

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $3325 = 3 \cdot 5^3$. Заметим, что каждая цифра в числе это $3^m \cdot 5^n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ $m, n \geq 0$. И нас есть всего 4 таких цифры: 1; 3; 5; 9

Тогда есть 2 варианта. I вариант в нашем числе три цифры 3; две цифры 5; и две цифры 2. Такая число $C_8^3 \cdot C_5^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$

(т.к. сначала выбрали 3 числа и поставили цифра 3, потом выбрали 3 числа и поставили цифра 5.)

II вариант в нашем числе две цифры 5; три цифры 3 и одна цифра 9. Такая число

$$C_8^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} \cdot \frac{2}{1} = 1120$$

(Сначала выбрали 3 числа для 5, потом 3 числа для 3, и в оставшиеся число ставим 9)

Итого: $1120 + 560 = 1680$.

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$-2 \sin 2x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sin 4x (\sin 2x + \cos 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2x + \cos 2x) (\sin 2x - \cos 2x)$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x \right) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \left(\sin 4x + \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x \right) = 0$$

$$(\sin 4x + \cos 4x) \left(\sin 4x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) \right) = 0$$

$$(\sin 4x + \cos 4x) \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 4x + 4x\right)\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 4x - 4x\right)\right) = 0$$

$$2(\sin 4x + \cos 4x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x\right) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3}{2}x = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k \\ x = \frac{17}{12}\pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi + 2\pi k \end{cases}$$

$$2) \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{11}{2}x = -\frac{3}{8}\pi + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3}{44}\pi + \frac{2\pi n}{11}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3) \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\sin^2 2x + 2\cos 2x \cdot \sin 2x + \cos^2 2x = 0$$

$$2\cos 2x \cdot \sin 2x = -1$$

$$\sin 4x = -1$$

$$4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k; \quad x = -\frac{3}{44}\pi + \frac{2\pi k}{11};$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k;$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{2};$$

$$x = \frac{17}{12}\pi + 2\pi k;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy + 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x y}$$

$$\frac{y^{5 \lg x} - x^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}}{y^{5 \lg x}} = 0$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$u_3(1) : 1) \text{ мыла } x = 3y$

$$y^{5 \lg 34} = (34)^{\lg 34} \cdot y^{2 \lg 34 + 2 \lg 4}$$

$$5 \lg 34 = \lg 34 + 4 \lg 34 = \lg 34 + 2 \lg 34^2 = \lg 34^5$$

$$y^5 \log 3y = 3 \cdot y^5 \log 3 = 27y^5$$

$$1. y=0 \Rightarrow x=3, y=0$$

$$2. \quad \frac{\lg 3y}{3} = \frac{5 \lg 3y - 5 \lg \sqrt[5]{25} y}{3} = \frac{5(\lg 3y - \lg 3^{\frac{2}{5}} y)}{3} = \frac{5(\lg 3^{\frac{2}{5}})}{3}$$

$\log 34 \quad 5 \log 35^2$

$$y = y$$

~~$$\Rightarrow y = 3^{\frac{1}{5 \log_3 5}} = 3^{\frac{1}{\log_3 5}} = 3^{\frac{\log_3 10}{\log_3 5}} = 3^2 = 9$$
$$x = 3^{\frac{\log_3 10 + 1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}(\log_3 10 + 1)} = \left(3^{\frac{\log_3 10 + 1}{2}}\right)^2 = 10$$~~

$$2) \quad 1 + \overline{y} = 4$$

$$y^{5 \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg(4-y)}$$

1) $y = 0 \Rightarrow x = 4 - y = 4$
 $\text{eq}(4-y)$

$$2.) \quad y^{\frac{\lg(4-y)}{y^2}} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(1) (x-3y)(x+y-4) = 0$$

O.P.3! $\begin{cases} x \geq 0 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq 0$

Замечания, что

$y = 3$ - корень и ч.к.

$$\hookrightarrow x = 9$$

гражданского государства
наибольшей из нас не
находясь, давая не
мелко.

$$y \lg \left(\frac{(4-y)^3}{y^2} \right) = (4-y) \lg(4-y)$$

$$y^2 \lg \left(\frac{4-y}{y} \right) = \left(\frac{4-y}{y} \right) \lg(4-y)$$

Заметим, что $y=2$ - корень
Пока будем искать корни не.

$$2^{\lg 1} = 1^{\lg 2}$$

$$2^{\uparrow} = 1$$

$$x = 4 - y = 2$$

Ответ: $(x=0, y=0); (x=3, y=3); (x=4, y=0); (x=2, y=2)$

N 5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

Равенства рассмотрим на два графика функции

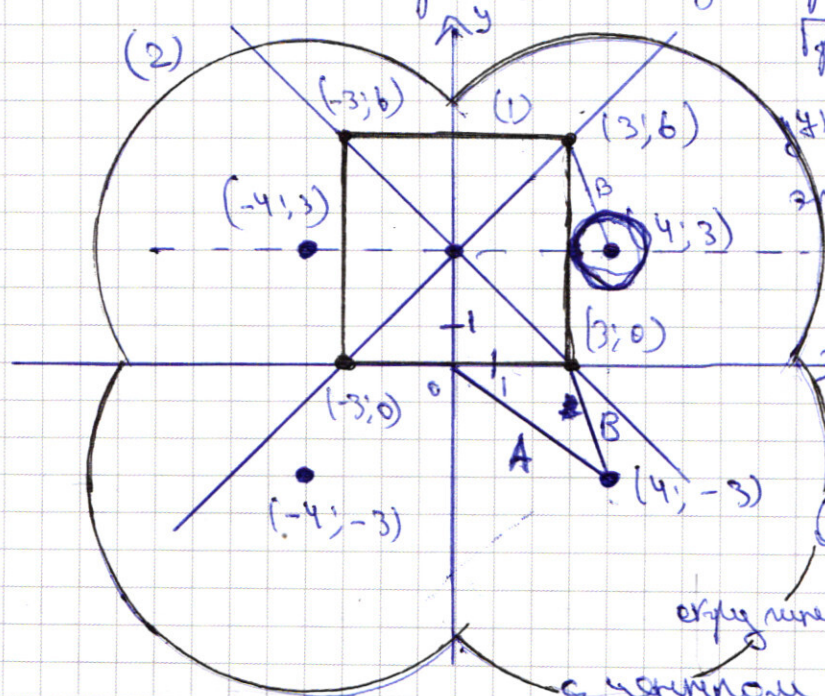


График (1) это квадрат
у которого диагональ
это прямые $y = 3+x$ и $y = 3-x$

График (2) это
совокупность из 4
окружностей.

Он состоит из частей
окружностей лежащих в I четверти
с центром в $(4; 3)$ и радиусом 5

из частей окружностей лежащих во II четверти с центром
в $(-4; 3)$ и радиусом 5, из частей окружностей лежащих
в III четверти с центром в $(-4; -3)$ и радиусом 5, и из
частей окружностей лежащих в IV четверти с центром в $(4; -3)$
и радиусом 5.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

График (2) выглядит так, т.к. мы назвали его симметрично окружая ~~его~~ относительно себя перпендикулярно.

Если наши градиенты имеют одну точку на окружности соединяющей точки $(0;0)$ и $(3;0)$ не имеем точку $(0;0)$, но они имеют одну точку на окружности соединяющей точки $(0;0)$ и $(-3;0)$, не имеем $(0;0)$, из симметрии, и так же другие точки на окружностях соединяющих точки $(0;6)$; $(3;6)$ и $(0;6)$ и $(3;6)$ (не имеем точку $(0;6)$). Тогда у нас будет уже 4 точки пересечения, а нам нужно 2. (если $B \leq \sqrt{a} < A$)

Если график (2) проходит через точку $(0;0)$, то его ~~тогда~~ $a = A^2 = (\sqrt{3^2 + 4^2})^2 = 25$. Тогда у наших двух графиков будет ровно 2 точки пересечения. $(0;0)$; $(6;6)$. Что нам и надо. Если же график (2) вообще не пересекает окружность соединяющую точки $(0;0)$ и $(3;0)$, тогда радиус, но если $\sqrt{a}$ либо меньше окружности $B = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{10}$, либо больше $A = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (симметрично на рисунке).

Если $\sqrt{a} > A$, тогда эти два графика вообще не пересекаются.

Если $\sqrt{a} < B$, то в III и IV четверти пересечений нет, а в I четверти либо 2 точки пересечения с отрезком соединяющим точки $(3; 0); (3; 6)$ либо одна точка в нуле касания. Если есть 2 точки пересечения, то во II четверти тоже 2 точки пересечения с отрезком $(-3; 6); (-3; 0)$. Но если всего 4 точки, нам не подходит. ^{касаясь} значит наша окружность ~~касается~~ в I четверти касается отрезка $(3; 0); (3; 6)$, но это возможно, только когда ее радиус 1, тогда $\sqrt{a} = 1 \Rightarrow a = 1$. Не разбирали все возможные a , т.к. $a < 0$ нам точно не удовлетворяет, при $a = 0$ график (2) это и точки не лежащие на (1). А случаи $0 < a < B^2$; $B^2 \leq a < A$; $A^2 = a$; $A^2 < a$ были разобраны.

Ответ: $a = 25$; $a = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin x - \sin y = 2 \sin(x-y) \cdot \cos(x+y)$$

$$(\sin x \cos y - \sin y \cos x) (\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos y - \sin^2 x \cdot \cos y \sin y - \cos^2 x \cdot \sin y \cos y -$$

$$\sin y \cdot \cos x \sin x$$

$$2 \sin x \cos x (\cos^2 y + \sin^2 y) - 2 \cos^2 y \sin y (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\sin 2x \cdot \cos 2y - \sin 2y \cdot \cos 2x$$

$$2 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos y \cdot \sin y$$

$$\sin 2x - \sin 2y = 2 \sin(x-y) \cdot \cos(x+y)$$

$$\log_2 3$$

$$\log_2 8 = 3$$

$$- \cos$$

$$- 2 \sin 2x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = -\sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x (\sin 2x + \cos 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 4x (\sin 2x + \cos 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) (\cos 2x - \sin 2x)$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \left(\sin 4x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 2x \right) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \left(\sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cdot 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = 0$$

$$\sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$y = x+3$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$

$$\frac{y \lg x}{x}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$y = 2^5 x + 3 \cdot 2^6 5$$

$$y = (20-x) + 2^{64} x$$

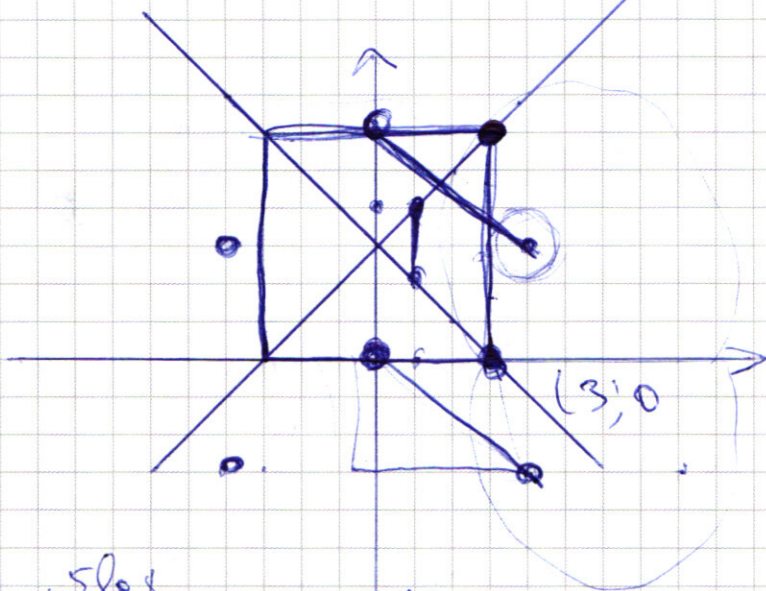
$$(x-y+1)(x-y)$$

$$a = 25$$

$$x = 3y$$

$$x = 4-y$$

$$y + 25$$



$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 = 2x^2 - x^2$$

$$-3y^2 = x^2 - 4y^2$$

$$(x-3y-4)(x+y-4) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$\frac{y \lg x}{x \lg x} = y \lg x + 2 \lg y$$

$$y^{2 \lg x} (y^{3 \lg x} - x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y})$$

$$y^{3 \lg 3y} = y^{\lg 3y} \cdot y^{\lg 3y}$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$x^{\lg x} = y^{3 \lg x - 2 \lg y}$$

$$x^{\lg x} = y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$
 $C_8^2 \cdot C_6^3$
 $\begin{pmatrix} 3-3 \\ 3-5 \\ 2-1 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-8 \\ 3-5 \\ 3-1 \end{pmatrix}$
 $\frac{8 \cdot 2}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1}$
 $(4) \lg 2 \cdot 8$
 $(5) \lg 3$
 $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$
 $\left(\frac{y^5}{x} \right) \lg x = y^{2 \lg x} y$
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$
 $y^5 \lg x - x \lg x \cdot y^{2 \lg x} y = 0$
 $\frac{1}{2} \lg 10$
 $(4) \lg 2$
 $(2) \lg 2$
 $y^{5 \lg x} - x \lg x \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} = 0$
 $y^{2 \lg x} \left(y^{3 \lg x} - x \lg x \cdot y^{2 \lg y} \right) = 0$
 $\frac{y^{3 \lg x}}{x \lg x} = \frac{x \lg x \cdot y^{2 \lg y}}{y^{2 \lg x}}$
 $\frac{y^{3 \lg x}}{y^{2 \lg x}} = \frac{x \lg x \cdot y^{2 \lg y}}{x \lg x}$
 $y^{\lg x} = (4-y) \lg(4-y)$
 $\frac{y^{\lg(4-y)^3}}{y^2} = (4-y) \lg(4-y)$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{y} = (4-y) \lg(4-y)$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{y} = \left(\frac{4-y}{y} \right)^{\lg(4-y)}$
 $x^2 - 4x = 0$
 $(x-4) = 0$
 $y^{3 \lg x} = x \lg x \cdot y^{2 \lg y}$
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$
 $(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$
 $y^{3 \lg x} \lg x \lg y = x \lg x \cdot y^{2 \lg y}$
 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x$
 $5 \lg(4-y) = (4-y) \lg(4-y) \cdot y$
 $y^{\lg(4-y)^3} = (4-y) \lg(4-y)$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{y} = (4-y) \lg(4-y)$
 $\frac{y^{\lg(4-y)}}{y} = \left(\frac{4-y}{y} \right)^{\lg(4-y)}$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

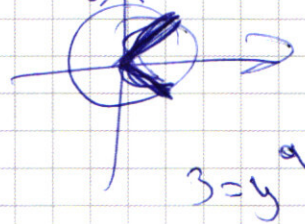
$$2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos a \cdot b = \frac{1}{\cos b \cdot a}$$

$$a^c = b$$

$$\frac{1}{b^c} = a^c$$



$$\cos 11x - \cos 3x$$

$$\cos 2x - \cos 2y = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 y - \cos^2 y$$

$$(\cos x - \cos y)(\cos x + \cos y) \left\{ \begin{array}{l} \cos 2x - \cos 2y = \\ = -2 \sin(x+y) \cdot \sin(x-y) \end{array} \right.$$

$$\cos(x+y) = (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)(\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y)$$

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y$$

$$(1 - \sin^2 x) \cdot \cos^2 y - \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 y)$$

$$2(\sin(x+y) \cdot \sin(x-y))$$

$$(\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x)(\sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x)$$

$$\cos^2 y - \sin^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 y$$

$$2 \cos^2 y - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 y + 2 \cos^2 x - 2$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x + \cos 2y$$

$$2 \cos^2 y - 1 - 2 \cos^2 x + 1$$

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 y - \sin^2 y \cdot \cos^2 x$$

$$(1 - \cos^2 x)(\cos^2 y) - (1 - \cos^2 y)(\cos^2 x)$$

$$\cos^2 y - \cos^2 x \cos^2 y - \cos^2 x + \cos^2 x \cos^2 y$$

$$2 \cos^2 y - 2 \cos^2 x$$