МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Заметим, что $3375 = 3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot5$

Тогда заметим, что ~~...~~ кол-во чисел, у которых 6 из 8ми цифр равных простым множителям 3375 равно $C_8^3\cdot C_5^3$.

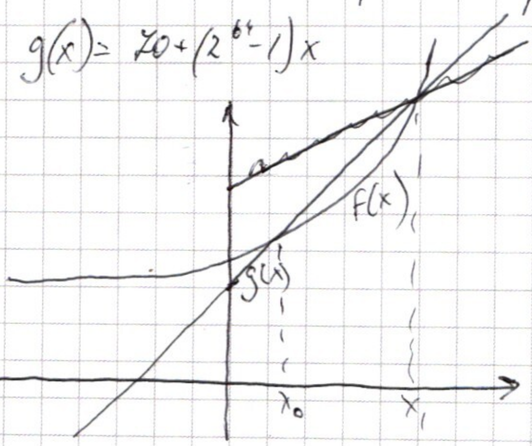
Так же заметим, что только $3\cdot3$ даёт в произведении именно цифру, что значит, что есть только еще один вариант таких чисел, цифры которого $3;5;5;5;9$. Их равно $C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^1$

Тогда всего чисел $C_8^3\left(C_5^1\cdot C_4^1+C_5^3\right)=\frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\left(5\cdot4+\frac{5\cdot4^2}{\cancel{2}}\right)=56\cdot30=1680$

Ответ: таких чисел всего 1680.

№7.

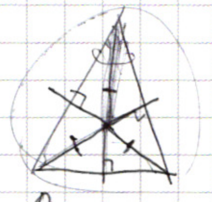
Для начала посмотрим на графики функций $f(x)=2^x+3\cdot2^{65}$ и $g(x)=70+(2^{64}-1)x$



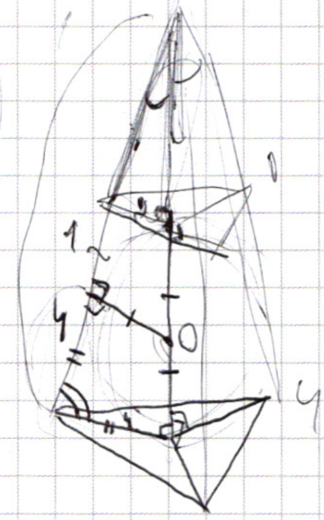
Заметим, что $f(x)$ ~~...~~ и $g(x)$ пересекутся в 2х точках, что значит, что у можно найти только при x от x_0 и до x_1.

Найдем $[x_0+1]$ и $[x_1]$. Методом подбора понимаем, что $[x_0+1]=7$, а $[x_1]=70$. (при $x=7$ $g(x)>f(x)$, а при $x=70$ $g(x)=f(x)$). Также заметим, что кол-во решений для данного x равно $f(x)-g(x)$ для $f(x)\geq g(x)$, так как y и x - целые.

$$\begin{array}{r} \times\,65 \\ 32 \\ \hline +\,130 \\ 195 \\ \hline 2080 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80.10 \\ -\,2080 \\ 128 \\ \hline 1952 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\,67 \\ 32 \\ \hline +\,134 \\ 201 \\ \hline 2144 \end{array}$$



$S = \frac{R}{\sin\alpha}$



$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

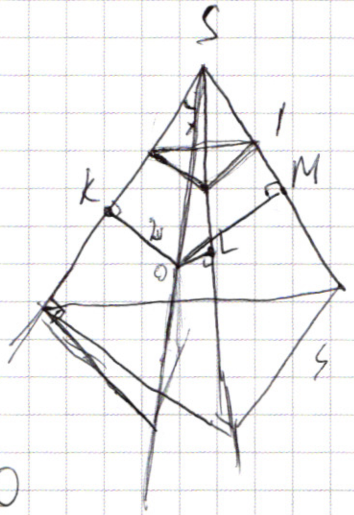
$\cos 11x(1 - \sqrt{2}\cos 3x) - \sin 11x(1 - \sqrt{2}\sin 3x) - \cos 3x + \sin 3x = 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} = y^{2\lg x} \cdot y^{2\lg y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$x = 3y$

$x = 4 - y$



$\frac{y^4}{3}^{\lg x}$ $\quad \frac{y^{2\lg 3y}}{3} = y^{2\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}$

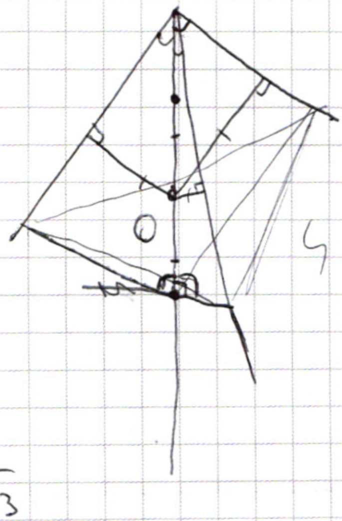
$\frac{y^{2\lg 3y}\left(\frac{y^{2\lg 3y}}{3} - y^{2\lg y}\right)}{3} = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y^{2\lg 3y} = 0 \\ \frac{y^{2\lg 3y}}{3} = y^{2\lg y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y^{2\lg 3y} = 3y^{2\lg y} \end{array}\right.$$

$3y^{2y} = y^{5y}$

$y^{2y}(3 - y^3) = 0$

$3 = y^3 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{3}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда распишем:

$x=7$: кол-во $y = 70+7\cdot2^{64}-7-2^7-3\cdot2^{65}=$

$= 70+2^{64}(7-6)-7-2^7$

Заметим, что тогда кол-во y выражается формулой

$$70-x+2^{64}(x-6)-2^x$$

Сложим все возможные суммы по слагаемым ($70-x$ - первое; $2^{64}(x-6)$ - второе; 2^x - третье)

сумма n степеней двойки, начиная с 1 равна $2^{n+1}-1$.

$$\frac{64\cdot63}{2}+2^{64}\left(\frac{65\cdot64}{2}\right)-\left(2^{71}-1-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-2-1\right)=$$

$$=32\cdot63+2^{64}\cdot65\cdot32-\left(2^{71}-(2^7-1)-1\right)=$$

$$=32\cdot63+2^{64}\cdot65\cdot32-2^{71}+128=2^{64}(65\cdot32-2^7)+32(63+4)=$$

$$=2^{64}(65\cdot32-128)+32\cdot67=2^{64}\cdot1952+2144$$

Ответ: всего решений $2^{64}\cdot1952+2144$

№5.

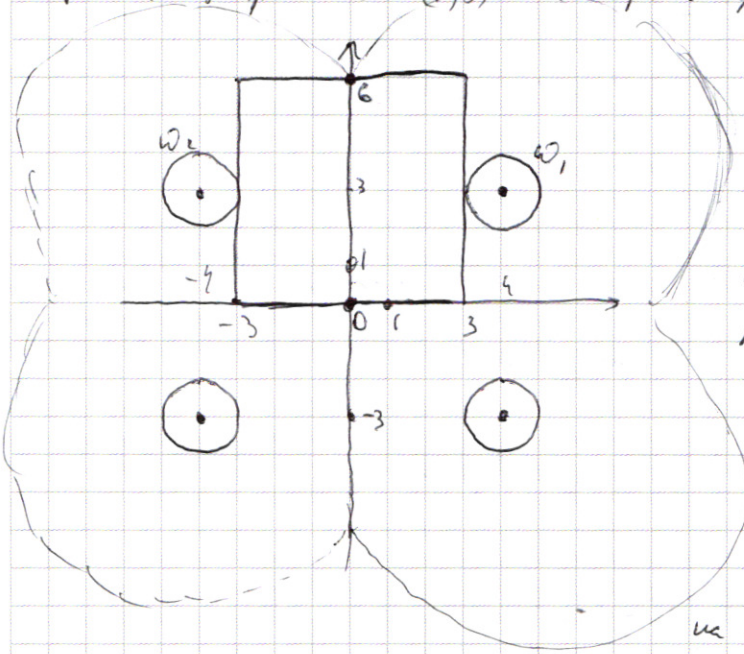
Нарисуем графики для обоих уравнений:

$|y-3-x|+|y-3+x|=6$

$$\left[\begin{array}{lll} y-3-x+y-3+x=6; & (1)\geq0 & (2)\geq0 \\ 3+x-y+y-3+x=6; & (1)\leq0 & (2)\geq0 \\ y-3-x+3-x-y=6 & (1)\geq0 & (2)\leq0 \\ 3+x-y+3-x-y=6 & (1)\leq0 & (2)\leq0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} y=6 & -3\le x\le 3 \\ x=3 & 0\le y\le 6 \\ x=-3 & 0\le y\le 6 \\ y=0 & -3\le x\le 3 \end{array}\right.$$

График второго у-ня — 4 окружности, симметричные относительно Ox и Oy с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в $(4;3)$ для окр. в первой четверти. (каждая окр. не выходит за свою четверть)



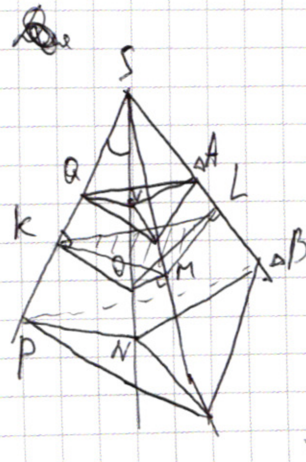
Из графика видно, что ровно 2 решения достигаются только в 2х случаях: при касании. ~~к гран~~ Иначе, если есть пересечение ω_1 с ~~квадратом~~ квадратом, а оно не одно, т.к. все касания уже учтены, что значит, что их минимум 2, и они оба одновременно не лежат на осях (это тоже учтено), то у ω_2 есть хотя бы одно новое решение из соображ. симметрии.

Тогда $a=1$ или $\sqrt{a}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5 \Leftrightarrow a=25$

Ответ: $a\in\{1;25\}$

№4.

~~Дано~~



Для начала заметим, что $QV=QK$ и $KP=PN$ ① как касательные из одной точки. Так же заметим, что $\triangle A \sim \triangle B$, т.к. они параллельны, т.к. оба $\perp SO$. Тогда $QV:PN=1:4$, что значит, что $SQ:SP=1:4$, т.к. $\triangle QSV\sim\triangle PSN$, т.к. $QV \parallel PN$. ~~Тогда~~ Так же $\frac{QK}{KP}=\frac{1}{4}$ (из равенства ①), что значит, что если $QV=1$, то $SQ=\frac{5}{4}$ $\Rightarrow \sin QSV=\frac{4}{5} \Leftrightarrow \angle KSO=\arcsin\frac{4}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так же мы знали, что $\frac{SQ}{SK} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}+1} = \frac{5}{9}$, что значит, что $S_{KLM} = \frac{9}{5}$

Ответ: $\angle KSQ = \arcsin\frac{4}{5}$; $S_{KLM} = \frac{9}{5}$.

№2.

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x\cos 7x - \sqrt{2}\cos 14x = 0$

$2\sin 4x(\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0$

$2\sin 4x(\cos 7x + \sin 7x) + \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x) = 0$

$(\cos 7x + \sin 7x)(2\sin 4x + \sqrt{2}\cos 7x - \sqrt{2}\sin 7x) = 0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos 7x = -\sin 7x \\ 2\sin 4x + \sqrt{2}\cos 7x = \sqrt{2}\sin 7x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ n\in\mathbb{Z} \\ 2\sin 4x + \sqrt{2}\cos 7x = \sqrt{2}\sin 7x \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n;\ n\in\mathbb{Z} \\ \sqrt{2}\sin 4x + \cos 7 - \sin 7x = 0 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2^{64}\left(\frac{65\cdot 64}{2}\right)+\frac{63\cdot 64}{2}-2^{70}-1-2^6-2^5-2^4-2^3-2^2-1$

$70+(2^{64}-1)x-2^x-3\cdot 2^{65}$

$70+2^{64}(x-6)-x-2^x$

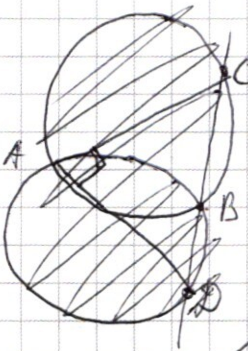
$63+2^{64}-2^7=$

$=63-128+2^{64}=$

$=2^{64}-2^6-1$

$2\cdot 2^{64}+62-2^8=$

$64\cdot 2^{64}-2^{70}$



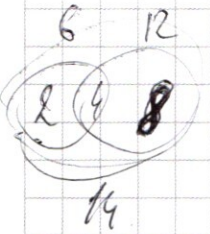
6 12

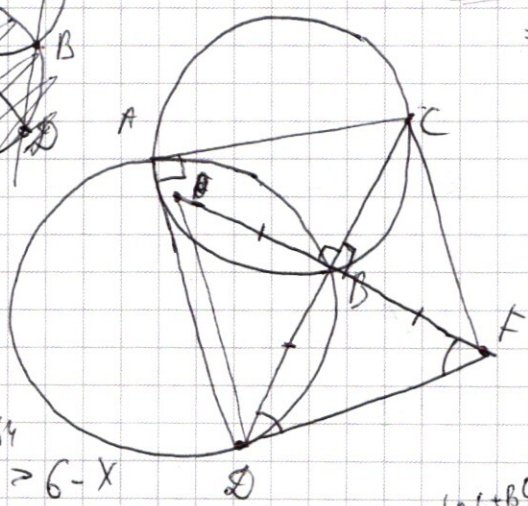
2 4 8

14

$1+2+4=8-1$

$2^6=6\cdot 70$





$2^{x-64}>6-x$

$2^{65}+2^{64}(6-65)$

$S_{ACB}=rp=\frac{r(AC+BC+AB)}{2}=\frac{5}{2}(p)$

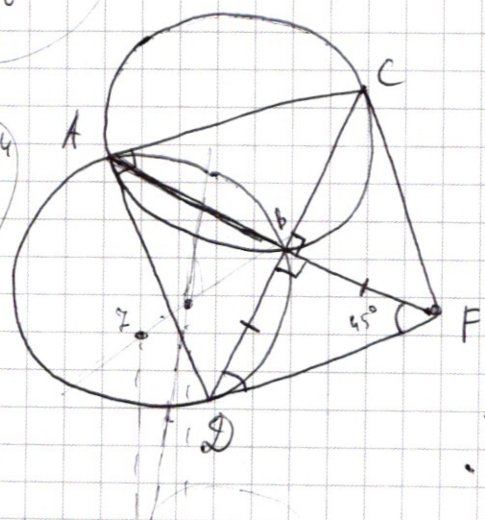
$S_{ADB}=\frac{5}{2}(AD+DB+AB)$

$\frac{AD\cdot AC}{2}=\frac{5}{2}(AD+AC+BC+DB+2AB)$

$S_{DAC}=\frac{DC}{4}\cdot(AC+AD+DC)=$

$2^{64}\cdot 2$

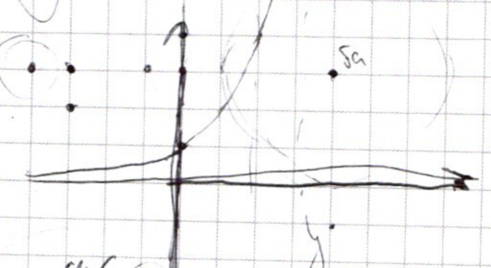
$2^{64}\cdot 8\cdot 2^{x-64}$



$DC=DB+BC$

$\frac{DB+BC}{4}(AC+AD+DB+BC)=\frac{5}{2}(AD+AC+BC+DB+2AB)$

2^{64}



$|y-x-3|=$

$2^x+3\cdot 2^{65}<y\le 70+(2^{64}-1)x$

$2^7+3\cdot 2^{65}\ ?\ 70+7\cdot 2^{64}\cdot 7$

$128-70+2^{64}(6-7)+7$

$(2^{64}-1)x+70-3\cdot 2^{65}-2^x$

$3\cdot 2^{65}\ ?\ 5\cdot 2^{64}-5$

$2^{64}(6-5)-5$

$2^x+2^{64}(6-x)+x-70\le 0$

$f(x)=2^{64}-1-$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$

$\Updownarrow$

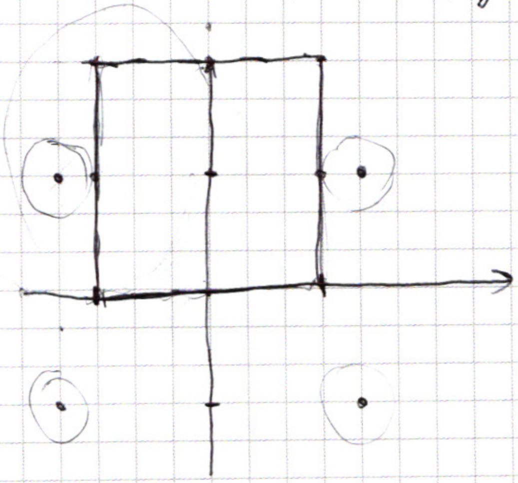
$$\left[\begin{array}{ll} y-3-x+y-3+x=6; & y+x-3\geq 0 \text{ и } y-x-3\geq 0 \\ 3+x-y+y-3+x=6 & \text{не } 1 \quad \text{но } 2 \\ y-3-x+3-x-y=6 & \text{не } 2 \quad \text{но } 1 \\ 3+x-y+3-x-y=6 & \text{не } 1 \text{ и не } 2 \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{ll} 2y=12 \quad y=6 & x\leq 3;\ x\geq -3 \\ x=3 & y\leq 6;\ y\geq 0 \\ x=-3 & y\leq 6;\ y\geq 0 \\ y=0 & x\geq -3;\ x\leq 3 \end{array}\right.$$

$\sqrt[3]{3}^{\lg \sqrt[3]{3}^4} = 3\sqrt[3]{3}^{2\lg \sqrt[3]{3}^5}$

$\lg \sqrt[3]{3}^4 = 2\lg \sqrt[3]{3}^5$



$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}$ $\quad y\neq 0$

$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg x}\cdot y^{2\lg y}$

$\left(\frac{y^5}{xy^2}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y}$

$\left(\frac{y^3}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg y}$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$11x = \alpha \quad 3x = \beta$

$\cos\alpha - \cos\beta - \sin\alpha + \sin\beta = \sqrt{2}\cos(\alpha+\beta)$

$\sqrt{2}(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8$

$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_8 = 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

9 5 5 5 3

a_i и $a_k = 1$

$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1$

$\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$

$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\cos - \sin\sin$

$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos\cos + \sin\sin$

$\cos(7x+4x) - \cos(7x-4x) =$

$= \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x$

$-2\sin 7x \sin 4x$ $\quad -2(\sin 7x \sin 4x + \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$\sin 7x \cos 4x + \sin 4x \cos 7x - \sin 7x \cos 4x + \cos 7x \sin 4x$

$-2\sin 4x \cos 7x$ $\quad -2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x)$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x - \sqrt{2}\cos^2 7x + \sqrt{2}\sin^2 7x = 0$

$-\cos 7x(2\sin 4x + \sqrt{2}\cos 7x)$

$-\sin 7x(\sin 4x + \sin 7x)$

$3y^2 - (12-2x)y - x^2 + 4x = 0$

$D = 144 - 48x + 4x^2 + 12x^2 - 48x =$

$= 16x^2 - 96x + 144 = (4x-12)^2$

$y = \frac{12-2x \pm (4x-12)}{6}$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x}{3} \\ y = 4 - x \end{array}\right.$

$x^2 - \underbrace{2xy - 4x}_{-(2y+4)x} - 3y^2 + 12y = 0$

$D = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y =$

$= 16y^2 - 32y + 16 =$

$= (4y-4)^2$

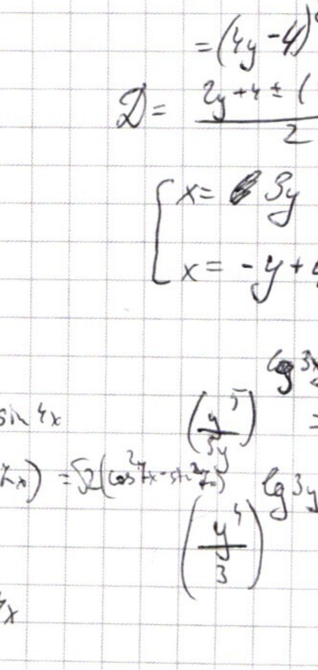
$D = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{array}\right.$

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3y^2}$

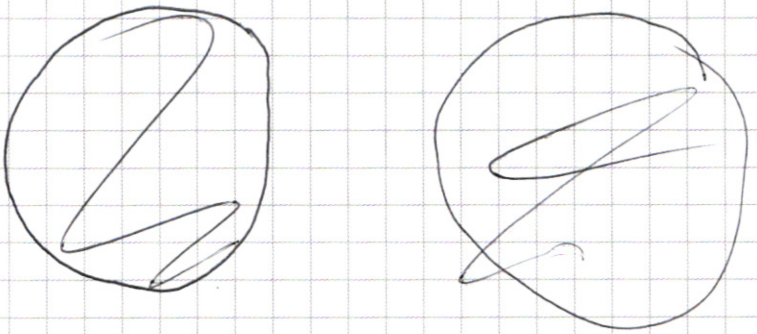
$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = y^{2(\lg 3y^2)}$

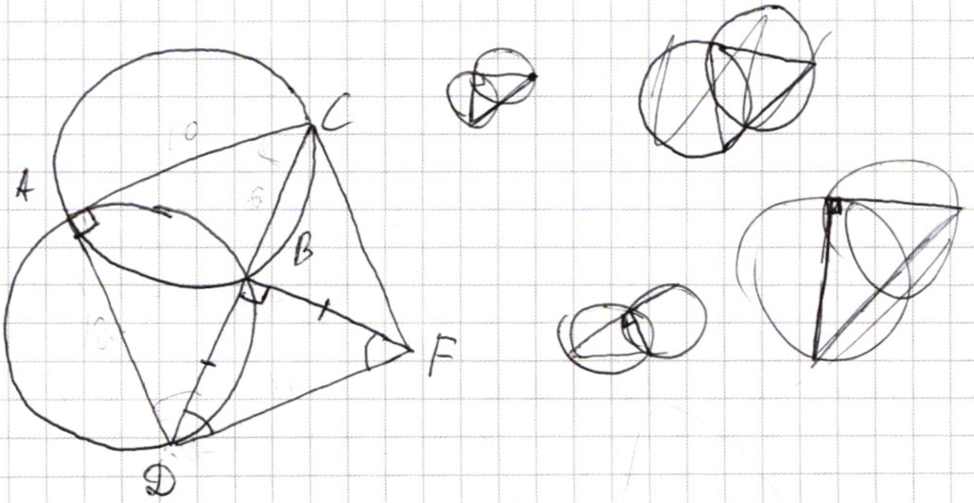
$y^{4\lg 3y} \cdot y^{2\lg y}$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





$\cos(11x+3x)$

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x \qquad \sqrt{2}(\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x)$

$\cos 7x \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \cos 7 \cos 4x - \sin 7x \sin 4x - \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x + \sin 7x \cos 4x - \sin 4x \cos 7x =$

$\sqrt{2}\,(2\cos^2 7x - 1)$

$-2\sin 7x \sin 4x - 2\sin 4x \cos 7x = \sqrt{2}(2\cos^2 7x - 1)$

$(\cos 11x - \sin 11x) - \cos 3(\sqrt{2}\cos 11 + 1) + \sin 3(\sqrt{2}\sin 11 + 1) = 0$

$2\cos 7x\,(\sqrt{2}\cos 7x - \sin 4x) = \sqrt{2}\sin^2 7x + \sqrt{2}\cos^2 7x$

$\sqrt{2}\cos 14x + 2\sin 7x \sin 4x + 2\sin 4x \cos 7x = 0$

$2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) + \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x) = 0$

$(\cos 7x - \sin 7x)$