

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Число $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$, где $a_1, \dots, a_8$ — цифры

Кроме, $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 3375 = 3^3 \cdot 5^3$

$a_i \nmid 2$, иначе $\prod_{i=1}^8 a_i \nmid 2$, но $\prod_{i=1}^8 a_i = 3375 \nmid 2$

$a_i \nmid 7$, иначе $\prod_{i=1}^8 a_i \nmid 7$, но $\prod_{i=1}^8 a_i \nmid 7 = 3375 \nmid 7$

Возможны только цифры: 1, 3, 5, 9

Среди этих цифр только одна делится на 5 (но не делится на 25)

Значит, среди $a_1, \dots, a_8$ есть ровно 3 числа 5
(иначе $\deg_5(\prod a_i) \neq 3$)

2. Случай:

1) среди цифр есть 9:

Тогда наши цифры 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1 (последние 4
за могут быть только 3, 1, 1, 1 т.к. их произведение
равно 3)

$$\text{Кол-во перестановок} = \frac{8!}{3! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

2) Цифры 9 нет, тогда цифры: 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1

$$\text{Кол-во перестановок} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{8 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 10 = 560$$

Всего: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680.

$$3. \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^{2\log x + 2\log y};$$

$$\frac{y^5}{x} = y^{(2+2\frac{\log y}{\log x})} = y^{(2+2\log_y x)};$$

$$y^3 = y^{2\log_y x \cdot x};$$

$$(y^{3-2\log_y x})^{\log_y \log_y x} = x^{\log_y \log_y x};$$

$$\frac{(-2\log_y^2 x + 3\log_y x)}{y} = x^{\log_y y};$$

$$-2\log_y^2 x + 3\log_y x - 1 = 0;$$

$$\log_y x = \frac{-3 \pm 1}{-4};$$

$$a) \log_y x = 1 \Rightarrow x = y$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = -4x^2 + 8x = 0;$$

$$x(x-4) = 0;$$

$$\text{Решения: } (4; 4)$$

$$b) \log_y x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = y^2$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 12y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0;$$

$$y = 3 \text{ подходит}$$

$$(y-3)(y^2+y-4) = 0;$$

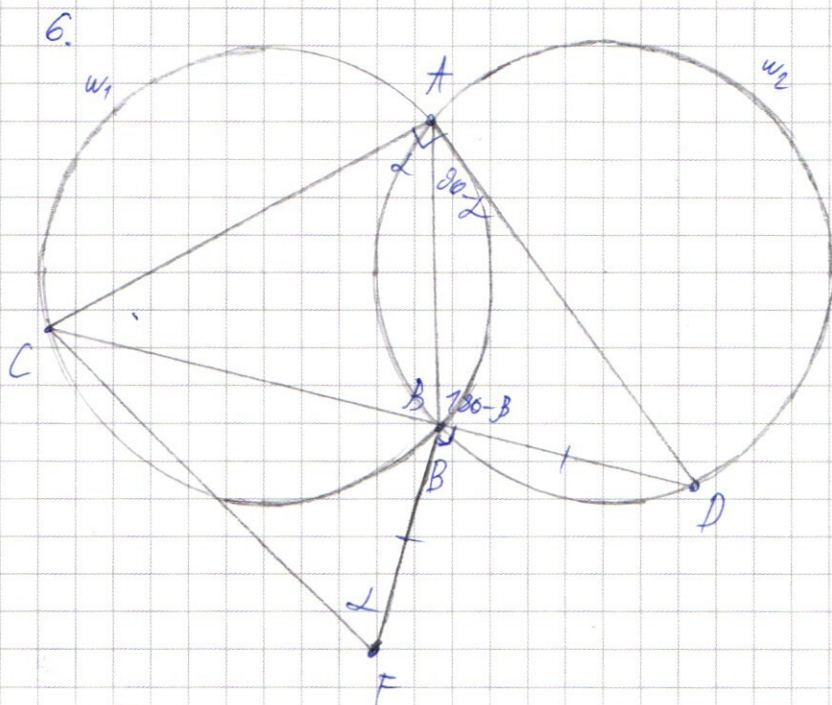
$$y^2+y-4 = 0;$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad (\text{2-ой корень } < 0)$$

$$\text{Решения } (\sqrt{3}; 3); \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$\text{Ответ: } (4; 4); (\sqrt{3}; 3); \left(\sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Р не лежит внутри
круга окружности
и, тогда $\angle CAD < \angle CAB \leq$
 $\leq 90^\circ$.

Случай, когда $D = B$ или
 $D = A$ не рассматрива-
 ется (в первом случае
 $\triangle CBF$ вырожден и $CF = CB$,
 а во втором $\triangle ABD$ вырожден.)

по теореме $\angle C + B = 2 \Rightarrow \angle DAB = 90^\circ - 2$

а) $CB = 2R \cdot \sin \angle$ (но т. центр $\odot$ в $\triangle ABC$)

$$BD = 2R \cdot \sin 90^\circ - 2 = 2R \cdot \cos \alpha \quad (\text{по т. син. для } \Delta ABD)$$

$$BF = BD = 2R \cdot \cos \alpha$$

$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} = \sqrt{4R^2(\cos^2 2 + \sin^2 2)} = 2R = 10$$

Omber: 10.

5) $CB = 2R \sin \alpha = 6 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$$\frac{CB}{BF} = \tan \angle CFB = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow \angle CFB = \alpha \Rightarrow \angle BCF = 90^\circ$$

Пусть $\angle CBA = \beta \Rightarrow \angle ABD = 180^\circ - \beta$

Пока $AC = 2R \cdot \sin B$ (по т. синусов ΔABC)

$$AD = 2R \cdot \sin 60^\circ B = 2R \cdot \sin B \text{ (not corr. } \triangle ABD) \Rightarrow AC = AD$$

$$CD = 2R \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) = 10 \cdot \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = 14$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin(135^\circ - 2) \cdot CF \cdot AC$$

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

$$AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\sin 135^\circ - 2 = \sin 135^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{5}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10 = 98$$

Ответ: 98.

4. Докажем, что $x \in [7; 71]$

а) Если $x < 0$, то $0 < 2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \Rightarrow y > 0$

$$0 > 70 - 2^{64} + 1 \geq 70 + (2^{64} - 1)x \geq y \Rightarrow y < 0$$

противоречие

б) Если $x \in [0; 6]$

$$y > 70 + (2^{64} - 1)x \geq y$$

$$y > 70 + 2^x + 3 \cdot 2^{65} \Rightarrow y > 70 + 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\Rightarrow 1 > 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = (x - 6)2^{64} + 70 - 2^x - 3x \quad (*)$$

$$\text{если } x < 6, \text{ то } (x - 6)2^{64} \leq -2^{64} \Rightarrow (x - 6)2^{64} + 70 - 2^x - 3x < 0 < 1$$

если $x = 6$, то $70 - 64 - 6 = 0 < 1$ противоречие

в) если $x \geq 71$

$$\text{Пока } 2^x > (2^{64} - 1)x \quad \text{Тогда}$$

$$\text{Док-во: По индукции: } 2^{71} = 2^7 \cdot 2^{64} = 128 \cdot 2^{64} > 49 \cdot 2^{64} - 71$$

$$\text{Шаг: Пусть } 2^x > (2^{64} - 1)x \Rightarrow 2^{x+1} > (2^{64} - 1)x \cdot 2 = 2^{65}x - 2x > 2^{64}(x+1) > 2^{64}(x+1) - x - 1$$

две линейные функции, причем первая больше второй и в точке $x = 71$

неравенство выполняется $\Rightarrow$ при $x > 71$ оно также верно

Таким образом рассмотрим (*).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$((2^{64} - 1)x - 2^x) + (40 - 3 \cdot 2^{65}) > 0 < 1 \text{ противоречие.}$$

г) $x=70 \Rightarrow$ неравенство (*) принимает вид $0 > 1$ (против.)
Докажем, что все $x \in [7; 70]$ подходят.

Неравенство (*):

$$(40 - x) + (2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}) \geq 1$$

Докажем, что $2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} \geq 0$

Если $x \in [7; 64]$

$$2^{64}(x-6) - 2^x \geq 2^{64} - 2^x \geq 0$$

Если $x \in [65; 70]$

$$2^{64}(x-6) - 2^x \geq 2^{64}(65-6) - 2^{69} = 2^{64} \cdot 59 - 2^{69} = 2^{64} \cdot (59 - 2^5) = 2^{64} \cdot (59 - 32) = 2^{64} \cdot 27 > 0 \text{ т.т.д.}$$

Каждому x соответствует $40 - x + 2^{64}x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$
вариантов y .

Пока всего решений:

$$70 \cdot 58 - 3 \cdot 2^{65} \cdot 58 + 2^{64} \cdot \left(\frac{63 \cdot 76}{2} \right) - \left(\frac{2^{40} - 2^7}{2-1} \right) = 4110 + 128 +$$

$$+ 2^{64}(-378 + 2394 - 64) = 2^{64} \cdot 2330 + 4538$$

Ответ: $2330 \cdot 2^{64} + 4538$.

$$2. (\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x)^2 = (\sqrt{2} \cos 7x)^2$$

$$\begin{aligned} & \cos^2 11x + \sin^2 11x + \cos^2 3x + \sin^2 3x - 2(\cos 11x \cos 3x + \sin 11x \sin 3x) + \\ & + 2(\sin 3x \cos 11x + \sin 11x \cos 3x) - 2 \cos 11x \sin 11x - 2 \sin 3x \cos 3x = \\ & = 2 \cos^2 7x; \end{aligned}$$

$$1 - 2 \cos 8x + 2 \sin 14x - 2 \cos 11x \sin 11x - 2 \sin 3x \cos 3x = -\sin^2 7x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

3 3 7 5 | 3
1 1 2 5 | 5
2 2 5 | 5
4 5 5
9 3
3 3
1

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{10} + \frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10} \quad \begin{array}{r} \times 56 \\ 20 \\ \hline 1120 \end{array}$$

1 3 5 7 9
1 3 5 9

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x + \cos 3x + \sin 11x + \sin 3x - 2\cos 11x \cdot \cos 3x - 2\sin 11x \sin 3x$$

$$= \sqrt{2} (\cos 3x \cdot \cos 11x - \sin 3x \cdot \sin 11x)$$

$$+ 2 \sin^3 3x \cos 11x + 2 \cos 3x \sin^3 11x = 2 \cos^2 14x$$

$$1 + 1 - 2 \cos 8x + 2 \sin 14x = 2 \cos^2 14x$$

$$1 - \cos 8x + \sin 14x = \cos^2 14x$$

$$\sin^2 14x (\sin 14x + 1) = \cos 8x$$

$2\alpha = 90^\circ$
 $\alpha = 45^\circ$

$$1 + 2 \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 1$$

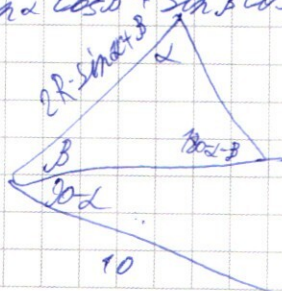
$$\sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha =$$

$$- \sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos 11x + \cos 11x - \cos 3x = \sin 2\alpha + 1$$

$$+ \sqrt{2} \cos 11x (-\cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}}) - \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} =$$

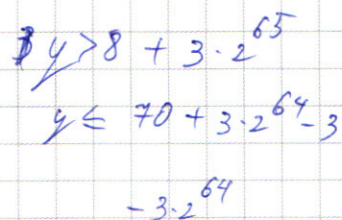
$$0 = (\sqrt{2} \cos 11x + 1) (\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 3x) + (\sqrt{2} \sin 11x + 1) (\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}}) =$$

$$2R (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) = \sqrt{2} (\sin 11x \cos 3x + \sin 11x - \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}})$$



$$\frac{10^2}{2} \cdot \sin 2\alpha + 45 \cdot \sin 135^\circ$$

$$2.4R^2 \cdot \sin 135^\circ = 4R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \sin 2\alpha)$$



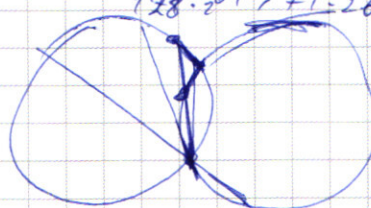
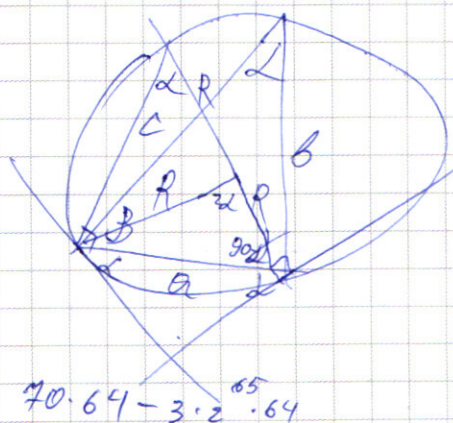
71

Sind =

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$x \in [7; 70]$$

$$\begin{aligned} 70 - x &\geq 0 & (x-6)2^{64} - x - 2^x &\geq 0 \\ 70 - x &\geq 0 & (x-6)2^{64} - 2^x &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\frac{R}{a} = \sin 90^\circ - 2$$

$$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\frac{a}{2R} = \sin \alpha$$

$$y > 3.2^{65} \quad \text{+}$$

4207

$$y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 69 + (2^{64} - 1)$$

$$70 + (2^{64} - 1) \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{65} \geq 1$$

$$40 + 3 \cdot 2^{65} - 6 - 2^6 - 3 \cdot 2^{65}$$

$$64 - 2^6 = 0 < 1$$

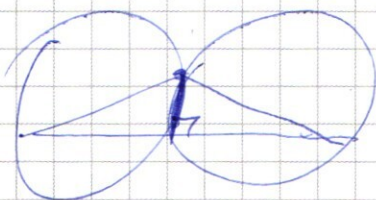
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$50 - \left(\frac{3}{5} \cos B + \frac{4}{5} \sin B \right) \left(\frac{4}{5} \cos B + \frac{3}{5} \sin B \right) = \frac{(35)^2}{25} \cdot 2 =$$

$$g = 2x - 12 \pm \sqrt{\quad}$$

$$(70)^2 = 4900$$



$$4x^2 + 144 - 24x + 12x^2 - 48x$$

$$16x^2 - 72x + 144$$

$$-2 \cdot 64 - 6 \cdot 2 \cdot 64$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

$$\log_{10} xy = xy = \frac{\log x \cdot \log y}{\log x + \log y} = \frac{63}{70} = \frac{9}{10}$$

x

$$\frac{\log y}{\log x} = \log_x y$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 38 \\ \hline 504 \\ 189 \\ \hline 2394 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 6 \\ \hline 378 \end{array}$$

$$\frac{\log y}{\log x} = \log_x y$$

$$y = x^{\log y}$$

$$\frac{y^5}{x} = y^{(2 + \frac{\log y}{\log x})}$$

$$2330 - 378 = 1952$$

$$\begin{array}{r} 1952 \\ + 378 \\ \hline 2330 \end{array}$$

$$\frac{y^3}{x} = y^{\log x}$$

$$\log_x y = y$$

$$\begin{array}{|l} x=0 \\ x=4 \end{array} \quad y=0$$

$$\frac{1}{\log_x y} = \log_y x$$

$$x = y^{3 - \log_x y}$$

$$D = 9 - 4 = 5$$

$$\frac{y^3}{x} = y^{2 \log_x y}$$

$$y = y^{(3 - \log_x y) \log_x y}$$

$$\begin{array}{l} -c^2 + 3c - 1 = 0 \\ c = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}$$

$$x = y^{3 - 2 \log_x y} \quad -2c^2 + 3c = 1$$

$$\left(\frac{95}{x}\right)^{2x} = y^2$$

$$2c^2 - 3c + 1 = 0$$

828

$$c = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$16 - 16$$

$$3y^2 - 4y - 7$$

$$16 + 84 = 100$$

$$27 - 18 - 27 + 12 = 39$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 4 \\ \hline 393 \end{array}$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm 10}{6} = -1 \pm \frac{7}{3}$$

$$\frac{343}{27} - \frac{98}{9} - \frac{49}{3} + 12 =$$

$$= 10 + \frac{73}{27} - 20 - \frac{8}{9} - \frac{1}{3} =$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 11 \\ \hline 165 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 4y + 12 & y - 3 \\ \underline{y^3 - 3y^2} & y^2 + y - 4 \\ y^2 - 4y + 12 & \\ \underline{y^2 - 3y} & \\ -4y + 12 & \\ \underline{-4y + 12} & 0 \end{array}$$

$$1 + 16$$

$$-\cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}$$