

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

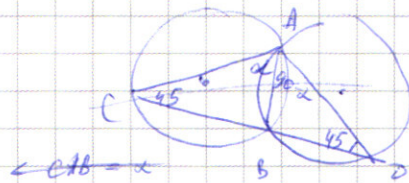
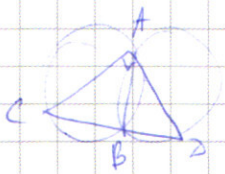
$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. ✓ [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- ✓ б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

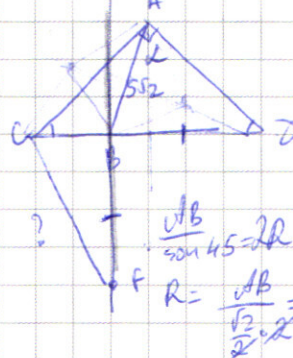
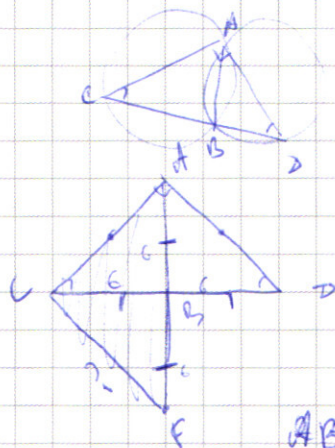
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



$\angle ACB = \angle ADB$ как углы, опирающиеся на равные хорды в окружности с одним радиусом $\Rightarrow \angle CDB = \angle ADB = 45^\circ$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases} \quad \left(\frac{4.5}{3}\right) \lg x = y \lg 3y$$

$$\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ \frac{4.5}{3y} \lg 3y &= y \lg 3y^2 \\ y \lg 3y &= y \lg 3y \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{abc}{4R} &= 5 \\ R &= \frac{a}{2\sqrt{5}} \\ \frac{a}{\sin \alpha} &= 2R \end{aligned}$$

$$a = 2R \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{AB}{\sin 45} = 2R \quad AB = 2R \sin 45 = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\frac{BD}{\sin BCD} = \frac{CB}{\sin (90 - BCD)} = \frac{CB}{\cos BCD}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{CB}{\cos \alpha}$$

$$CD = \frac{BD \cos \alpha}{\sin \alpha} = BD \cot \alpha$$

$$a^2 = c^2$$

$$\lg_a C = \frac{b}{a}$$

$$y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$y \lg 3 \cdot y \lg 3y = y \lg 3 \cdot y \lg 3y \cdot y \lg 3 \cdot y \lg 3y$$

$$3 \lg 3 \cdot 3 \lg 3y = y \lg 3y$$

$$3 \lg 3 \cdot 3^a = 10^2 \lg 3$$

$$3 \lg 3^a = 10^2 \lg 3$$

$$\lg 3^a \cdot \lg 3 = 2 \lg 3$$

$$\lg 3 (2a - \lg 3a) = 0$$

$$2a = \lg 3a$$

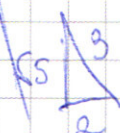
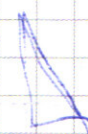
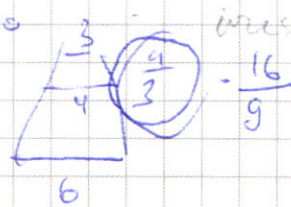
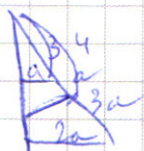
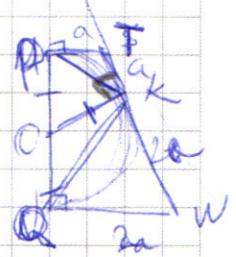
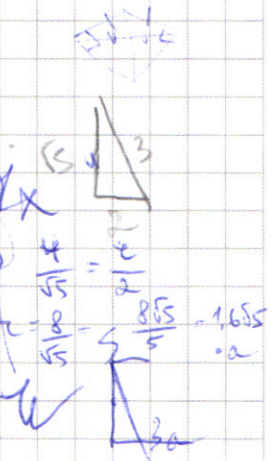
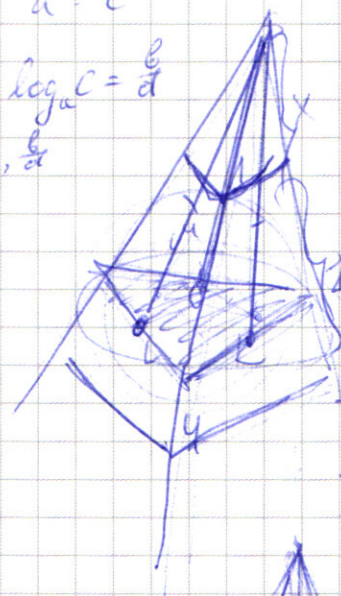
$$2a - \lg 3 - \lg a = 0$$

$$2 \cdot 10^6 = \lg 3 - 6 = 0$$

$$s = 4 \quad r = ?$$

$$\lg a = b \quad a = 10^b$$

$$\frac{16}{9}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание $33 \cdot 5 = 3 \cdot 1125 = 3^3 \cdot 125 = 3^3 \cdot 5^3 = 1$

$3^3 \cdot 5^3 = \underbrace{9}_{+2, "1"} \cdot \underbrace{125}_{+3, "1"}$

1133555

числа с которыми $3, 3, 3, 5, 2, 1$
числа с которыми $1, 3, 1, 9, 3, 5, 3, 1$

$11 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$\cos \alpha \cdot \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ =$

$-\left(0,5 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin(45-30) =$

$\sin 45 \cos 30 - \sin 30 \cos 45 =$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$(\cos 11x - \cos 3x) - \sin 11x + \sin 3x = 2 \cos 4x$
 $(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = 2 \cos(11x+3x) =$
 $\cos 60 - \cos 30 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$

$-2 \sin \frac{11+3}{2} \sin \frac{11-3}{2} =$
 $-2 \sin 7 \sin 4 =$
 $-2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$

$\sin 60 - \sin 30 =$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2} = 2 \sin 15 \cos 45 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2 \sin 30 \cos 30 = 2$

$2 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{4} \cdot \cos 15^\circ$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$(x^2 - 4x) - (3y^2 - 12y) - 2xy = 0$

$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$

$+xy - 3xy =$

$(x^2 - 4x + xy) -$

$(3y^2 + 12y - xy) = 0$

$x(x-4+y) = 3y(y-4+x)$

$x(x+y-4) = 3y(x+y-4)$

$(x+y-4)(x-3y) = 0$

$x+y=4 \quad x=3y$

$x=4-y \quad x=3y$

$x=4-y \quad x=3y$

$x=3y$

$y^2 \lg x (x \lg x y^2 \lg y - y^3 \lg x) = 0$

$x=3y$

$y^2 \lg(3y) / (3y) \lg(3y) y^2 \lg y - y^3 \lg(3y) = 0$

$x=3y$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg(y)$

$x \neq 0 \quad y \neq 0 \quad x > 0 \quad y > 0$

$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = \frac{y^5 \lg x}{x^5 \lg x} = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$

$y^5 \lg x = x^5 \lg x \cdot y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$

$y^2 \lg x (x^5 \lg x y^2 \lg y - y^3 \lg x) = 0$

$y^2 \lg x = 0 \quad x^5 \lg x y^2 \lg y - y^3 \lg x = 0$

$y=0 \notin \mathbb{R} \quad y^2 \lg x = y^2 \lg x$

$x=4-y$
 $y^2 \lg x / (x \lg x y^2 \lg y - y^3 \lg x) = 0$

$x=4-y$
 $4-y > 0 \quad 0 < y < 4$

$(4-y) \lg(4-y) y^2 \lg y - y^3 \lg(4-y) = 0$

$x=4-y$

$x=3y$
 $(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

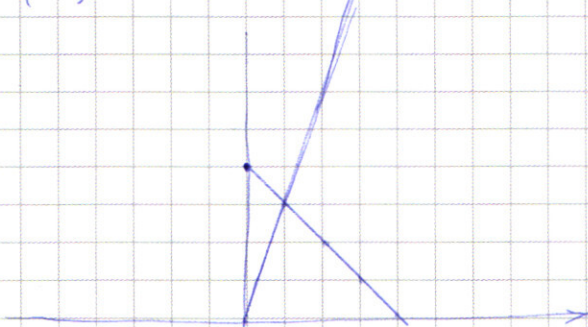
$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

$(3y)^{\lg 3 + \lg y} \cdot y^2 \lg y \lg y - y^3 \lg 3 + 3 \lg y = 0$

① $x = 4 - y$ $y = 4 - x$
 $\left(\frac{y}{4-y}\right)^5 \lg(4-y) = \left(\frac{4-x}{x}\right)^5 \lg x = (4-x) 2 \lg(x(4-x))$

$y = 4 - x$
 $\left(\frac{y}{4-x}\right)^5 \lg x = \frac{2 \lg x + 2 \lg(4-x)}{4-x} \cdot x \lg x$



$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$
 $x^2 - 4x + xy - 3y^2 + 12y - 3xy = 0$
 $x(x+y-4) - 3y(x+y-4) = 0$
 $(x+y-4)(x-3y) = 0$

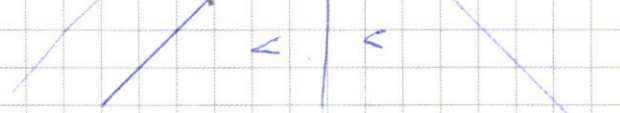
① $x = 3y$ ② $x = 4 - y$
 ① $x = 3y$
 $9y^2 - 6y^2 - 12y - 3y^2 + 12y = 0$
 $6y x = 4 - y$

$|y - 3 - x| = 6$
 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$

$|y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$ $|17| >$
 $x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y|$

① $x \geq 3 - y$ $y \geq 3$
 ② $x < 3 - y$ $y \geq 3$

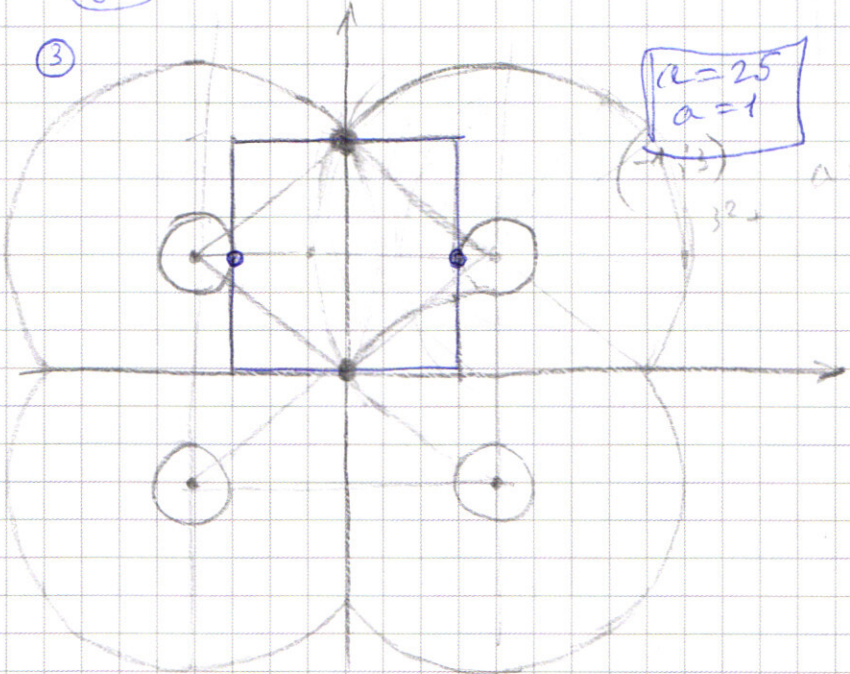
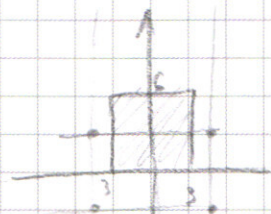
$|y| > 0$
 $|x| > 0$



$4y - 3 - x \geq 0$
 $y \geq x + 3$

$y - 3 + x > 0$
 $y > 3 - x$

① $y \geq 3 - x$ ② $y \geq 3 + x$
 $y \geq 3 + x$
 $2y - 6 = 6$
 $2y = 12$
 $y = 6$
 $y - 3 - x - y + 3 - x = 6$
 $-2x = 6$
 $x = -3$



$r = 2.5$
 $a = 1$

$(0, 6)$

$a = 2.5$

$4^2 + 3^2 = 5^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) $\left(\frac{y^5}{x}\right) dx = y^{2y} xy$
 $x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$

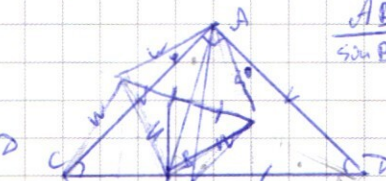
$\left(\frac{y^5}{x}\right) dx = y^{2y} xy$

$(x+y-4)(x-3y) = 0$

из второго уравнения системы

$\begin{cases} x = 3y \\ x = -y + 4 \end{cases}$

№6 $\angle ACD = \angle ADC$ как углы опирающиеся на равные хорды в окружности
 равного радиуса. Так $\angle CAD = 90^\circ$ то $\angle ACP = \angle APC = 45^\circ$ $AC = AD$



$\frac{AB}{\sin BDA} = 2R$

$AB = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 =$
 $= a^2 + b^2$

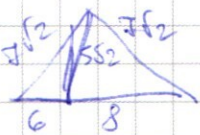
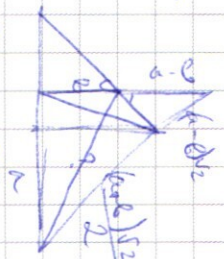
$(a-b)\sqrt{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2} = a\sqrt{2}$
 $a-b + \frac{a+b}{2} = a$
 $2a - 2b + a + b = 2a$
 $a - b = 0$
 $a = b$

$a - b = 0$
 $a = b$

$(a-b)\sqrt{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2} = a\sqrt{2}$
 $2a - 2b + a + b = 2a$
 $a - b = 0$
 $a = b$

$\frac{a+b}{2}\sqrt{2} + (a-b)\sqrt{2} = a\sqrt{2}$
 $a+b + 2a - 2b = 2a$
 $a = b$

$(a-b)\sqrt{2} + \left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{2} =$
 $= a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + \frac{a+b}{2}\sqrt{2} = a\sqrt{2}$



$$\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{4} = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 2a^2 + b^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - 2a\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50$$

$$a^2 + \frac{(a+b)^2}{4} - a(a+b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 50$$

$$a^2 + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} - a^2 - ab = 50$$

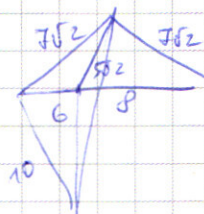
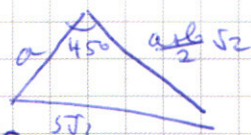
$$2a^2 + a^2 + 2ab + b^2 - 2a^2 - 2ab = 100$$

$$a^2 + b^2 = 100$$

$$\sin(45^\circ + \arccos \frac{6}{10}) =$$

$$= \sin 45^\circ \cos(\arccos \frac{6}{10}) + \sin(\arccos \frac{6}{10}) \cos 45^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{6}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{8}{10} = \frac{6\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{20} = \frac{14\sqrt{2}}{20} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$



$$x = 65$$

$$y > 2^{65} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{67}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)65 = 2^{64} \cdot 2^6 \cdot 2^{64} - 65 \cdot 70 =$$

$$x = 63$$

$$y > 2^{63} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{63} (1 + 3 \cdot 4) = 43 \cdot 2^{63} = 43 \cdot \frac{2^{64}}{2} = 43 \cdot 2^{63}$$

$$y \leq 70 + 63(2^{64} - 1) =$$

$$x = 64$$

$$y > 2^{64} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{64} (1 + 3 \cdot 2) = 7 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 70 + 64(2^{64} - 1) = 8 \cdot 2^{64} - 8 + 70 = 8 \cdot 2^{64} + 62$$

$$63$$

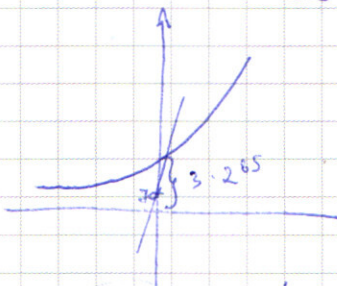
$$y > 13 \cdot 2^{63}$$

$$y \leq 126 \cdot 2^{63} + 7$$

$$32$$

$$y > 2^{32} (1 + 3 \cdot 2^{33})$$

$$y \leq 70 \cdot (2^{64} - 1) 32$$



$$1) y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + 2^{64} - 1$$

$$y \leq 2^{64} + 69$$

$$y > 6 \cdot 2^{64} + 2$$

$$2$$

$$> 4 + 3 \cdot 2^{65}$$

$$< 2^{65} + 68$$

$$16 + 3 \cdot 2^{65} > 3 \cdot 2^{65} + 16$$

$$70 + 2^{66} - 4 \leq 2^{65} \cdot 2 + 66$$

$$5) > 32 + 3 \cdot 2^{65} - 6 \cdot 2^{64} + 32$$

$$\leq 5 \cdot 2^{64} + 65 = 5 \cdot 2^{64} + 65$$

$$6) 64 + 2^{65} \cdot 3$$

$$62 + 2^{64} \cdot 6$$

$$> 6 \cdot 2^{64} + 64$$

$$\leq 6 \cdot 2^{64} + 62$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \omega^0 2 \quad & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \\ & - 2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\ & 2 \sin 4x (\cos 7x - \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) \\ & \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) - \sqrt{2} \sin 4x = 0 \\ & (\sin 7x - \cos 7x) (\sin 7x + \cos 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0 \\ & \sqrt{2} \sin (7x - \frac{\pi}{4}) (\sqrt{2} \cos (7x - \frac{\pi}{4}) - \sin 4x) = 0 \\ & \sin (7x - \frac{\pi}{4}) (\cancel{\sqrt{2}} 2 \sin (\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 4x}{2}) \cos (\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 4x}{2}) = 0 \\ & \sin (7x - \frac{\pi}{4}) \sin (\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}) \cos (\frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{1+x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 7x - \frac{\pi}{4} &= j\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} &= \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11x - \frac{\pi}{4}}{2} &= \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x &= \sqrt{1}k + \frac{1}{4} \\ 3x &= 2\sqrt{1}k + \frac{1}{4} \\ -11x &= \pi + 2\sqrt{1}k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{1}}{28}, & k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2\sqrt{12}}{3} + \frac{\sqrt{1}}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{2\sqrt{12}}{11} + \frac{\sqrt{1}}{44}, & k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

В решении пользовался следу-
ющей формулой:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin x \pm \cos x = \sqrt{2} \sin(x \pm \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Orbital: $x \in \left\{ \frac{\pi k}{7} + \frac{\pi}{28}; \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{12}; \frac{2\pi k}{11} + \frac{5\pi}{44} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

№1 Представим число 3375 в виде простых множителей

$3375 = 3^3 \cdot 5^3$ цифры 3 и 5 ~~то~~ должны входить в наше число, но число $3^2 = 9$, которое записывается только одной цифрой может быть в записи. Имеем 2 возможных числа с 3, 3², 3, 5² и (8-3-3) "1" (2) возможных числа с 3, 5², 1, 3², 1, 9² и 3, 1.

④ Рассмотрим кол-во перестановок цифр (3, 3', 3, 5', 2, 1')

Количество чисел из 3,3 и 3,5: 333555, 555333, когда в первых трех разрядах только будет 5 3+3=9 вариантов, когда в первых трех разрядах только будет 3 3+3=9 вариантов, итого: 9+9+1+1=20 вариантов

Дополним наши числа вставив в разряд единиц 1^0 , получим семизначное число. Позиция для вставки $1^0 = 7 \cdot 20 = 140$ чисел. Вставим еще одну 1^0 $140 \cdot 2 = 280$ чисел, но число, где $2 \cdot 1^0$

из них подрубил и посчитал двояко, т.е. всего всего, и записал
которых 3, 5, 3, 3 и 2, 1" = 1120 = 560

* мы рассматривали местозамещение

② Рассмотрим кор-во 4-го числа, в записи которых 3, 5, и 1, 5.
Числа: 3555, 5355, 5535 и 5553. дополним число, вставив между
какими-нибудь цифрами (или в конец / начало) 9. Числа: 405 = 20

Дополн. время "1" получаем: 20.6.7.8 мес. т.е. 1120 мес.

Всего, суммируя два случая $1120 + 560 \text{ чисел} = 1680$

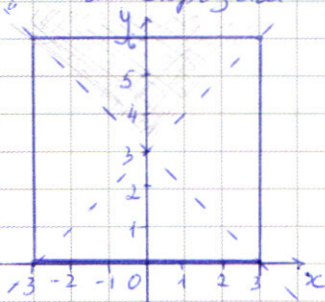
Omben: 1680

на два ебоните

№5 График первого уравнения системы симметричен относительно прямой $y = 3+x$ и $y = 3-x$, рассмотрим участок, где оба модуля раскрываются со знаком "+", и изобразим относительно двух прямых.

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y-3-x+y-3+x=6 \\ y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \\ y=6 \end{cases}$$

изобразим;
образуем симметрично
относительно прямой



Если же на координатной плоскости изобразить кривую второго уравнения системы, получим дуги двух окружностей с радиусом $\sqrt{a}$, $[a > 0]$, и центрами $(\pm 4; \pm 3)$, заключенные между осями координат. Если радиус $\sqrt{a} > 3$ или центре окружности с такими же координатами центров и радиусом $\sqrt{a}$.

Изобразим на координатной плоскости:

Заметим, что при $a < 1$ окружности не касаются квадрата, являющегося решением первого уравнения, при $a = 1$ два решения $(3; 3)$ и $(-3; 3)$, при $a \rightarrow 1 < a < 5^2$ попарно по два решения при $x > 0$ и $x < 0$, т.е. 4 решения, при $a = 5^2$ два решения: $(0; 6)$ и $(0; 0)$, при $a > 5^2$ 0 решений.

Ответ: $a \in \{25; 1\}$

№4 Пусть первая ~~плоскость~~ ^{плоскость} π и касательная сфера, касающаяся её в π, P , а вторая плоскость σ в π, Q . Проведем прямую через π, S и K , обозначим точки пересечения верхней плоскости этой прямой T а нижней (лежащая в π) - W . Рассмотрим

$\triangle SPT$ и $\triangle SQW$

так как площадь одного из сечений в 4 раза больше, во ~~второй~~ ^{сторонах} сторон сечения в 2 раза больше, как и расстояние до $SO \Rightarrow QW = 2PT$. Так как $OP = OK = OQ = R$ сфера

$TP = TK, KW = WQ$ (как отрезки касательных) $\Rightarrow TW = 3PT$

$\triangle SPT \sim \triangle SQW \Rightarrow \angle QSW = \angle SPT = \angle SQW = 90^\circ \Rightarrow \frac{PT}{QW} = \frac{ST}{SW} = \frac{1}{2}$

$\angle SW = 6PT \Rightarrow \angle KSO = \angle PST = \arcsin \frac{1}{3}$

$\angle KSO = \angle SKO \sim \triangle SPT \sim \triangle OSK$ общий $\angle SKO = \angle SPT = 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{SK}{ST} = \frac{SK}{ST} = \frac{3PT + PT}{3PT} = \frac{4}{3}$$

Аналогично доказываем, что $SM = \frac{4}{3}ST_1$ (T_1 - перес. верхней пл-ти с плоскостью π и прямой SM)

и $SL = \frac{4}{3}ST_2$ (T_2 - пересечение верхней пл-ти с плоскостью π и прямой SL)

$$\Rightarrow \frac{S_{\text{сеч}}(KML)}{S_{\text{сеч}}(T_1 T_2)} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \quad S_{\text{сеч}} KML = \frac{16}{9} \cdot 1 = 1\frac{7}{9}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3} \quad S_{\text{сеч}} = 1\frac{7}{9}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6 $\angle ACD = \angle ADC$ как углы опирающиеся на равные хорды в окружностях с равными радиусами $\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

$$\frac{AB}{\sin \angle BDA} = 2R \quad AB = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

пусть $DB = a$, а $BC = b$ тогда надо найти по т. Пифагора $\sqrt{a^2 + b^2} = ?$
Проведем перпендикуляр DE пересечение с AC (или AD), обозначим точку пересечения E . $CB = BE$ (так $\angle CBE = 90^\circ$, $\angle BCE = 45^\circ$) $\Rightarrow$ достаточно найти DE

$$AE = \frac{a-b}{\sqrt{2}} \quad AD = \frac{a+b}{2} \sqrt{2} \quad \text{по т. косинусов } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cos 45^\circ$$

$$(5\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a+b}{2}\sqrt{2}\right)^2 + a^2 - 2a \cdot \frac{a+b}{2}\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ$$

$$50 = \frac{(a+b)^2}{2} + a^2 - \frac{2}{2}a(a+b)$$

$$100 = a^2 + b^2 + 2ab - a^2 - 2ab = a^2 + b^2 + 2ab + 2a^2 - 2a^2 - 2ab = a^2 + b^2 = DE^2$$

$$DE^2 = 100 \quad DE = CF = 10$$

Ответ: а) 10

б) $CB = 6 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (по т. Пифагора)

$$\sin \angle ACF = \frac{AC \cdot DF \cdot \sin \angle DCF}{2} = \frac{\left(\frac{BC+BD}{2}\right) \sqrt{2}}{2} \cdot CF \cdot \sin (\angle ACD + \angle DCF)$$

$$\sin (\angle ACF + \angle DCF) = \sin \angle ACF \cos \angle DCF + \sin \angle DCF \cos \angle ACF$$

$$\angle BCF \cdot BC = 6 \quad CF = 10 \quad \arccos BCF = 0,6 \quad \arcsin BCF = 0,8$$

$$\sin (\angle ACF) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,6 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,8 = \frac{1,4\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$AC = \left(\frac{6+8}{2}\right)\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\sin \angle ACF = \frac{7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10}}{2} = \frac{49 \cdot 2}{2} = 49 \quad \text{Ответ: б) 49}$$

$$\ln \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^2 \lg xy$$

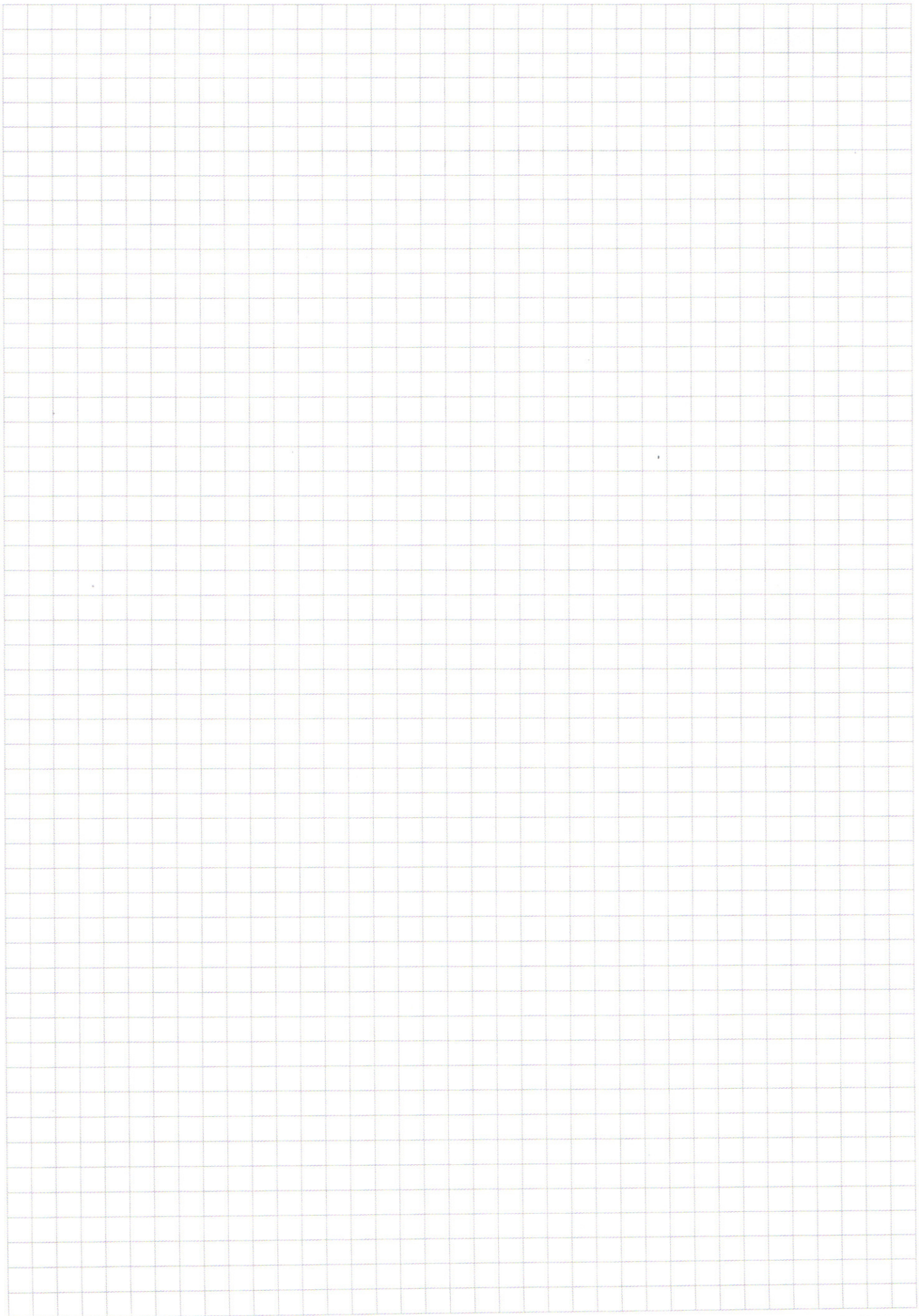
$$x^2 - 2xy - 4x + 3y^2 + 12y = 0$$

решим второе уравнение системы

$$(x+y-4)(x+3y) = 0$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\text{№ 7) } x > 7$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)