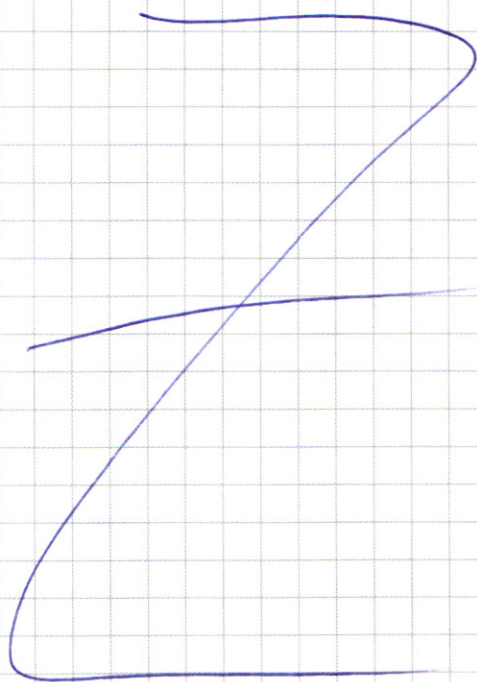
$$2^{40} = 64 \cdot 2^{64}$$

$$2^{40} = 2^{70}$$

ЗНАЧИТ, СУЩЕСТВУЕТ $40 - 6 = 64$ ПАРЫ $\{x; y\}$, ПОДХОДЯЩИХ НАМ.

ИСКЛЮЧИМ ДВЕ ТАК КАК ЗНАК В ОДНОМ ИЗ НЕРАВЕНСТВ СТРОГИЙ,
УБЕДИМЕСЯ, ЧТО ОНИ ВСЕ ЦЕЛЫЕ (ЧЕТ ОПЕРАЦИИ, КОТОРЫЕ МОГУТ БЫ
СДЕЛАТЬ ЦЕЛОЕ ЧИСЛО НЕЦЕЛЫМ, И ПОЛУЧИМ ОТВЕТ $\neq 62$

ОТВЕТ: 62.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\int_0^1 x$
У НИХ МАКСИМУМ 2 ТОЧКИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ, УКАЖЕМ ИХ

$$x = 6$$

$$2^6 + 6 \cdot 2^{64} = 70 + 2^{64} \cdot 6 - 6$$

$$64 = 64$$

$$x = 70$$

$$2^{70} + 6 \cdot 2^{64} = 70 + 70 \cdot 2^{64} - 70$$

$$2^{70} = 64 \cdot 2^{64}$$

$$2^{70} = 2^{70}$$

ЗНАЧИТ, В ИНТЕРВАЛ ВХОДЯТ ВСЕ ИКСЫ ОТ 6 ДО 70, Т.Е.
64 ШТУКИ.

ОТВЕТ: 64

Дано:

$$r = 5$$

Найти:

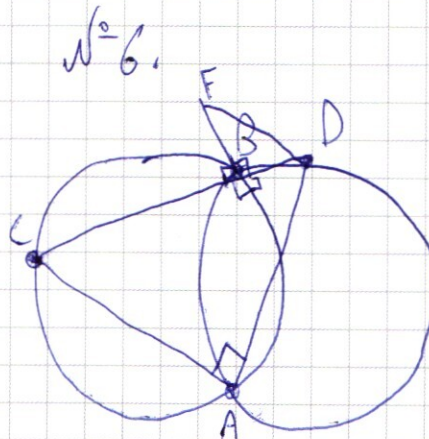
CF.

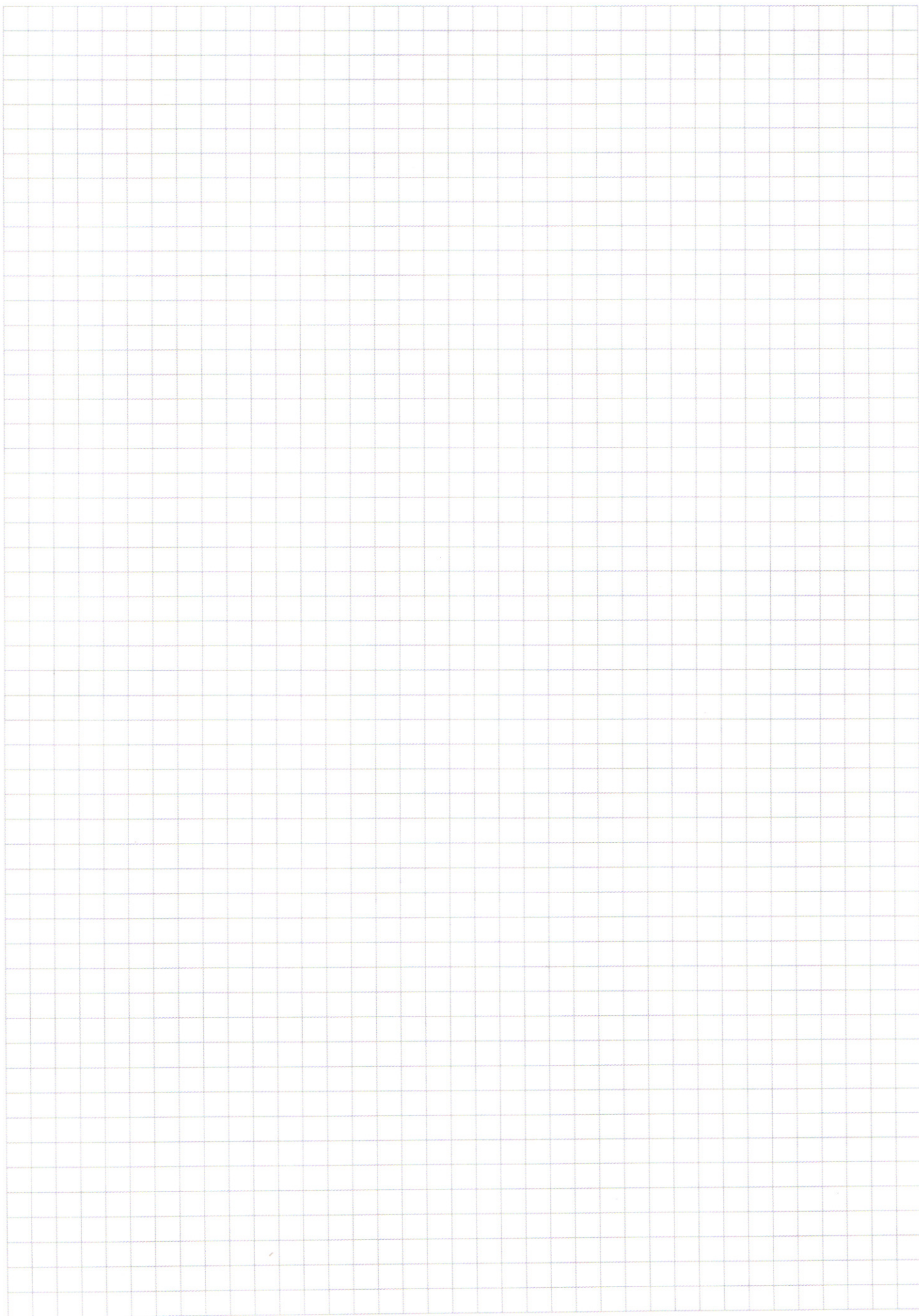
Решение:

$\angle BCA = \angle BDA = 45^\circ$ Т.К. ОПИРАЮТСЯ НА ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДУГИ.

В $\triangle BFD$ $\angle B = 90^\circ$ и $FB = BD \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$, ТОГДА

$$\angle FDA = 90^\circ$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 33755 \\ - 30 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6755 \\ - 5 \\ \hline 17 \\ - 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1355 \\ - 10 \\ \hline 35 \\ 24 \end{array}$$

$$24 = 3^3 \quad 11$$

Итого: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1 или

$$8! = C_8^3 C_3^3 C_3^2 C_2^1 C_1^1$$

$$51, 1 \quad \begin{array}{r} 511 \\ 115 \\ \hline 151 \end{array}$$

$$C_3^2 C_2^1 C_1^1 = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} = 3 \cdot 2 = 6$$

$$C_3^2 C_2^1 C_1^1 = 3! = 6$$

$$C_3^2 C_2^1 C_1^1 = 3! = 6$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^8$$

$$2^{x+8} (2^{-8} + 3 \cdot 2^{-24})$$

$$y > 2^{x+65} (2^{-65} + 3 \cdot 2^{-24})$$

$$y > 2^{x+65} (2^{-65} + 3 \cdot 2^{-24})$$

$$y \leq 70 + 2^{64}x - x$$

$$2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64} - 1$$

$$68 + 2^{64}$$

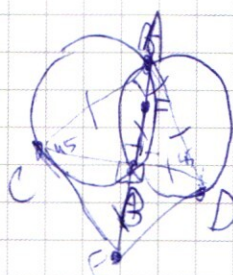
$$2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$70 + 2^{64}x - 1x$$

$$\lg \frac{y}{x} \lg x = \lg y \cdot 2 \lg x = 2 \lg y \lg x + 2 \lg y^2$$

$$(\lg y^5 - \lg x)(\lg x)$$

$$(5 \lg y - \lg x)(\lg x) = 2 \lg y \lg x + \lg y^2$$



$$24! / (4! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 4!) = 1$$

$$1111:1$$

$$5111:4$$

$$5511:6$$

$$5211:12$$

$$5111:4$$

$$5511:6$$

$$5211:12$$

$$5111:4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$C_4^3 C_1^1 = 4$$

$$\lg x (5 \lg y^4 - \lg x) = 2(\lg x + \lg y)(\lg y)$$

$$5 \lg x \lg y - \lg x - 2 \lg x \lg y + 2 \lg y^2$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg^2 x - \lg x \lg y + 2 \lg^2 y - 2 \lg x \lg y = 0$$

$$2 \lg x (\lg x - \lg y) - 2 \lg y (\lg x - \lg y) = 0$$

$$(\lg x - 2 \lg y)(\lg x - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x - 2xy + 12y - 3y^2 = 0$$

$$y^2 - 4y - 2y^2 + 12y - 3y^2 = 0$$

$$-4y^2 + 8y = 0$$

$$y = 0; y = 4 \quad x = 4$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0$$

$$27 - 18 - 11 + 12$$

$$y(y-3)(y^2+y-4)$$

$$y=0, y=3$$

$$y=1+4-4$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{array}{l} \cos(2xy) \\ \sin x \cos y \neq \sin y \cos x \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 28 \\ 30 \quad 60 \quad \cos(30+60) \quad 20 \quad 56 \\ 1-0 \quad 10 \quad 108 \\ \sin x \cos y - \sin y \cos x \quad 120 \\ \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sin 11x - \cos 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}(\sin 11x \cos 11x - \sin 3x \cos 3x)$$

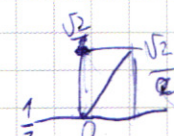
$$\begin{array}{r} 11, 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5211 \quad 12 \quad C_4^1 C_3^4 = \\ 5111 \quad 4 \quad 2, 2, \quad C_4^1 = \frac{4!}{3!1!} = 4 \\ 5511 \quad 6 \quad 1 \quad C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 \\ 5555 \quad 1 \quad 1 \quad C_4^3 = 3^0 \\ C_4^2 = \frac{2!}{1!1!} = 2 \end{array}$$

$$55533311$$

$$55333111$$

$$P_3^1$$

$$(P_2^1)$$

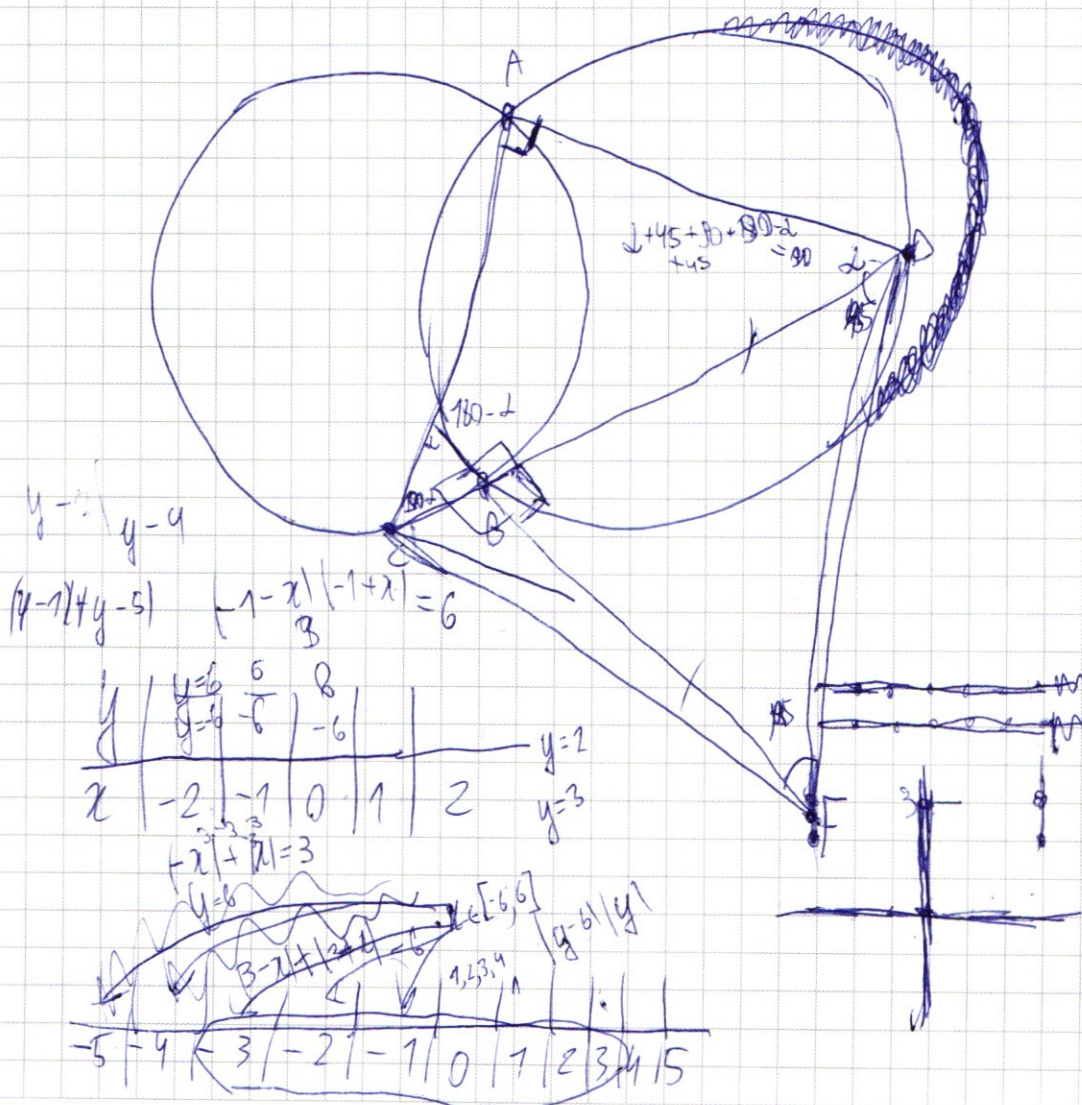
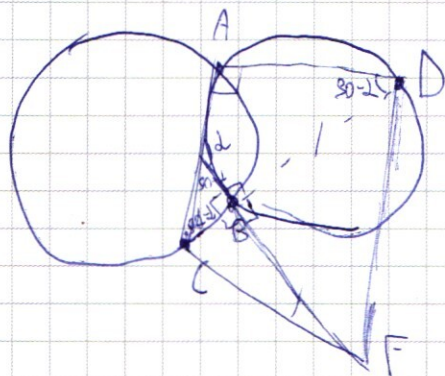


$$\cos(x+y) = 0$$

$$= \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 - 1 = 0 \\ \sin(x+y) = \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$y-3-x$$

$$y-3+x$$

$$2x=0$$

$$-3-x>0$$

$$x<3$$

$$x-3+x>0$$

$$y=0$$

$$y-3-x$$

$$x<3$$

$$-3-x>0$$

$$x<-3$$

$$y-3-x>0$$

$$y-3+x>0$$

$$-3>x$$

$$x>3$$

$$x<-3$$

$$y=0$$

$$y-3-x<0$$

$$y-3+x<0$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y+6=6$$

$$-2y=0$$

$$y=0$$

$$-3-x<0$$

$$-3+x<0$$

$$-3<x$$

$$x<3$$

$$-y-3+x+y-3+x=6$$

$$2x=6$$

$$x=3$$

$$y-3-x<0$$

$$y-3+x>0$$

$$y-6<0$$

$$y<6$$

$$y>0$$

$$x=3$$

$$y-3-x>0$$

$$y-3+x<0$$

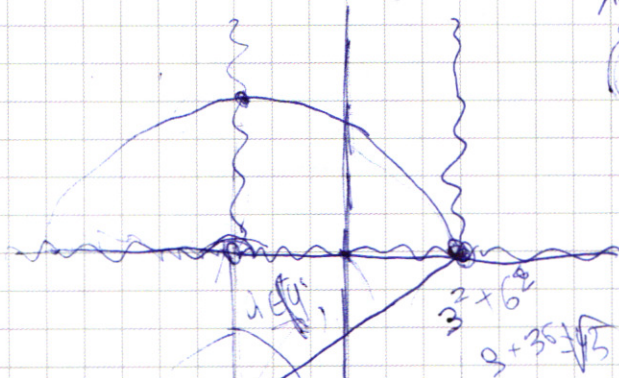
$$y-3-x+y-3-x=6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

$$y>0$$

$$y<6$$



$$x^2 + y^2 = 45$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

$$x>0$$

$$x<0$$

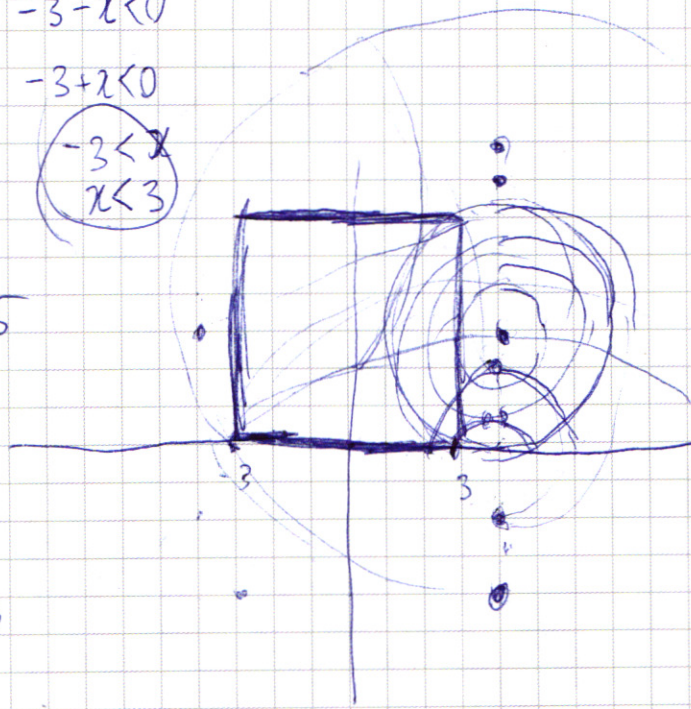
$$y>0$$

$$y<0$$

$$(-x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

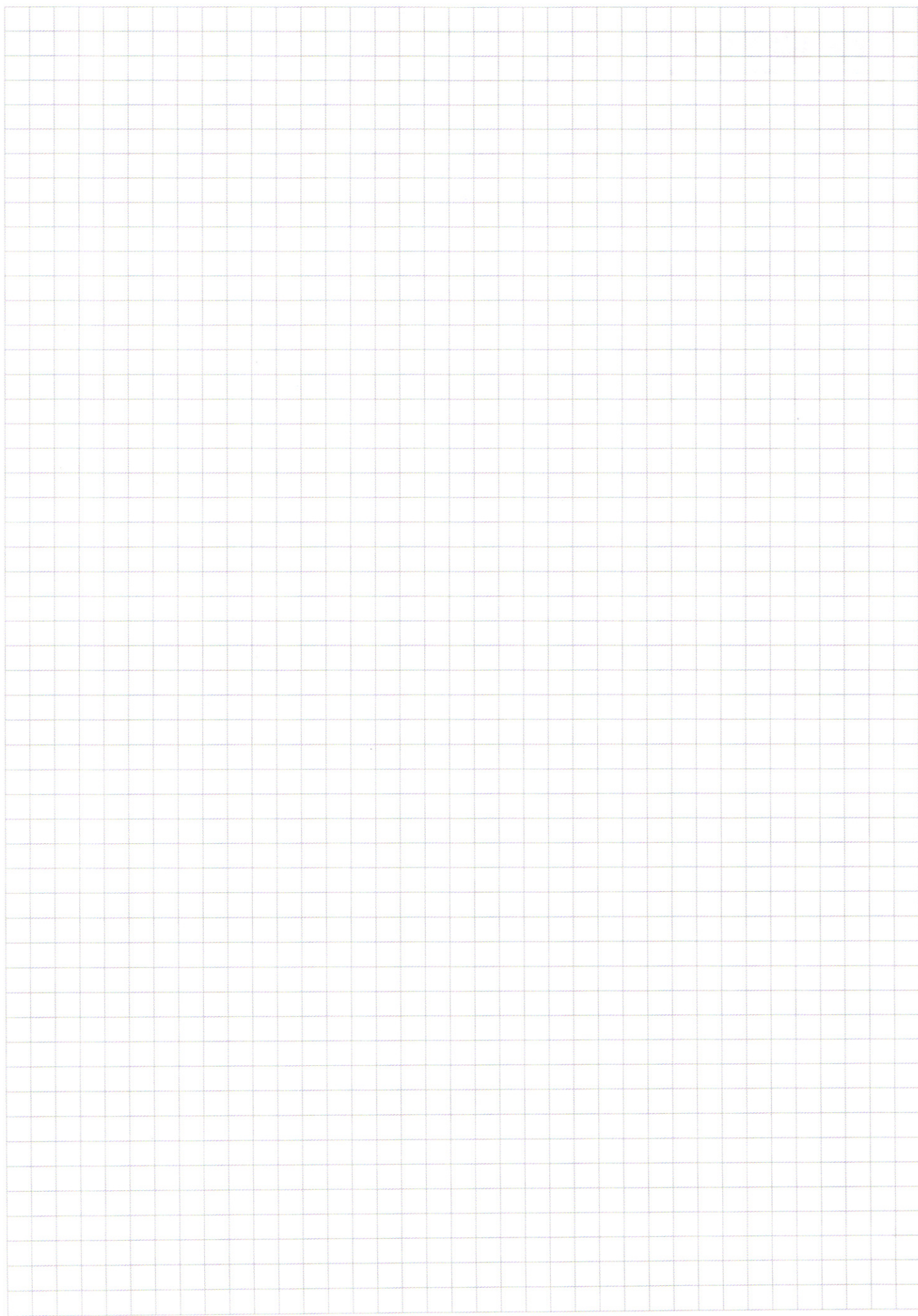
$$-1(x+4)^2 + (y-3)^2 = 5^2$$

25



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

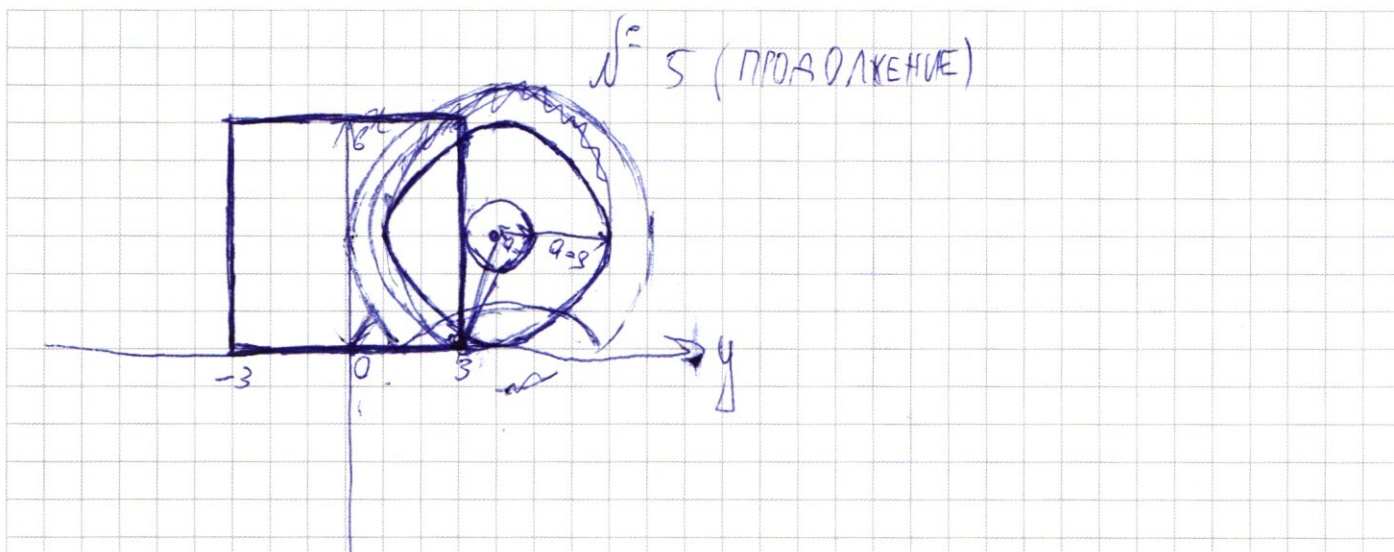
№ 6.
В $\triangle BDA$ $BD = BA$ т.к. равнобедренный.
AFCD - КВАДРАТ
 $CF = CA = AD = 5$
ОТВЕТ: 5.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$40 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64} = k$$

$$40 + (k - 1)x \geq 2^x + 6k$$

$$40 + kx - x \geq 2^x + 6k$$

$$40 + kx - 6k \geq 2^x + x$$

$$40 + k(x - 6) \geq 2^x + x$$

$$40 + 2^{64}(x - 6) \geq 2^x + x$$

$$40 + 2^{64}x - x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

$$-40 + 2^{64}x + x + 2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 0$$

$$3 \cdot 2^{65} + 2^x + x - 2^{64}x - 40 \geq 0$$

$$(2^{64} - 1)x + 40 > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{64}x - x + 40 - 2^x - 3 \cdot 2^{65} > 0$$

$$2^{64}(x - 6) - 2^x - x + 40 \geq 0$$

$$2^{64} \cdot 2^6 - 2^{70} - 40 + 40$$

