

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

задано

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

† 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

† 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

† 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3.$$

П.к. Это произведение цифр, то в таком числе три „пятерки“. В таком числе (произведение цифр которого 3375) не могут быть цифры: 2 (так как 3375-нечетно), 4. (3375/4), 6 (3375/6), 7 (3375/7), 8 (3375/8). Также не может быть цифров ноль, т.к. тогда произведение цифр 0.

П.е. В нашем числе могут быть только цифры 1, 3, 5, 9. Возможны два варианта:

- ① три „пятерки“, три „тройки“, две „единицы“ (3, 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1 в каком порядке)
- ② три „пятерки“, одна „тройка“, одна „девятка“, три „единицы“. (5, 5, 5, 3, 9, 1, 1, 1 в каком порядке).

Рассчитаем кол-во чисел в каждом случае:

$$\textcircled{1} C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 1 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} =$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 5 = 560$$

$$\textcircled{2} C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 28 \cdot 40 = 1120$$

т.е. всего таких чисел: $560 + 1120 =$
 $= \underline{\underline{1680}}.$

Ответ: 1680

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Положим с ним уравнение:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = \\ &= 4y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 - 2y + 1) = 4(y-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = y+2 + 2(y-1) \\ x = y+2 - 2(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases}$$

т.е. система равносильна:

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ \begin{cases} x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \quad (1) \\ \begin{cases} x = 3y \\ x = -y+4 \end{cases} \end{cases}$$

(1) Подставим $x = 3y$:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^{2 \lg 3y^2}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg 3y} = (y^4)^{\lg 3y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ \frac{y^4}{3} = y^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) Подставляя $x = -y + 4$:

$$\left(\frac{y^5}{-y+4}\right)^{\lg 3y} = y^{2\lg 3(-y+4)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3^5} \frac{(3y)^{5\lg 3y}}{(-y+4)^{\lg 3y}} = \\ & = \frac{10^5}{3^5} \frac{1}{(-y+4)^{\lg 3y}} \end{aligned}$$

№ 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$\begin{aligned} & (\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \\ & = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \\ & = \sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \\ & = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sin \left(\left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) = \\ & = 2\sqrt{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)}{2} \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2}}{2} \right) = \\ & = 2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \sin \left(-4x \right) = \\ & = -2\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \sin 4x = \\ & = -2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) \sin 4x = \\ & = -2 (\cos 7x + \sin 7x) \sin 4x. \end{aligned}$$

$$-2 (\cos 7x + \sin 7x) \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 (\cos 7x + \sin 7x) \sin 4x =$$

$$= \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\begin{aligned} & \cos 14x = \\ & = \cos^2 7x - \sin^2 7x \end{aligned}$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1) \cos 7x = -\sin 7x.$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1.$$

$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$



$$2) \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) + 2\sin 4x = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) + 2\sin 4x = 0$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x = -\cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 4x = -\sin(\frac{\pi}{2} - (7x + \frac{\pi}{4}))$$

$$\sin 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

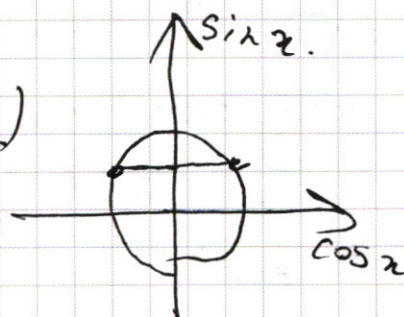
$$\begin{cases} 4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11} \end{cases}$$



Ответ: $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi k}{11}$$

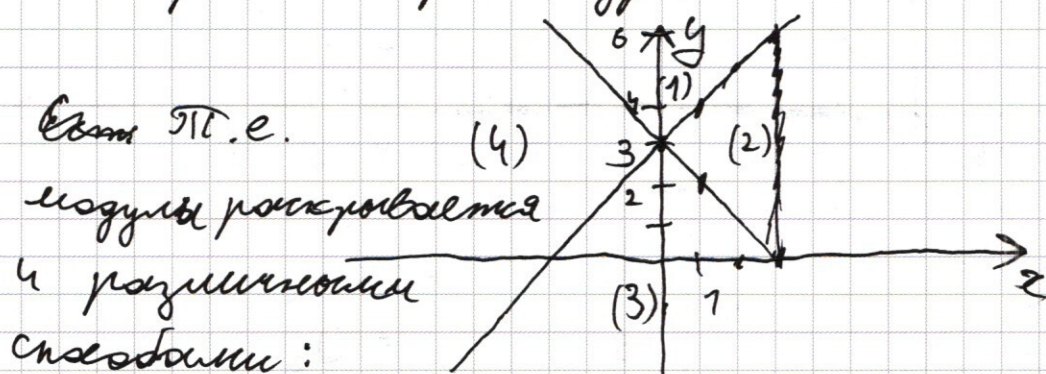
$$k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 2 \end{cases}$$

Построим первое ур-е на плоскости:



$$\begin{aligned} 1) \quad y-3-x + y-3+x &= 6 \\ 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$2) \quad -y+3+x + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$3) \quad -y+3+x - y+3-x = 6$$

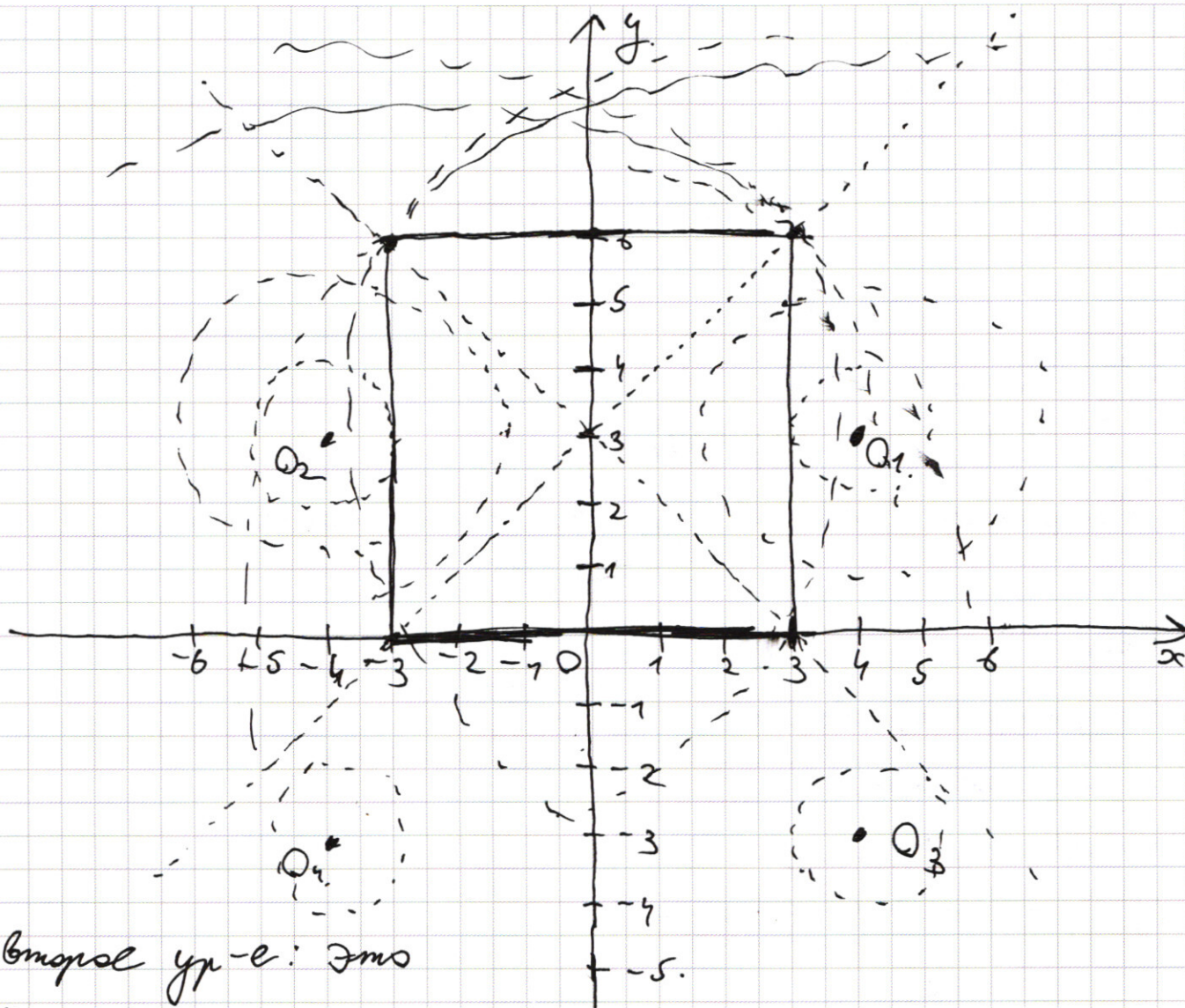
$$y = 0$$

$$4) \quad \cancel{x y + 3 + x} + \cancel{y - 3 + x} = 6$$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$x = -3$$

П.е. первое ур-е это прямоугольник:



Второе ур-е: Это
 четыре окружности $(4; 3); (-4; 3); (4; -3); (-4; -3)$
 с центрами в $(3; 3); (-3; 3); (3; -3); (-3; -3)$
 с переменным радиусом $\sqrt{\alpha}$ ($\alpha \geq 0$).

Итак:

- 1) $\alpha < 0$ - решений нет (сумма квадратов < 0)
- 2) $\alpha = 0$ - решений нет (4 точки не перес. с $\square$ принадлежат.)
- 3) $0 < \alpha < 1$ - решений нет (по рисунку.)
- 4) $\alpha = 1$ - два решения (окр. Q_1 и Q_2)
- 5) При $\alpha > 1$ и до какого-то α решений более двух. Далее как интересуют касание окружностей Q_1 и Q_2 с вершинами $\square$ (точнее с правых вершин прямоугольника).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Касание происходит при:

$$a_1 = \sqrt{(4+3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$$

т.е. при $1 < a \leq \sqrt{58}$ - более двух решений.

(симметрия относительно $y=3$).

6) Далее при $a > \sqrt{58}$ окр. O_1 и O_2 не пересекаются. Продолжаем.

Окр. O_3 и O_4 . Рассмотрим нижнюю вершину квадрата при:

$$a' = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} < \sqrt{58}.$$

т.е. при $\sqrt{58} < a < a_2$ - решений более двух, a_2 - касание нижней окр.

верхних дальних вершин прямоугольника.

$$a_2 = \sqrt{(-4-3)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130},$$

т.е. при $\sqrt{58} < a < \sqrt{130}$ - более двух решений.

7) при $a = \sqrt{130}$ - решения два (нижняя окр. касается верхних дальних вершин).

8) при $a > \sqrt{130}$ - решений нет.

Ответ: $a = 1$; $a = \sqrt{130}$.

1) Треугольник $\triangle CAB$
 $\angle CAB = \alpha$, $BC = y$.

2) m. синусов:

$$\frac{BC}{\sin A} = 10$$

$$\frac{y}{\sin \alpha} = 10$$

$$\frac{BB}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 10$$

- увеличенный радиус.

$$\underline{\sin \alpha = \frac{y}{r}}$$

$$\frac{BD}{\cos \alpha} = 70$$

$$Bb = 10 \cos \alpha = \sqrt{400 - y^2}$$

$$CF^2 = BC^2 + CF^2 - \overset{\text{m. Thales}}{=} BC^2 + BD^2 =$$

$$= y^2 + 100 - y^2 = 100$$

$$CF = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\text{д.1)} \quad \angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}'$$

$$\angle APB = \frac{1}{2} \widehat{AB}''$$

В силу симметрии.
 $\widehat{AB}' = \widehat{AB}''$, т.е.

$$\angle ACB = \angle APB = 45^\circ$$

$$BD = \sqrt{CE^2} \quad BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

$$\cos \angle ACD = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{BC + BD} = \cos 45^\circ$$

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{2} (8 + 6) = 7\sqrt{2}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \quad \sin \angle BCF = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

$$\begin{aligned} S_{ACF} &= \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin (\angle BCF + \angle ACB) = \\ &= 35\sqrt{2} \sin \left(\angle BCF + \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= 35\sqrt{2} \left(\sin \angle BCF \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \angle BCF \right) = \\ &= 35 (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \\ &= 35 \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right) = 35 \cdot \frac{7}{5} = 5 \cdot 7 \cdot \frac{7}{5} = 49 \end{aligned}$$

Ответ: а) $CF = 10$

$$\text{б)} \quad S_{ACF} = 49.$$

№7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

Введем функцию:

$$f(x) = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

Заметим, что для конкретного целого x , как-то разная разность решений будет в точности равно $f(x)$.

И решений не будет, если $f(x) < 0$ (при $f(x) = 0$ - решение есть)

т.е. Найдем все x , для которых $f(x) \geq 0$:

$$f'(x) = 2^{64} - 1 - 2^x \ln 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}$$

т.е. при довольно малых x производная больше нуля, а с ростом x производная уменьшается.

Оценим x :

$$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$$

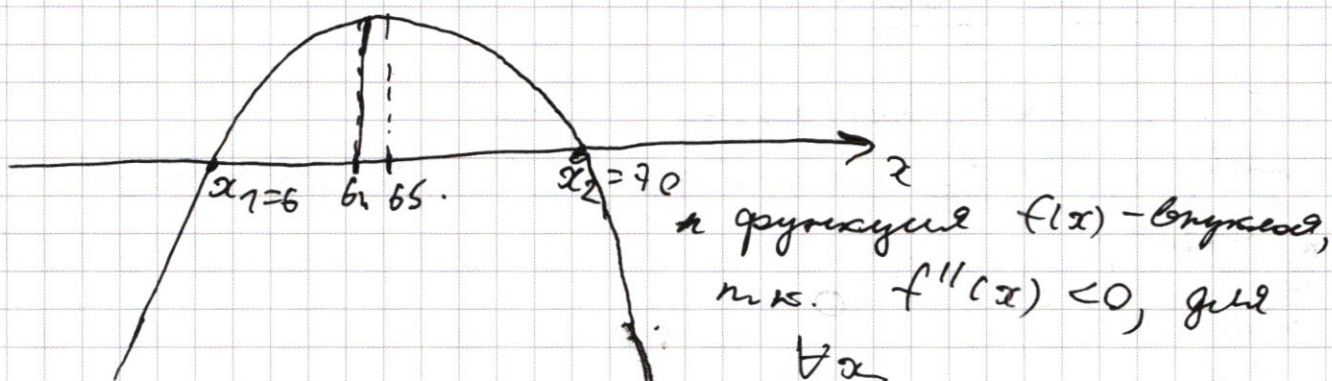
$$1 \text{ т.к. } 2 < e$$

$$\text{т.к. } \sqrt{e} < 2$$

$$\text{т.е. } 2^{64} - 2^x < 2^{65} - 2$$

$$\text{т.е. } 64 \leq x < 65 - \text{Экстремум функции}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Приближения x_1 и x_2
(корни функции)

целыми числами):

$$f(0) = 70 - 1 - 3 \cdot 2^{65} < 0$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 70 + (2^{64} - 1)4 - 2^4 - 3 \cdot 2^{65} = \\ &= 70 + 4 \cdot 2^{64} - 4 - 2^4 - 3 \cdot 2^{65} = \\ &= 50 + 4 \cdot 2^{64} - 6 \cdot 2^{64} = -2 \cdot 2^{64} + 50 < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(5) &= 70 + (2^{64} - 1)5 - 2^5 - 3 \cdot 2^{65} = \\ &= 70 + 5 \cdot 2^{64} - 5 - 32 - 6 \cdot 2^{64} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(6) &= 70 + 6 \cdot 2^{64} - 6 - 2^6 - 6 \cdot 2^{64} = \\ &= 70 - 6 - 64 = 0. \text{ т.е. } \boxed{x_1 = 6}. \end{aligned}$$

Приближения x_2 целыми числами:

$$\begin{aligned} f(128) &= 70 + (2^{64} - 1)128 - 2^{128} - 3 \cdot 2^{65} = \\ &= 70 + 128 \cdot 2^{64} - 128 - 2^{128} - 6 \cdot 2^{64} = \\ &= -58 + 122 \cdot 2^{64} - 2^{128} < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(70) &= 70 + (2^{64} - 1)70 - 2^{70} - 3 \cdot 2^{65} = \\
 &= 70 + 2^{64} \cdot 70 - 70 - 2^{70} - 6 \cdot 2^{64} = \\
 &= 70 + 64 \cdot 2^{64} - 70 - 2^{70} = 2^6 \cdot 2^{64} - 2^{70} = 2^{70} - 2^{70} = 0
 \end{aligned}$$

П.е. $x_2 = 70$

П.е. Ответ: как:

~~$x=70$~~
 ~~$x=63$~~
 ~~$x=70$~~
 ~~$x=0$~~

~~$f(x)$~~ , где ~~$f(x) = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65}$~~
 ~~$f(x) = 65 \cdot 70$~~

$n=69$
 $\sum_{k=7} f(k)$, где $f(k) = 70 + (2^{64} - 1)k - 2^k - 3 \cdot 2^{65}$
 $n=69$
 $\sum_{k=7} f(k) = 63 \cdot 70 + (2^{64} - 1)(7 + 8 + \dots + 69) -$

$$- 3 \cdot 2^{65} \cdot 63 - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{69}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= 63 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \frac{69+7}{2} \cdot 63 - \\
 &- 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} - \frac{2^7(2^{63}-1)}{2-1} =
 \end{aligned}$$

$$= 63 \cdot 70 + (2^{64} - 1) \cdot 38 \cdot 63 - 3 \cdot 63 \cdot 2^{65} - 2^7(2^{63} - 1) =$$

$$= 63 \cdot 70 + 38 \cdot 63 \cdot 2^{64} - 38 \cdot 63 - 6 \cdot 63 \cdot 2^{64} -$$

$$- 64 \cdot 2^{64} + 128 = 2^{64} (38 \cdot 63 - 6 \cdot 63 - 64) +$$

$$+ 63 \cdot 70 - 38 \cdot 63 + 128 = 2^{64} (1952 - 64) +$$

$$+ 1953 + 128 = 2^{64} \cdot 2015 + 2081$$

Ответ: $2^{64} \cdot 2015 + 2081$, $1952 \cdot 2^{64} + 2081$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos\left(\frac{5\pi - 14\pi - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin \frac{8\pi}{2} =$$

$$= 2 \cos\left(\frac{\frac{5\pi - 14\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) (-\sin 4\pi) =$$

$$= -2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 7\pi\right) \sin 4\pi = \cos 14\pi.$$

№ 3

$x > 0, y > 0$

$$x^2 - 2xy - 4x = 3y^2 - 12y$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x = (3y^2 - 12y)$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\frac{Q}{4} = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y =$$

$$= 4y^2 - 8y + 4 = 4(y - 2y + 1) = 4(y - 1)^2.$$

$$\begin{cases} x = y + 2 + 2(y - 1) \\ x = y + 2 - 2(y - 1) \end{cases}$$

~~$x = y + 2 + 2(y - 1)$~~

$y \geq 1$
 ~~$y + 2 + 2(y - 1) = 3y$~~
 ~~$y + 2 - 2(y - 1) = -y + 4, y \leq 1$~~
 ~~$x + 2 - 2(y - 1), y \leq 1$~~

$x = 3y$

$x = -y + 4$

- решение

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 7\pi - \sin 7\pi)$$

$$\sin 4\pi = 2 \sin 2\pi \cos 2\pi$$

$$\frac{-4}{\sqrt{2}} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) \sin 2\pi \cos 2\pi = \cos^2 7\pi - \sin^2 7\pi$$

$$-2\sqrt{2} (\cos 7\pi - \sin 7\pi) \sin 2\pi \cos 2\pi = (\cos 7\pi - \sin 7\pi)(\cos 7\pi + \sin 7\pi)$$

$$\cos 7\pi + \sin 7\pi - \sqrt{2} \sin 4\pi = 0 \quad \text{cos - решение}$$

4

$$x - 3 - 2 - y + 3 - 2 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 33 \\ \hline + 189 \\ 189 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$39 \cdot 63 - 6 \cdot 63 =$$

$$= 33 \cdot 63$$

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 31 \\ \hline + 63 \\ 189 \\ \hline 1953 \end{array}$$

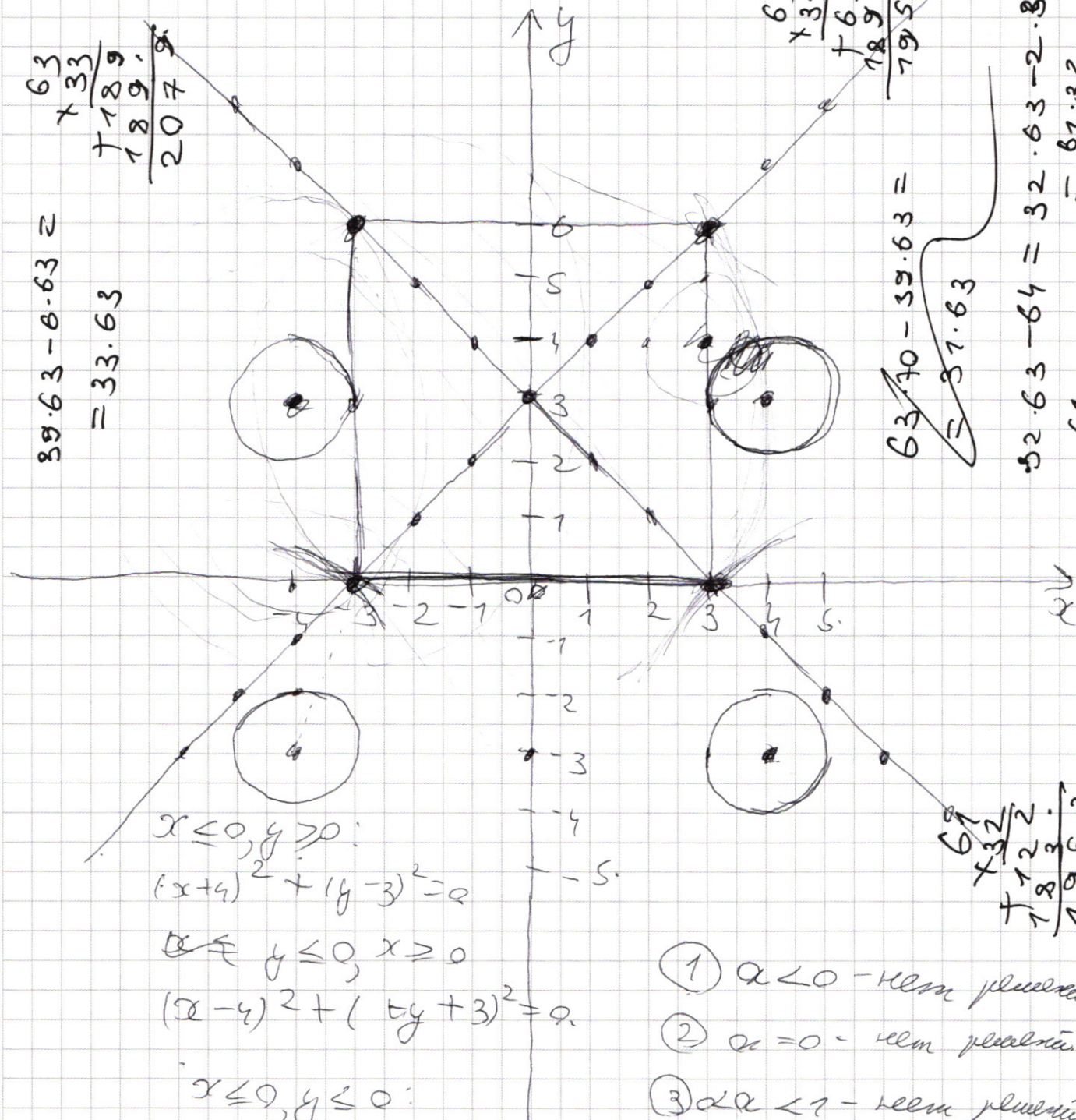
$$63 \cdot 70 - 39 \cdot 63 =$$

$$= 31 \cdot 63$$

$$32 \cdot 63 - 64 = 32 \cdot 63 - 2 \cdot 32 =$$

$$= 61 \cdot 32$$

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times 32 \\ \hline + 122 \\ 182 \\ \hline 1952 \end{array}$$



$$x \leq 0, y \geq 0:$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$x \leq 0, y \leq 0:$$

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = a$$

$$x \leq 0, y \leq 0:$$

$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = a$$

1 $a < 0$ - нет решений

2 $a = 0$ - нет решений

3 $0 < a < 1$ - нет решений

4 $a = 1$ - 2 решения

5 $a > 1$ - 4 решения

$$\begin{array}{r} 63 \\ \times 31 \\ \hline + 63 \\ 189 \\ \hline 1953 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1953 \\ + 128 \\ \hline 2081 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

р. 7.

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{64} - 70 \cdot (2^{64} - 7) \cdot x$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} < 2^{63} - \frac{1}{2} \quad \ln 2 > \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\ln 2} < \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2^x \leq 2^{63} \quad x \leq 63$$

$$2^x > 2^{64} - 7 \quad x > 64$$

$$2^x < 2^{65} - 2$$

$$x \leq 65$$

$$64 \leq x \leq 65$$

$$\frac{1}{\ln 2} > 1$$

$$2^x > 2^{64} - 7$$

$$x \geq 64$$

$$2^{63} + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 63(2^{64} - 7) =$$

$$= 2^{63} + 6 \cdot 2^{63} - 70 - 726 \cdot 2^{63} + 63 < 0$$

$$x = 62$$

$$(32) \cdot 64$$

$$2^{62} + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 62(2^{64} - 7) =$$

$$2^{62} + 12 \cdot 2^{62} - 70 + 62 - 62 \cdot 2^{62}$$

$$2^{32} + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 32(2^{64} - 7) =$$

$$= 2^{32} + 3 \cdot 2^{32} \cdot 2^{32} - 70 - 32 \cdot 2^{32} \cdot 2^{32} + 32 =$$

$$= 2^{32} (6 \cdot 2^{32} + 7 - 32 \cdot 2^{32}) - 38 < 0$$

$$x = 16: 2^{16} + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 16(2^{64} - 7) =$$

$$= 2^{16} + 3 \cdot 2^{48} \cdot 2^{16} - 70 - 16 \cdot 2^{48} \cdot 2^{16} + 16 =$$

$$x = 1: 2 + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 2^{64} - 7 =$$

$$x = 4:$$

$$2^4 + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 4 \cdot (2^{64} - 7) =$$

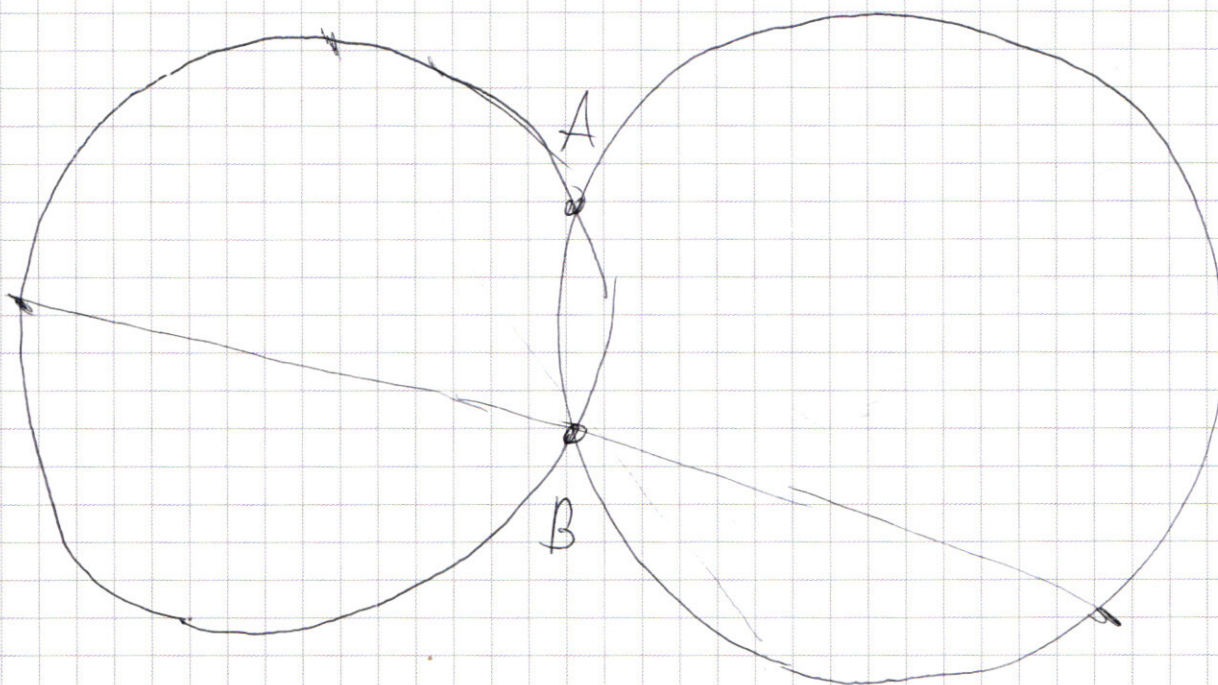
$$= 16 + 3 \cdot 2^{64} - 70 - 4 \cdot 2^{64} + 4 < 0$$

$$AB^2 = x^2 + BC^2 - \sqrt{2} x BC$$

$$AB^2 = x^2 + BD^2 - \sqrt{2} x BD$$

$$BC^2 - BD^2 - \sqrt{2} (x BC - x BD) = 0$$

$$\sqrt{2} x (BC - BD) - \sqrt{2} x (BC - BD) = 0 - \text{верно}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a. \end{cases} \quad \text{— два решения}$$

№7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{64} > 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$3 \cdot 2^{65} < y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$6 \cdot 2^{64} - 70 \leq (2^{64} - 1)x$$

$$6(2^{64} - 1) - 64 \leq (2^{64} - 1)x$$

$$\textcircled{1} x \geq 6 - \frac{64}{2^{64} - 1} > 5.$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{64} >$$

$$\textcircled{2} 2^x + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - x(2^{64} - 1) < 0$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - x(2^{64} - 1)$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2^{64} + 1 = 0$$

$$2^x = \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}$$

$$x = \log_2 \left(\frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \right)$$

$$x = 2 \quad \ln 2 \sqrt{1} \quad 2 < e$$

$$x =$$

$$\begin{aligned} & \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} + 3 \cdot 2^{65} - 70 - \log_2 \left(\frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \right) (2^{64} - 1) > \\ & 3 \cdot 2^{65} - \log_2 \left(\frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \right) (2^{64} - 1) > \\ & \geq 3 \cdot 2^{65} - 2 \sqrt{2,72} \sqrt{2} < \\ & \ln 2 \sqrt{\frac{1}{2}} > \sqrt{2,72} \sqrt{2} < \\ & 2 > \sqrt{5e} < \\ & 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2^x)' &= \\ &= (e^{x \ln 2})' = \\ &= e^{x \ln 2} \cdot \ln 2 = \end{aligned}$$

$$= 2^x \cdot \ln 2$$

$$x = \log_2 \frac{2^{64} - 1}{\ln 2}$$

5) $\rightarrow 1$

касание

$$\alpha = \sqrt{(1-4-3)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{72+9} = \sqrt{81} = 9$$

$1 < \alpha \leq \sqrt{58}$ - одна точка касания

6) $\alpha > \sqrt{58}$

$$\alpha' = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\alpha'' = \sqrt{(-3-6)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{81+49} = \sqrt{130}$$

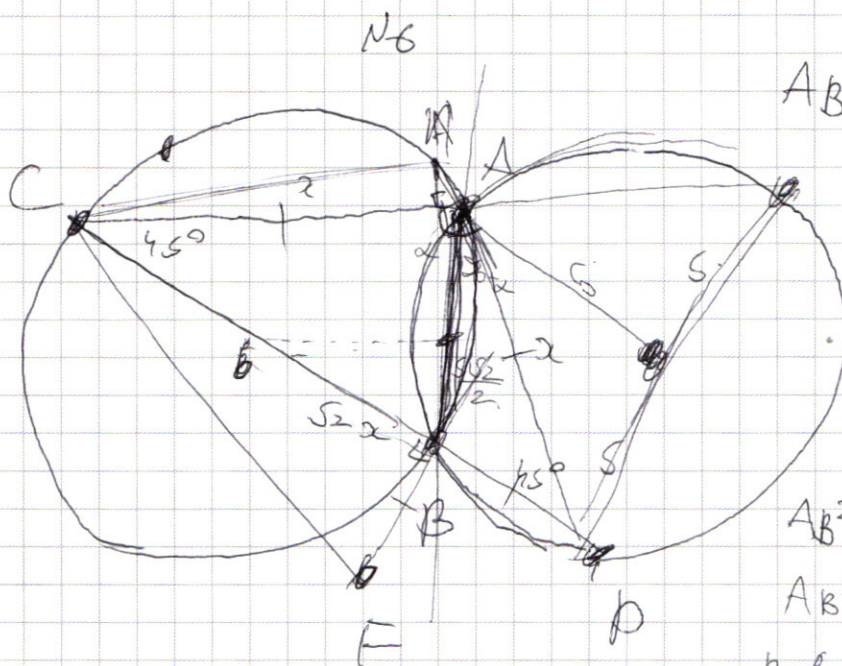
$\sqrt{58} < \alpha < \sqrt{130}$ - две точки касания

$\alpha = \sqrt{130}$ - одна точка касания

$\alpha > \sqrt{130}$ - нет касания

$$\alpha = 1 \quad \vee \quad \alpha = \sqrt{130}$$

а.)



$$AB = \sin 45^\circ \cdot 2R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 10$$

$$\frac{BH}{\cos \alpha} = 10$$

$$AB^2 = x^2 + BC^2 - 2 \cdot x \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB^2 = x^2 + BD^2 - 2 \cdot x \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$BC^2 - BD^2 = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$3375 = 5^2 \cdot 135 =$$

$$= 5^3 \cdot 27 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ \hline 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

- поочередно
спускаем

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 125} \\ \underline{25} \\ 87 \\ \underline{75} \\ 125 \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$

N 2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \sin 11x - \cos 3x + \sin 3x =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{2}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$= \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} +$$

$$+ \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} =$$

$$= \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

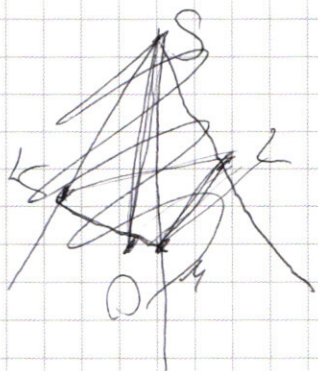
$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\pi}{2} - \left(3x + \frac{\pi}{4} \right)}{2}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

NS

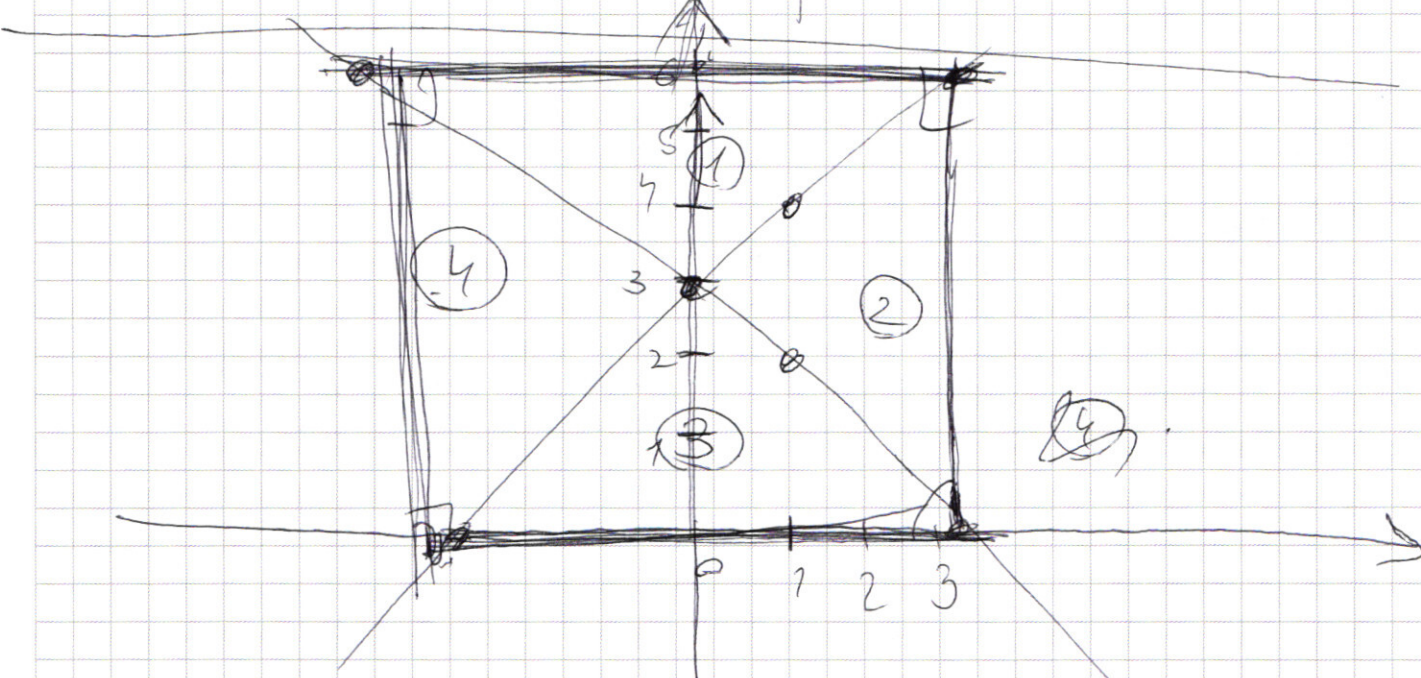


NS-

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$y = x + 3$$

$$y = -x + 3$$



$$① \Rightarrow y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y = 12 \quad y = 6$$

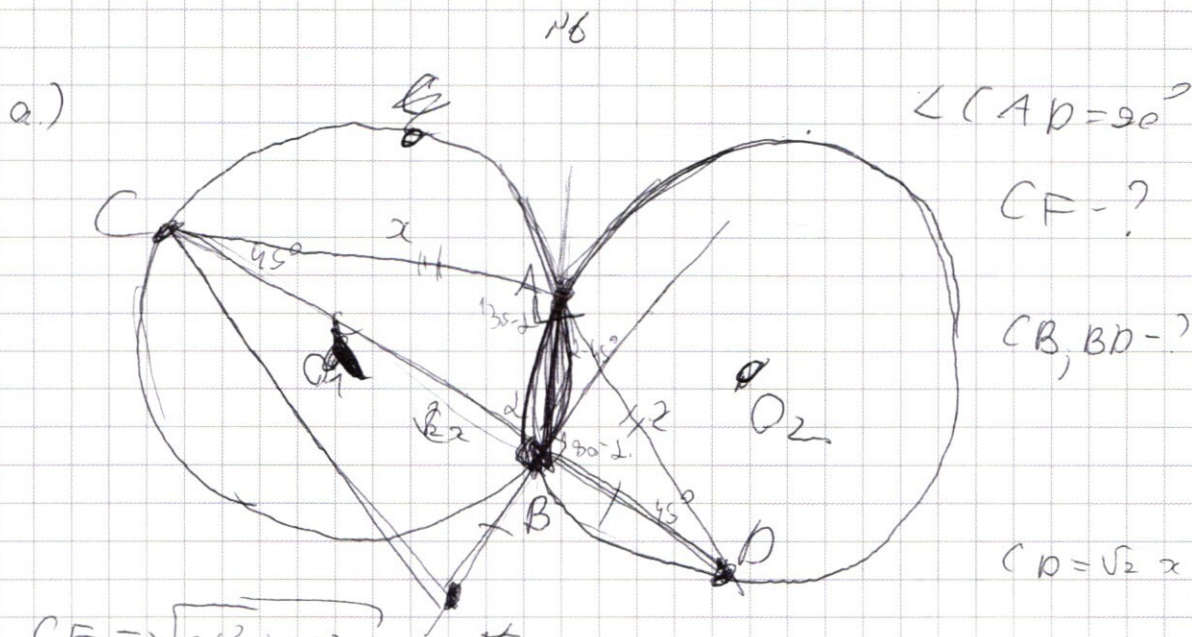
$$③ \Rightarrow -y+3+x - y+3-x = 6$$

$$2, \quad x+3-y + y-3+x = 6$$

$$x = 3$$

$$y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CF = \sqrt{Bb^2 + Cc^2}$$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 70$$

$$A_B = 5\sqrt{2}$$

$$CB^2 = x^2 + 50 - 10\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right) 2$$

$$BP^2 = a^2 + 50 - \frac{20054052}{1052} \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \quad 2.$$

$$Bc^2 - Bb^2 = \cancel{10} \sqrt{2} x \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$X_{BC-BD} = 70\sqrt{2} X \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$BC - Bb = 204 \cos \alpha$$

$$\frac{BC}{\sin(\frac{5\pi}{2} - (\alpha - \frac{\pi}{4}))} = 10$$

$$\frac{bc}{\cos(x - \frac{\pi}{4})} = 10 = 10$$

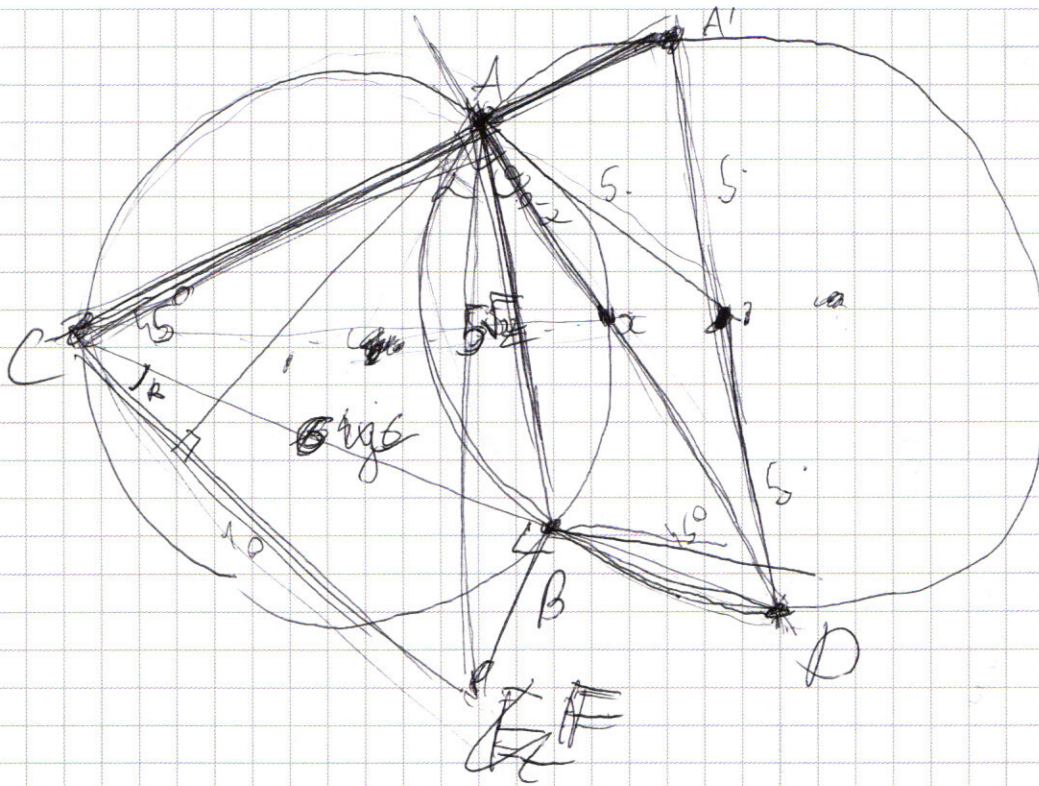
$$\frac{BD}{\sin(2-4)} = 70$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{552}{\sqrt{2}} \cdot 2$$

$$\frac{x}{\sin \alpha} = 10$$

$$BC = 10 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$Bb = 10 \text{ s, } 1 \left(\alpha - \frac{2\pi}{4} \right)$$



$$B: \sin \angle CAB \cdot \frac{y}{\sin \alpha} = 10$$

$$\sin \alpha = \frac{10}{y} \quad BD = 10 \cos \alpha = 10 \sqrt{1 - \frac{100}{y^2}}$$

$$BB^2 + CB^2 = y^2 + 100 \quad y^2 + 100 - y^2 = 100$$

$$CF = 10$$

$$\begin{array}{r} \times 225 \\ 15 \\ \hline + 1125 \\ 225 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$C_8^5 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{5!3!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = 7 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 28 \cdot 40 = 1120$$

$y > 0$
 $y(-y+4) > 0$
 $0 < y < 4$