

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИ

Бланк задания должен быть вложен в
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найти $N_{\text{чисел}}$, т.ч.: $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_8 = 3375$,
где $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_8}$

Решение:

1) Заметим, что: $3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, тогда
видно, что ~~четыре~~ цифр у рассужденного
числа нет; т.к. 5-ки в разложении
числа 3375 присутствуют 3 раза, то всего
пятерок в числе 3 шт; Их можно
перемешать: $P_5 = C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$ -ю способами.

2) На ост. 5-ти местах можно разместить:

1; 3; 9 (т.к. произв этих чисел 3^3),

а) число 9-ок. 0 : всего: $C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$ способов

б) число 9-ок. 1 : всего: $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ способов

тогда т.к. 9-ок. больше 1 быть не может (произв. 3^3),

то по правилу суммы на 5 мест можно пом. $P_5 = 20$ -ю сп.

(небразлично: ставим 3 или 9 а на ост. 1)

3) По правилу произв: всего: $N = P_3 \cdot P_5 = 56 \cdot 20 = 1120$ сп.

Ответ: 1120

2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-\sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x;$$

• Введем замену: $a = 3x - \frac{\pi}{4}$

$b = 11x - \frac{\pi}{4}$, тогда:

$$\sin(a) - \sin(b) = \cos(a+b + \frac{\pi}{2}) (= -\sin(a+b))$$

$$\sin a - \sin b = -(\sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a)$$

$$\sin a - \sin b = -\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a;$$

$$\sin a (1 + \cos b) - \sin b (1 - \cos a) = 0;$$

$$\sin a (2 \cos^2 \frac{b}{2}) - \sin b \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sin a \cdot \cos a \cdot \cos^2 \frac{b}{2} - \sin b \cdot \cos b \cdot \sin^2 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} (\cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{a}{2}) = 0;$$

$$\sin \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}) = 0$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} \sin \frac{a}{2} = 0 \\ \cos \frac{b}{2} = 0 \\ \cos \frac{a+b}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n \\ \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m, n, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ 14x = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; & (1) \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} & (2) \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi m}{7} (= \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi m}{7}) & (3) \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}; \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi m}{7}, \text{ где } n, k, m \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

• Т.к. Замена на 2 переменные не равна, значит, пометить их. значения :

$$(2): a = \frac{5\pi}{44};$$

$$\cos 11a - \cos 3a - 4\sin 11a + 5\sin 3a = \sqrt{2} \cdot \cos 14a$$

$$\cos \frac{11 \cdot 5\pi}{44} - \cos \frac{3 \cdot 5\pi}{44} = \sin \frac{11 \cdot 5\pi}{44} + \sin \frac{3 \cdot 5\pi}{44} = \sqrt{2} \cos \frac{14 \cdot 5\pi}{44}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} + \sin \frac{15\pi}{44} - \cos \frac{15\pi}{44} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{7 \cdot 5 \cdot \pi}{22}$$

$$\frac{\sin(\frac{15\pi}{44} - \frac{\pi}{4})}{\sin} = \cos \frac{35\pi}{22}$$

~ 3

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{1/5} = y^{2/5} x^{-1/5}$$

(*)

$$023: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (*)$$

Рассмотрим (*), как кв. одночлен x:

$$x^2 - (2y + 4)x - 3y^2 + 12y = 0;$$

$$\frac{D}{4} = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y^2 + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 =$$

$$\text{Получа: } x = 2(y+2) \pm 2(y-1) = 2^2(y-1)^2$$

$$\begin{cases} x = 3y & (1) \\ x = 4 - y & (2) \end{cases}$$

Подставим (1) в (***) ($x=3y$)

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = (3y)^{2\lg(3y^2)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = 3y^{2\lg 3y + 2\lg y} \quad | \cdot (-\lg 3y)$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^0 = 3y^{2\lg y + \lg 3y} \quad (=1)$$

$$3y^{2\lg y + \lg 3y} = 1$$

$$y=1$$

$$2\lg y + \lg 3y = 0 \quad (3)$$

$$(3): \lg y^2 + \lg 3y = 0;$$

$$\lg y^2 - 3y = 0, \text{ т.е. } y=1 \text{ — ед. реш.}$$

Подставим (2) в (***) ($x=4-y$): Заметим: $4-y > 0$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y) \cdot y}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg y + 2\lg(4-y)} \quad | \cdot -\lg(4-y)$$

Подст (1) в (***) ($x=3y$):

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = 3y^{2\lg 3y^2}$$

$$y^{5\lg 3y} = 3^{\lg 3y} \cdot 3 \cdot y^{2\lg 3y^2} \quad (= y^{2\lg 3y^2} \cdot 3^{\lg 3y+1}) \quad | \lg_3$$

$$\lg_3 (y^{5\lg 3y}) = \lg_3 (3^{\lg 3y+1} \cdot y^{2\lg 3y^2})$$

$$4 \cdot \lg_3 y \cdot \lg_3 y = \lg_3 3y + 1 + 2 \cdot \lg_3 y^2 \cdot \lg_3 y$$

$$\frac{y(\ln 3 + \ln y)}{\ln 10} \cdot \frac{\ln y}{\ln 3} = \frac{(\ln 3 + \ln y)}{\ln 10} + 1 + 2 \cdot \frac{\ln y}{\ln 3} \cdot \frac{\ln 3 + 2\ln y}{\ln 10} \quad | \ln 10 - \ln 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4(\ln 3 + \ln y) \cdot \ln y = (\ln 3 + \ln y) \cdot \ln 10 + \ln 10 \cdot \ln 3 + 2 \ln y (\ln 3 + 2 \ln y)$$

$$4 \ln 3 + 4 \ln^2 y = \ln 3 \cdot \ln 10 + \ln 10 \cdot \ln y + \ln 10 \cdot \ln 3 + 2 \ln y \cdot \ln 3 + 4 \ln^2 y;$$

$$4 \ln 3 - 2 \ln 3 \cdot \ln 10 = (\ln 10 + 2 \ln 3) \ln y$$

$$\ln y = \frac{2(2 \ln 3 - \ln 10) \cdot \ln 3}{\ln 10 + 2 \ln 3} = 2 \cdot \ln 3 \cdot \frac{\ln \frac{e^2}{10}}{\ln 90} = 2 \cdot \ln 3 \cdot \log_{90} \frac{e^2}{10}$$

$$e^{\ln y} = e^{2 \cdot \ln 3 \cdot \log_{90} \frac{e^2}{10}}$$

$$y = (e^{\ln 3})^{2 \log_{90} \frac{e^2}{10}} = 3^{2 \log_{90} \frac{e^2}{10}}, \text{ т.е. } \begin{cases} x = 3^{1 + 2 \log_{90} \frac{e^2}{10}} \\ y = 3^{2 \log_{90} \frac{e^2}{10}} \end{cases}$$

Решим (2) в (***) ($x = 4 - y$)

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}$$

$$(1) \left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3 + 2\lg y^2} \quad || \log_y$$

• При $y=1$: $\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1^{2\lg 3}$ — верно т.е.: (3;1)

• При $y \neq 1$:

$$\log_y \frac{y^4}{3} \cdot \lg 3y = 2\lg 3 + 2\lg y^2$$

$$(4 - \log_y 3)(\lg 3 + \lg y) = 2\lg 3 + 4\lg y$$

$$4\lg 3 + 4\lg y - \log_y 3 \cdot \lg 3 - \log_y 3 \cdot \lg y = 2\lg 3 + 4\lg y$$

$$2\lg 3 - \frac{\lg^2 3}{\lg y} - \lg 3 \cdot \log_y 3 -$$

$$\frac{2\lg 3}{\lg 10} - \frac{\lg^2 3}{\lg y \cdot \lg 10} - \frac{\lg 3 \cdot \lg y}{\lg y \cdot \lg 10} = 0; \quad | : \frac{\lg 3}{\lg 10}$$

$$2 - \frac{\lg 3}{\lg y} - 1 = 0$$

$$1 = \log_y 3, \text{ т.е.: } \underline{y=3}, \text{ т.е.: } x=9 \text{ т.е.: } (9;3)$$

$$(2) \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y) \cdot y} \quad (\text{замена } u = 4-y > 0)$$

$$\frac{y^{5\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg(4-y) + 2\lg y} \cdot y^{-2\lg(4-y)}$$

$$\frac{y^{3\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = y^{2\lg y} \cdot y^{-2\lg y} \quad y^{3\lg(4-y) - 2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \quad || \lg$$

$$\frac{y^{3\lg(4-y) - 2\lg y}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = 1 \quad (3\lg(4-y) - 2\lg y) \cdot \lg y = \lg^2(4-y)$$

$$3\lg(4-y) \cdot \lg y - 3\lg^2 y = (\lg(4-y) + \lg y)(\lg(4-y) - \lg y)$$

$$3\lg y (\lg(4-y) - \lg y) = (\lg(4-y) + \lg y)(\lg(4-y) - \lg y)$$

$$(\lg(4-y) - \lg y)(3\lg y - \lg(4-y) - \lg y) = 0;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \lg(4-y) - \lg y = 0, \\ 2\lg y - \lg(4-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg \frac{4-y}{y} = 0, \\ \lg \frac{y^2}{4-y} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4-y}{y} - 1 = 0, \\ \frac{y^2 - 4 + y}{4-y} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4-y-y}{y} = 0, \\ \frac{y^2 + y - 4}{4-y} = 0 \end{cases}$$

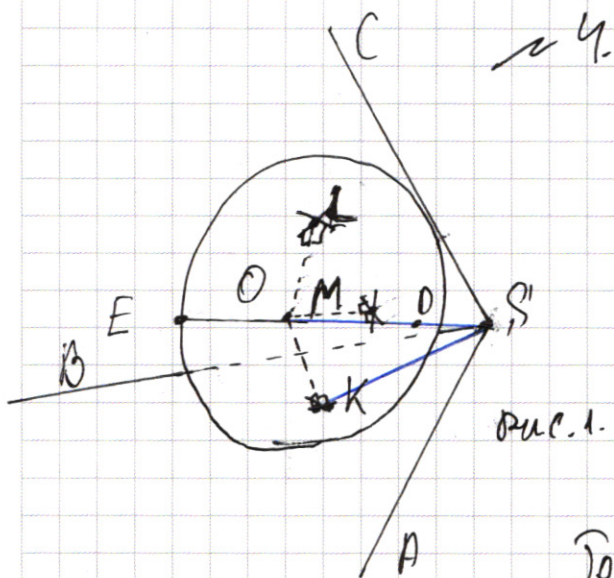
$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

тогда: ~~$x = 6; y = 2$~~
 ~~$x = \frac{3\sqrt{17}-3}{2}; y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$~~

Итого: $(3; 1)$
 $(9; 3)$

~~$(2; 2)$~~
 ~~$(\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2})$~~
 ~~$(\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-\sqrt{17}-1}{2})$~~

Ответ: $(3; 1)$
 $(9; 3)$
 $(2; 2)$
 $\frac{9-\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}$
 $\frac{9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$



Дано: $ср$; $вше. в$ $\angle с в ш е, е'$
 $кас. в$ $м; к; л$
 $\angle KSO - ?$; $S_{сеч}(MKL) - ?$
 $S_{сеч.1} = 1$; $S_{сеч.2} = 4$
 (L) (B)

Решение: ^{критерий}

1) Заметим, что: $L \parallel B$ по ~~т.е.~~ 11 -а п. теор.

2) Тогда: т.к.

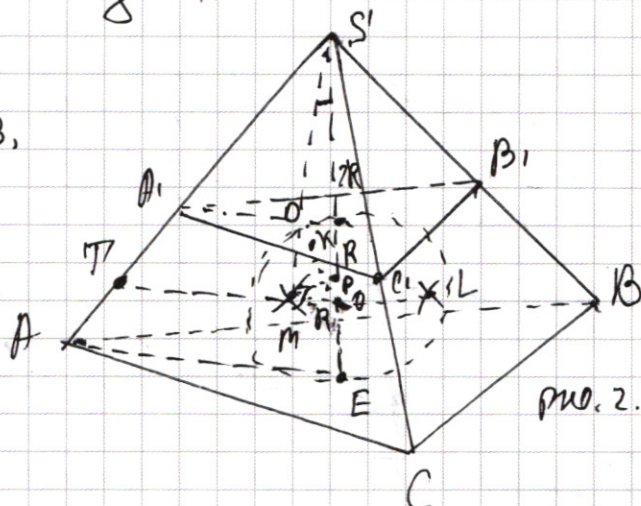
$\Delta AS' \sim \Delta A_1 S' C$; $\Delta A_1 S' B \sim \Delta A_1 S' B$

$\Delta B_1 S' C \sim \Delta B_1 S' C$ (по 2-м углам)

параллельно: $R_1 = R_2 = R_3$ (отсюда: $ма$),

то: $\Delta O B_1 S' \sim \Delta O B_1 S'$, а

$$т.к. \frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4}, \text{ то: } k = \frac{1}{2}$$



3) Аналогично R_2 : $\Delta ASE \sim \Delta A_1 S' D$: $k = \frac{1}{2} = \frac{A_1 S'}{AS'}$,

$$т.е.: SO = OE = \frac{1}{2} SE;$$

Пусть: $R_{сеч} = R$, тогда: $S'O = 2R = OE$

4) ~~Решение~~ $OM = OM = R$, тогда: $\angle MS'O = \arcsin \frac{1}{3}$

Аналогично: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

~~Решение~~ ~~Решение~~ ~~Решение~~

~~Решение~~ ~~Решение~~ ~~Решение~~

~~Решение~~ ~~Решение~~ ~~Решение~~

~~Решение~~ ~~Решение~~ ~~Решение~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) Правильно. γ : $P \in \gamma$ и $\gamma \perp SO$, где:
 $PO = \frac{R}{3}$, и $P \in (O, S)$

6) Т.к. из п. 4: $\angle MOS = \angle KOS' = \angle LOS' = \arcsin \frac{1}{3}$,
то: Расст. от т. Пересеч. γ с OM ; OL ; OK
равны (по т. Пиф.), т.е.:

$$\rho(P; M) = \frac{2\sqrt{2}R}{3} \quad \text{т.е. т. пересеч. } \gamma \text{ с}$$

OM ; OL ; OK это M ; L ; K соответственно (по т. Пиф.),

тогда: ~~тогда~~ $K, L, M \in \gamma$

7) $\frac{SR}{SO} = \frac{BR}{3} = \frac{BR}{4R} = \frac{1}{4} = R$, ~~тогда~~ ~~аналогично~~

пусть: 2: $\frac{S_{\text{сеч. } \gamma}}{S_{\text{шар}}} = k^2$; т.е. $S_{\text{сеч. } \gamma} = \frac{(8R)^2}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{256}{81}$
| пер. ссч.

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}$
8) ~~16~~ $\frac{256}{81}$

7) $\frac{SR}{SO} = \frac{8R}{3} = \frac{8}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$ тогда аналогично п. 2:

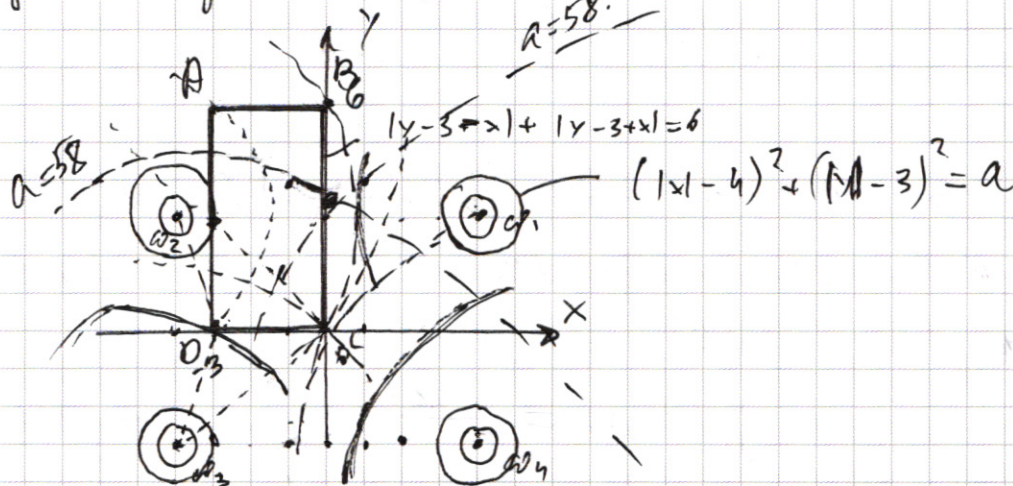
$$\frac{S_{\text{сеч. } \gamma}}{S_{\text{шар}}} = k^2; \quad S_{\text{сеч. } \gamma} = \frac{2}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{3}; \quad \frac{16}{9}$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6. & (1) \text{ все } a \text{ к/к у/у. 2 рсм} \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Решение:

1) Построим гр-ки (1) и (2)



- Заметим, что у ω_2 рсм. (2 осм.) у/у. при $a > 1$; $a < 10$
- При $a = 10$: у ω_3 и гр-ка (1) есть рсм и у ω_2 и гр-ка (1) есть рсм. т.е. $a = 10$ - 2 рсм.
- При $a \in (10; 25)$ у (1) и (2) более 2-х рсм: ω_2 и ω_3 пересекаются (1) более чем в (2)-х точках
- При $a = 25$: более 2-х рсм. (см. рис.)
- При $a \in (25; 58)$: ω_3 и ω_1 пересекаются гр-ки более, чем в 2-х точках; при $a = 58$: ω_1 : $A; D \in \omega_1$; также ω_2 и ω_4 пересекаются (1) не в $A; D$
- При $a \in (58; 97)$: ω_3 и ω_4 пересекаются (1) более, чем в 2-х точках
- При $a = 97$ ($a = 0_3 B^2$): 3 т. пересеч.
- При $a \in (97; 130)$: 2 т. пересеч.: ω_4 и (1)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

кон. ко 2 пар-?

• По уму: $2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + 2^{64}x - x;$$

$$f(x) = 2^x - 2^{64}x + x < 70 - 3 \cdot 2^{65}$$

• $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$: $f(x) \rightarrow +\infty$

• $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$: $f(x) \rightarrow -\infty$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

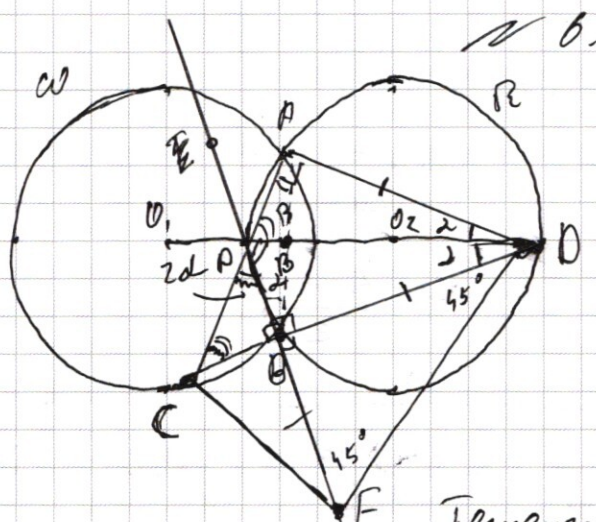
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a \in (1; 130)$ у $\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4$ нет с γ -мис
(1) т.пересеч.

тогда 2 т.пересеч. При $a \in (1; 10] \cup (97; 130)$

Ответ: $(1; 10] \cup (97; 130)$



Дано: $\omega_1; \omega_2; r_{\omega_1} = r_{\omega_2} = 5$

$C \in \omega_1; D \in \omega_2; B \in CD;$

$\angle CAD = \pi/2$

$FB \perp CD; FB = BD$

а) $CF = ?$

б) $BE = ?; S_{\triangle ACF} = ?$

Решение:

1) Пусть: $\angle BDB = \alpha$ ($BF \cap \omega_1, \omega_2 = P$) и $\angle PAB = \angle PBA = \beta$

2) Заметим, что т.к. $\angle CAD = \pi/2 = \angle PBD$ и т.к. у

углов $\angle CAD$ и $\angle PBD$ общая т. D, то: $P \in \omega_2$ и

авт. продолж. дуги $\omega_2 D$ (по св-ву впис. $\angle$)

3) По т. синусов для $\triangle PBD$: $PB = \sin \alpha \cdot d$;
 $BD = \cos \alpha \cdot d = BF$;

4) тогда $\angle CPB = \pi - 2\beta = \pi - 2(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2\alpha$; т.е.:

~~но $\angle CAD = \angle CPB = 2\alpha$~~ $\angle BCP = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$

$AB = 2 \cdot PB \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2d \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2d \sin^2 \alpha$

~~$AB = PB \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = d \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$~~

Также по т. синусов для $\triangle PBA$: $AB = d \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$$7.0: AB = d \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2d \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 2 \sin^2 \alpha \quad (1)$$

~~Видно, что на $(0; \frac{\pi}{2})$ - уб. функция;
 прав. ноль: возр, левый
 на $(0; \frac{\pi}{2})$ не может иметь корни, т.е.
~~нет корней~~~~

$$(1) \quad \cos \alpha = 2 - 2 \cos^2 \alpha;$$

$$2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 2 = 0;$$

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$\cos \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \quad \text{т.е.:} \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

$$5) \text{ Тогда: } BD = BF = 10 \cdot \frac{\sqrt{17}-1}{4} = \frac{5\sqrt{17}-5}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{16}} = \sqrt{1 - \frac{17+1-2\sqrt{17}}{16}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{17}-1}{8}}; \end{aligned}$$

$$\therefore CB = d \cdot \sin \alpha = 10 \sqrt{\frac{2\sqrt{17}-1}{8}};$$

$$\begin{aligned} CF &= \sqrt{CB^2 + BF^2} = 5 \cdot \sqrt{4 \cdot \frac{2\sqrt{17}-1}{8} + \frac{(\sqrt{17}-1)^2}{4}} = \\ &= 5 \sqrt{\sqrt{17} - \frac{1}{2} + \frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}} = \sqrt{4 - \frac{\sqrt{17}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{8-\sqrt{17}}{2}} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 3} \\ 1125 \end{array} = (333 + 42)3 = 375 \cdot 3$$

$$6n \times 9 = \frac{256}{81}$$

$$3375 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 125 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$P_5 = C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 56$$

$$\textcircled{1} = 17$$

$$Y = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

Осталось рассмотреть: 5 точек; и еще точек: 3^3

• При $n_g = 0$: всего: $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

• При $n_g = 1$: всего: рассматриваем: 3 и 3;

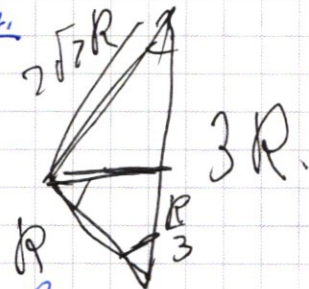
C_5^2 точек; = 10 точек;

1) Рассматриваем 5-ку: 56 см.

2) Рассматриваем 3-ку:

a) ($n_g = 0$): 10 см.

b) $n_g = 1$: 10 см.



$[n_g \leq 1]$, тогда всего по пр. 2, и
выразим: $56 \cdot 20 = 1120$ ч

$$\cos 11\alpha - \cos 3\alpha - \sin 11\alpha + \sin 3\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos 4\alpha$$

$$- \sin(11\alpha - \frac{\pi}{4}) + \sin(3\alpha - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4\alpha$$

$$\sin(3\alpha - \frac{\pi}{4}) - \sin(11\alpha - \frac{\pi}{4}) = 2 \cdot \sin \frac{3\alpha - 11\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha + 11\alpha}{2}$$

$$-2 \sin \frac{14\alpha}{2} \cdot \sin \frac{7\alpha}{2} + 2 \sin \frac{7\alpha}{2} \cdot \cos \frac{7\alpha}{2} = \cos \frac{14\alpha - \pi}{2} = 2 \cdot \sin(-\frac{7\alpha}{2}) \cdot \cos(\frac{7\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$= \sqrt{2} \cos 4\alpha$$

$$\sin 2\alpha - \sin 4\alpha = 2 \sin \frac{2\alpha - 4\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha + 4\alpha}{2}$$

$$-2 \sin 7x \cdot \cos \frac{7x}{2} - 2 \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{7x}{2} = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$-2 \sin \frac{7x}{2} (\sin 7x + \cos \frac{7x}{2}) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x.$$

• Пусть: $\cos \frac{7x}{2} = t$,

тогда: 1) $\cos 4x = 2 \cos^2 7x - 1 =$

$$- \cos 11x = \cos (11x + 3x) = 2 \left(2 \cos^2 \frac{7x}{2} - 1 \right)^2 - 1 = 2 (2t^2 - 1)^2 - 1 =$$

$$= \cos 11x = \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 11x$$

$$= 2 \cdot (4t^4 - 4t^2 + 1) - 1 =$$

$$= 8t^4 - 8t^2 + 1;$$

~~$2 \sin 7x =$~~

• $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

$$- \sqrt{2} \cdot \sin (11x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin (3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin (3x - \frac{\pi}{4}) - \sin (11x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

1) $\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} =$

$$2 \cdot \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 4x.$$

$$2 \cdot \sin (-\frac{7x}{2}) \cdot \cos (7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$$

• $\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cos 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin 7x$

$$-2 \cdot \sin \frac{7x}{2} (\sqrt{2} \cos 7x + \sqrt{2} \sin 7x) = \cos 4x$$

$$-2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{7x}{2} \cdot \cos 7x - 2 \sqrt{2} \cdot \sin \frac{7x}{2} \cdot \sin 7x = \cos^2 7x - \sin^2 7x;$$

$$\cos 7x (-2 \sqrt{2} \cdot \sin \frac{7x}{2} - \cos 7x) + \sin 7x (-2 \sqrt{2} \cdot \sin \frac{7x}{2} + \sin 7x) = 0;$$

2) $2 \cos 11x - 2 \cos 3x - 2 \sin 11x + 2 \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 11x)$

$$(2 \cos 11x - \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x) - (2 \cos 3x + \sqrt{2} \cos 11x \cdot \cos 3x) -$$

$$- (2 \sin 11x - \sqrt{2} \sin 3x \cdot \sin 11x) + (2 \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \cdot \sin 11x) = 0;$$

$$\cos 11x (2 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x (2 + \sqrt{2} \cos 11x) -$$

$$- \sin 11x (2 - \sqrt{2} \sin 3x) + \sin 3x (2 + \sqrt{2} \sin 11x) = 0;$$

$$\sin(a) - \sin(b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin a (1 - \cos b) - \sin b (1 + \cos a) = 0;$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{7x}{2} - \cos b \right) =$$

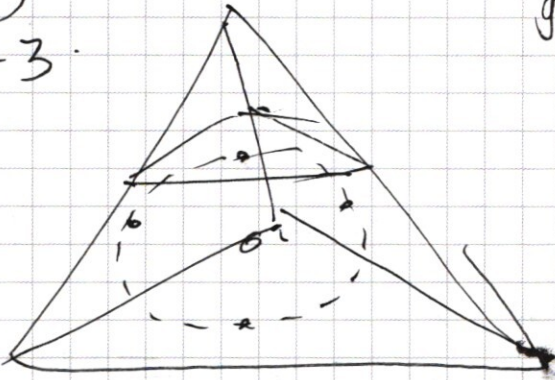
$$= \sqrt{2} \cdot \cos$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б.
 $y=3$
 $x=-3$

$3-6$

$3.$



$$\frac{R^2}{9} + R^2 = 2.$$

$$2R - \frac{R}{3} = \frac{5R}{3}$$



$$MS = 7\sqrt{2}R.$$

$$MP = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$MP = \frac{5R}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} =$$

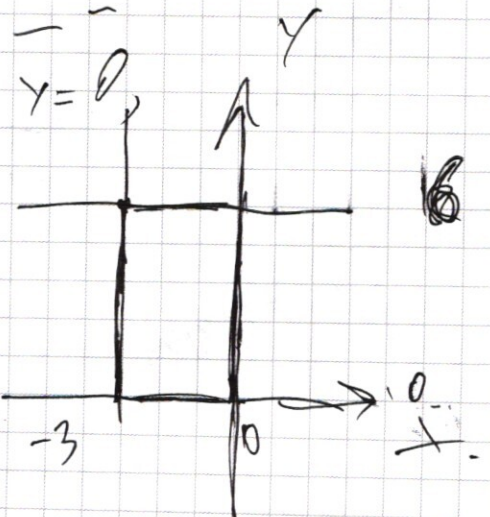
$$= \frac{10\sqrt{2}}{9} \quad y=0, \quad y=-3.$$

++

$$y-3 + y-3 = 6$$

$$y=6.$$

$$40 \cdot 1 = 50 = 130$$



+ -

$$y-3 \rightarrow -x+5-x=6,$$

$$x=-3$$

- +

$$x+3+x \quad x-3+x=6,$$

$$x=0.$$

$$y=0, \quad y=-3.$$

$\sin \alpha = \frac{AB}{AC}$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} - 2\alpha = \frac{\pi}{2}$

$AB = d \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) = \sin 2\alpha$

$AB = d \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha)$

$\frac{d}{2} - \frac{d}{2} \cos 2\alpha$

$d - d \cos 2\alpha$

$2\sin^2 \alpha = 2(1 - \cos 2\alpha)$

$\cos 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin a \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{b}{2} - \sin b \cdot \cos^2 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\sin^2 \frac{b}{2} \cdot \sin a - \cos^2 \frac{a}{2} - \sin \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos^2 \frac{a}{2} = 0;$$

$$\cos a + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{a}{2} (\sin \frac{b}{2} - \sin \frac{a}{2} - \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{a}{2}) = 0;$$

! для a и b .

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\lg 2} = y^{2 \lg 2x}$$

$$2 \lg(3x^2) =$$

$$= 2 \lg 3 + 4 \lg x = 2 \lg 3 + 4 \lg x$$

$$= 2 \lg 3 + 4 \lg x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0, (*)$$

$$x^2 - (2y+4)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(*) \quad x^2 - 4x + y^2 - 4y^2$$

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 - 2xy - 3y^2 + 12y = 0;$$

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4)$$

$$\frac{Q}{u} = (y+2)^2 - (12y - 3y^2) =$$

$$= y^2 + 4y + 4 - 12y + 3y^2 =$$

$$= 4y^2 - 8y + 4 =$$

$$= 4(y-1)^2;$$

$$= 4(y-1)^2;$$

$$= 4(y-1)^2;$$

$$= 4(y-1)^2;$$

$$x = \frac{2y+4 \pm 2(y-1)}{2}$$

$$x = \frac{2y+4 - 2y+2}{2} = 3$$

$$x = \frac{2y+4 + 2y-2}{2} = 2y+1$$

$$x = 2y+1$$

$$x = 2y+1$$

$$x = 2y+1$$

$$x = 2y+1$$

$$x = 2y+1$$

$$x = \frac{\pi}{12}; \quad \cos \frac{11\pi}{12} - 2 \lg(y)(y-1) =$$

$$- \cos \frac{3\pi}{12} = 2(\lg y + \lg(y-1))$$

$$- \sin \frac{11\pi}{12} + \sin \frac{3\pi}{12} = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{14\pi}{12}$$

$$- \sin \left(\frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$- \sin \left(\frac{11\pi - 3\pi}{12} \right) = \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$- \sin \left(\frac{8\pi}{12} \right) = \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$- \sin \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{7\pi}{6}$$

$$\lg 3 \lg 3 = \lg 3 \lg 3$$

$$\lg 3y^2 = \lg 3 + 2 \lg y$$

$$\lg 3y^2 = \lg 3 + 2 \lg y$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$x = \frac{5\pi}{144}$$

$$\cos \frac{11 \cdot 5\pi}{144} - \cos \frac{3 \cdot 5\pi}{144} - \sin \frac{11 \cdot 5\pi}{144} + \sin \frac{3 \cdot 5\pi}{144} =$$

$$\cos \frac{5\pi}{48} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 2 \cdot \cos \frac{14 \cdot 5\pi}{144}$$

$$\sin \left(\frac{75\pi}{144} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{14 \cdot 5\pi}{144 \cdot 22} = \cos \frac{35\pi}{22}$$

$$\sin \left(\frac{20\pi}{44} \right) = \cos$$

$$\sin \left(\frac{13\pi}{22} \right) = \cos \frac{35\pi}{22} = \cos \left(\pi + \frac{13\pi}{22} \right) = -\cos \frac{13\pi}{22}$$

$$\cos \frac{11 \cdot 3\pi}{28} - \cos \frac{3 \cdot 3\pi}{28} + \sin \frac{11 \cdot 3\pi}{28} + \sin \frac{3 \cdot 3\pi}{28} = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$2 \log_{10} \frac{y^2}{10} = \left(\frac{y^3}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x \cdot y} \log y$$

$$= \log_{10} 10 + x$$

$$2 - \ln 10 = \ln e^2 - \ln 10 = \log e^2 + \log \frac{1}{10}$$

$$y^{5 \lg x} - 1 = y^{2 \lg x + 2 \lg y} =$$

$$= y^{2 \lg y}$$

$$3 \lg 3 \left(\frac{y^4}{3} \right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2} \log \frac{y^2}{10}$$

$$\lg 3y + \log \frac{y^4}{3}$$