

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

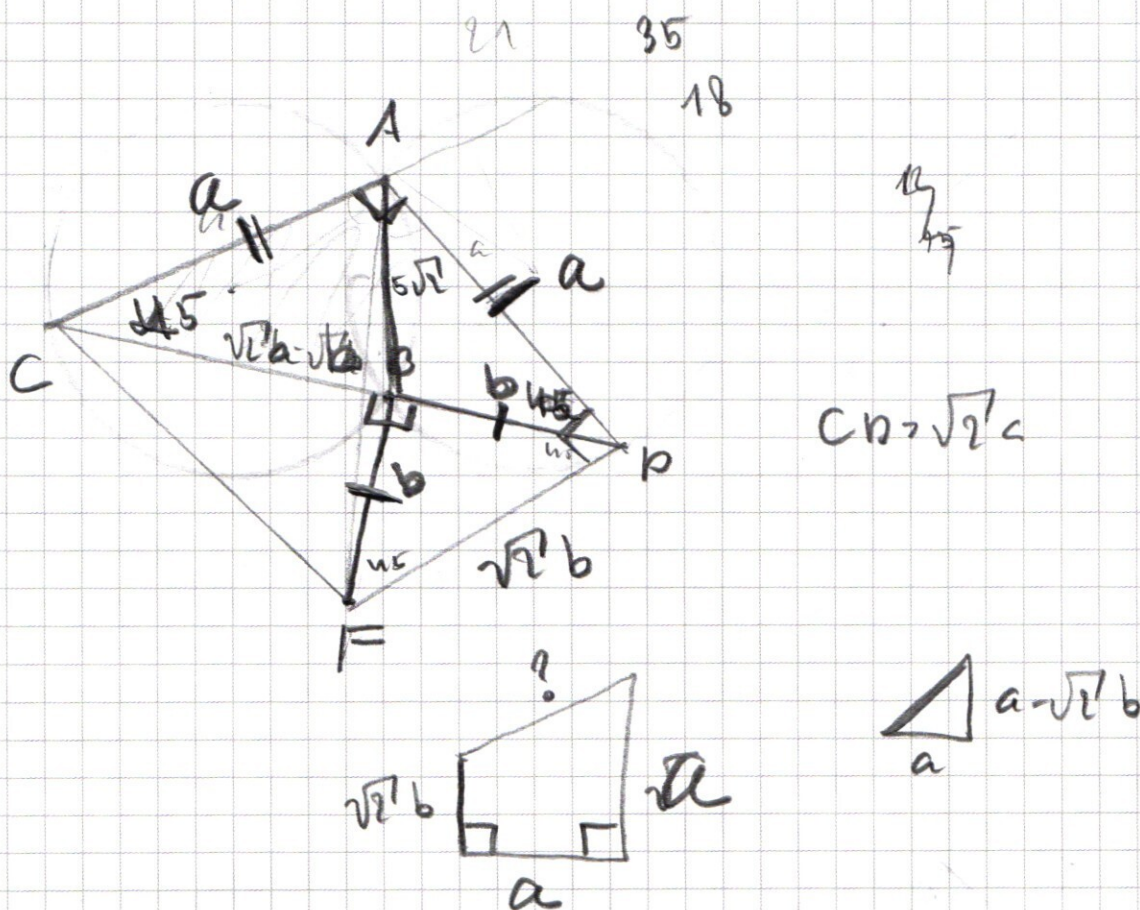
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

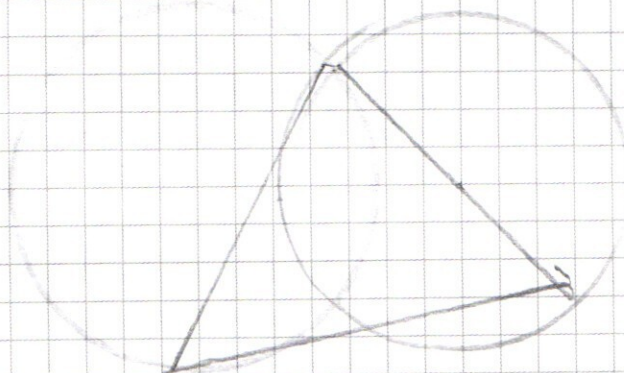
$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

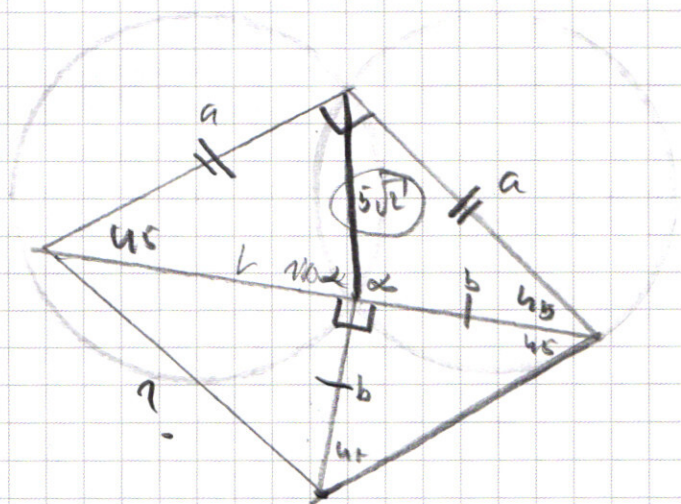
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AB}{\sin 45} = 2R \quad AB = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$





$$\frac{a}{\sin \alpha} = 10$$

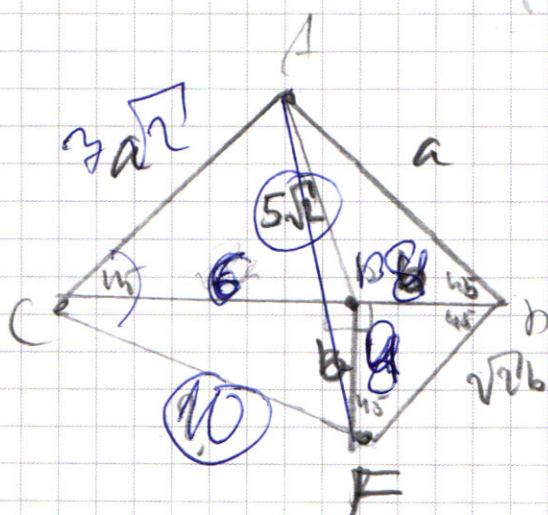
$$a^2 = 50 + b^2 + 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot b \cos \alpha \quad \frac{b}{\sin \beta} = 10$$

$$a^2 = 50 + b^2 - 2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot b \cos \alpha$$

$$?^2 = \sqrt{b^2 + 1^2} = \sqrt{b^2 + (\sqrt{2}a - b)^2}$$

$$b = \sqrt{?^2} a - b$$

$$b \geq a?$$



$$?^2 = \sqrt{a^2 - (\sqrt{2}b - \sqrt{2}b)^2}$$

$$50 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$$

$$b$$

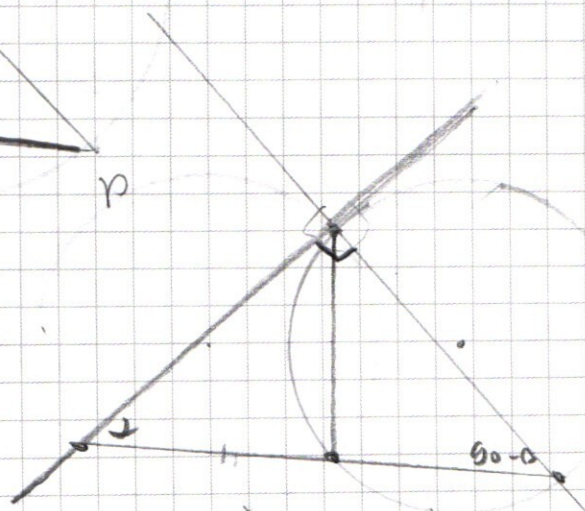
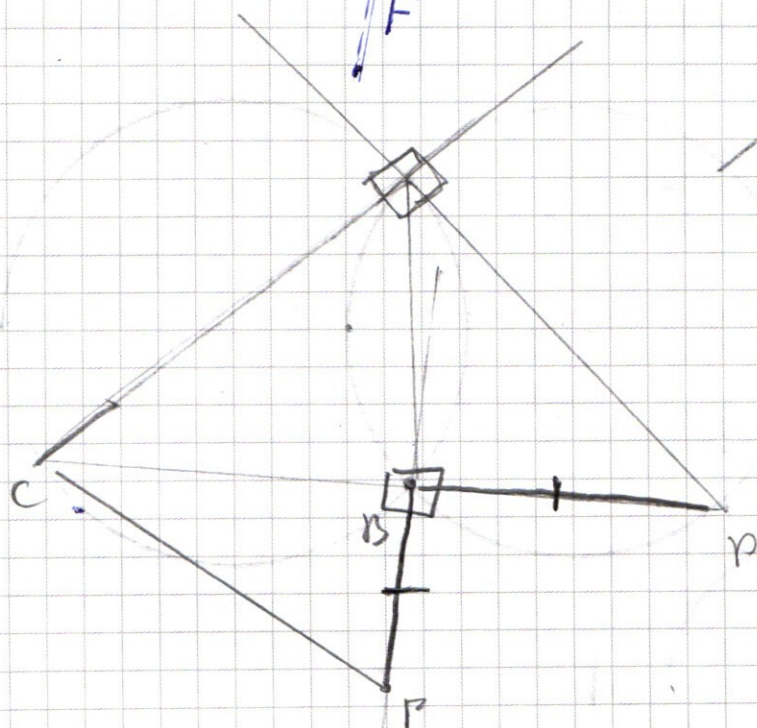
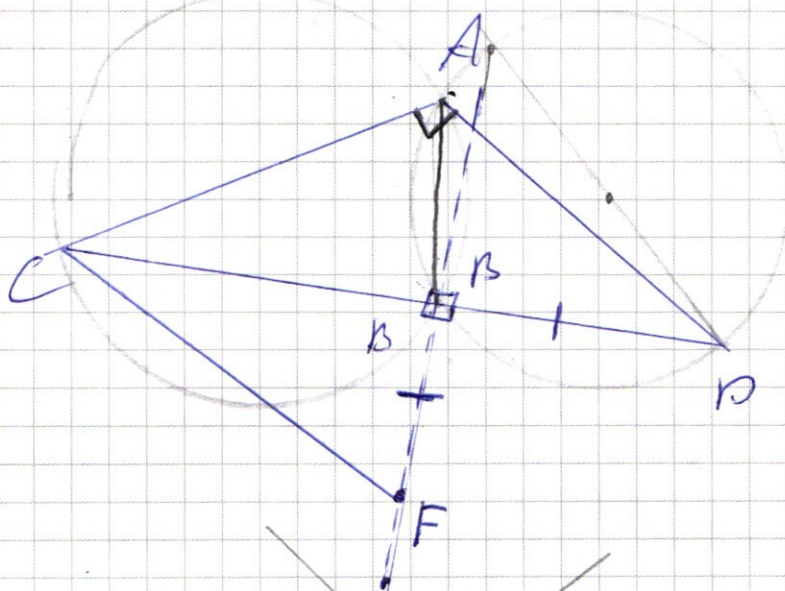
$$2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}$$

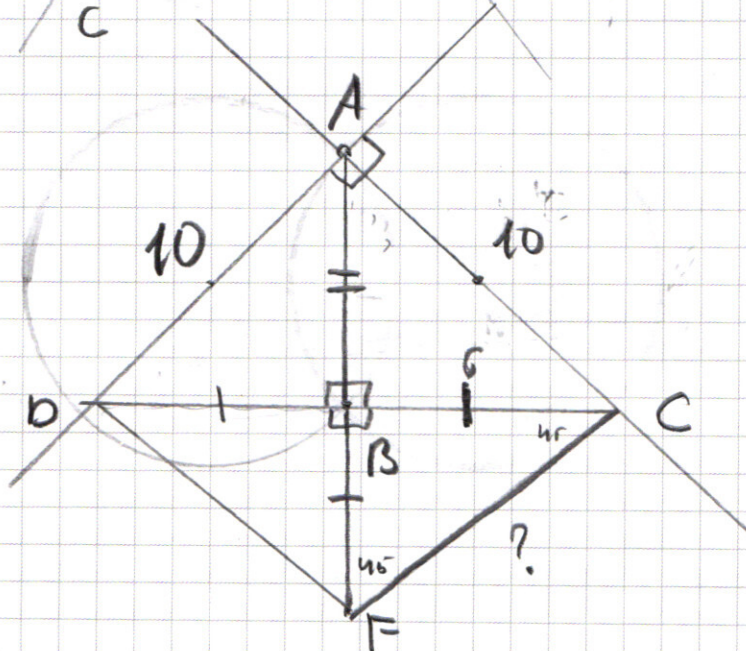
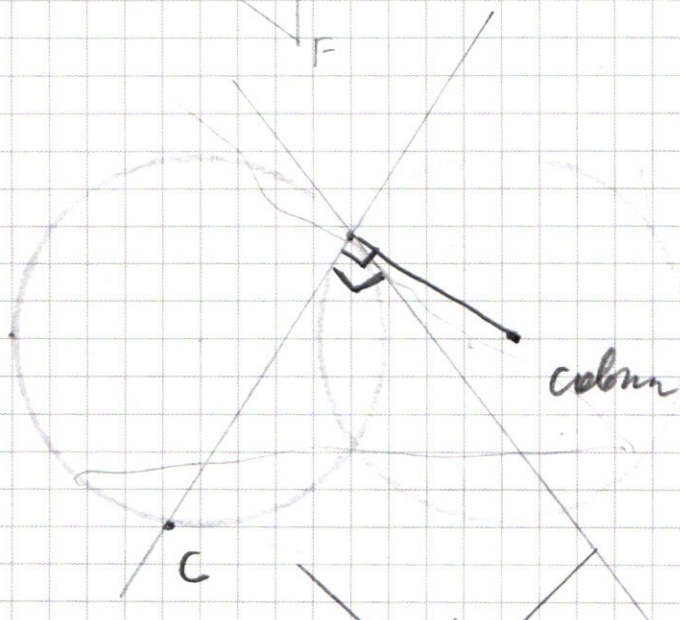
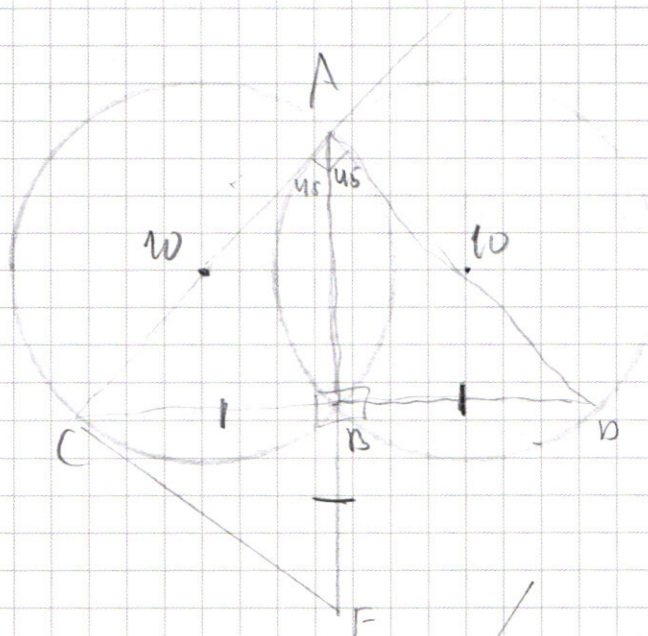
$$\begin{array}{r} 6\sqrt{2} \\ 14 \\ \hline 6 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\cos 11^\circ - \cos 3^\circ$$

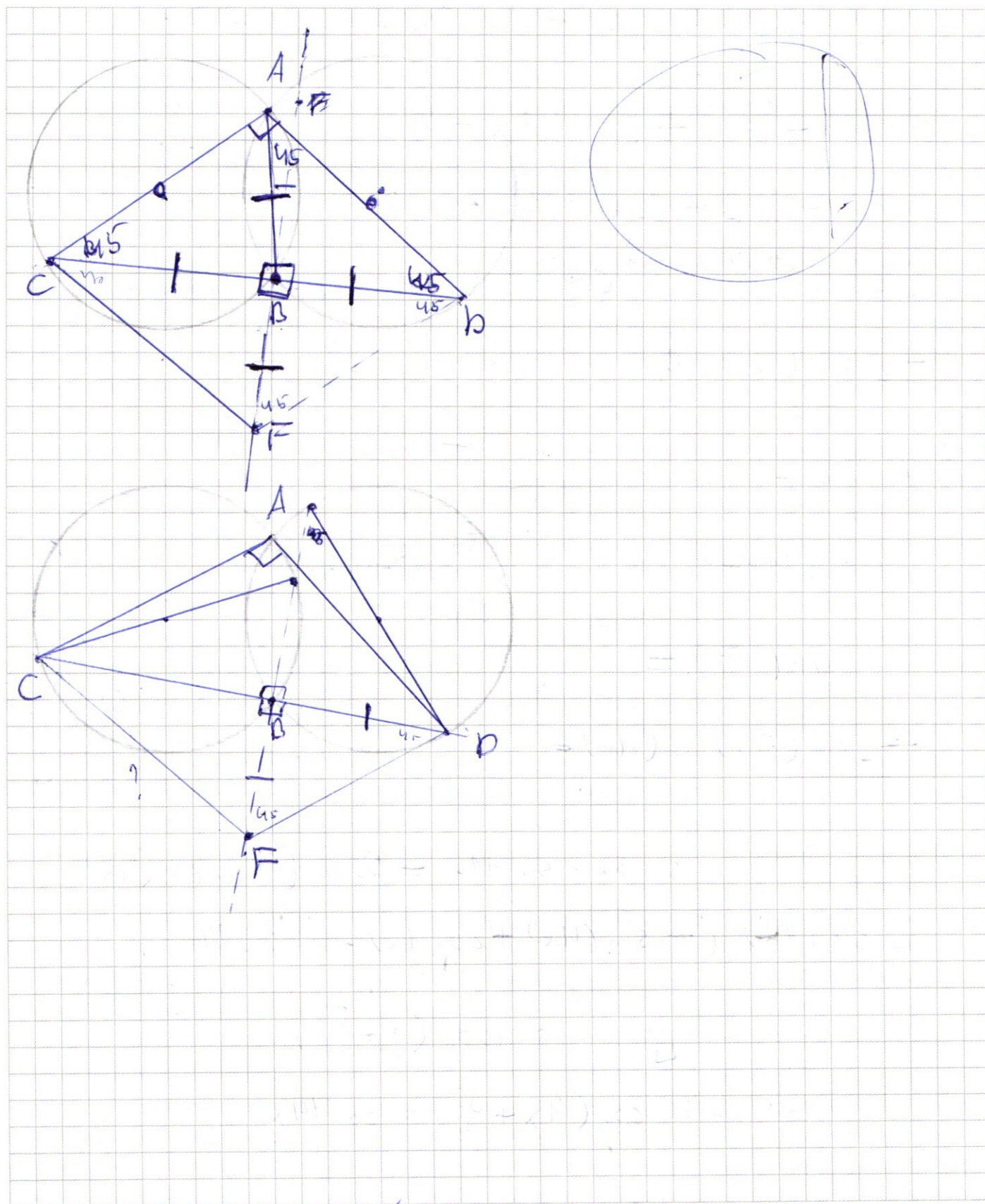




☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

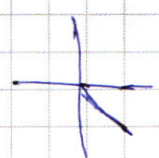
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos(11x + \frac{\sqrt{3}}{4}) - \cos(3x + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \cos 14x$$

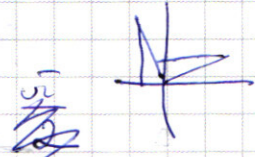
$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})$$



$$-2 \sin(7x + \frac{\sqrt{3}}{4}) \sin(4x) = \cos 14x =$$

$$\sqrt{2} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x}_{\sin} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x}_{\cos} \right) - \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x}_{\sin} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x}_{\cos} \right)$$

$$\sin(11x + \frac{3\sqrt{3}}{4}) + \sin(3x - \frac{\sqrt{3}}{4})$$



$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}) \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

$$2 \sin(7x + \frac{\sqrt{3}}{4}) \cos(4x + \frac{\sqrt{3}}{4}) \quad \cos 2 + \cos$$

$$-2 \sin(7x + \frac{\sqrt{3}}{4}) \sin(4x) = \cos 14x =$$

$$-2 \left(\sin 7x - \cos 11x - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \cos 22 = 2 \cos$$

$$\cos(11x + \frac{\sqrt{3}}{4}) = 2 \cos(\frac{11x - \frac{\sqrt{3}}{4}}{2}) \cos(17x)$$

$$\sin(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\sin(2) - \sin(0) = 2 \sin(\frac{2-0}{2}) \cos(\frac{2+0}{2})$$

$$-2 \sin(7x) \sin(4x) =$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin(7x) \cos(4x)$$

$$2 \sin(7x) (-\sin(4x) + \cos 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\alpha) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\alpha) = \cos(\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$\sqrt{2} \sin 7x \cos(4x + \frac{\sqrt{3}}{4}) = \cos 14x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\sin(7x)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 4x - \sin 4x) = -\sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) \sin 4x$$

$$\sin 7x + \frac{\pi}{4} = (\sin 7x + \cos 7x) \cdot \frac{\pi}{4}$$

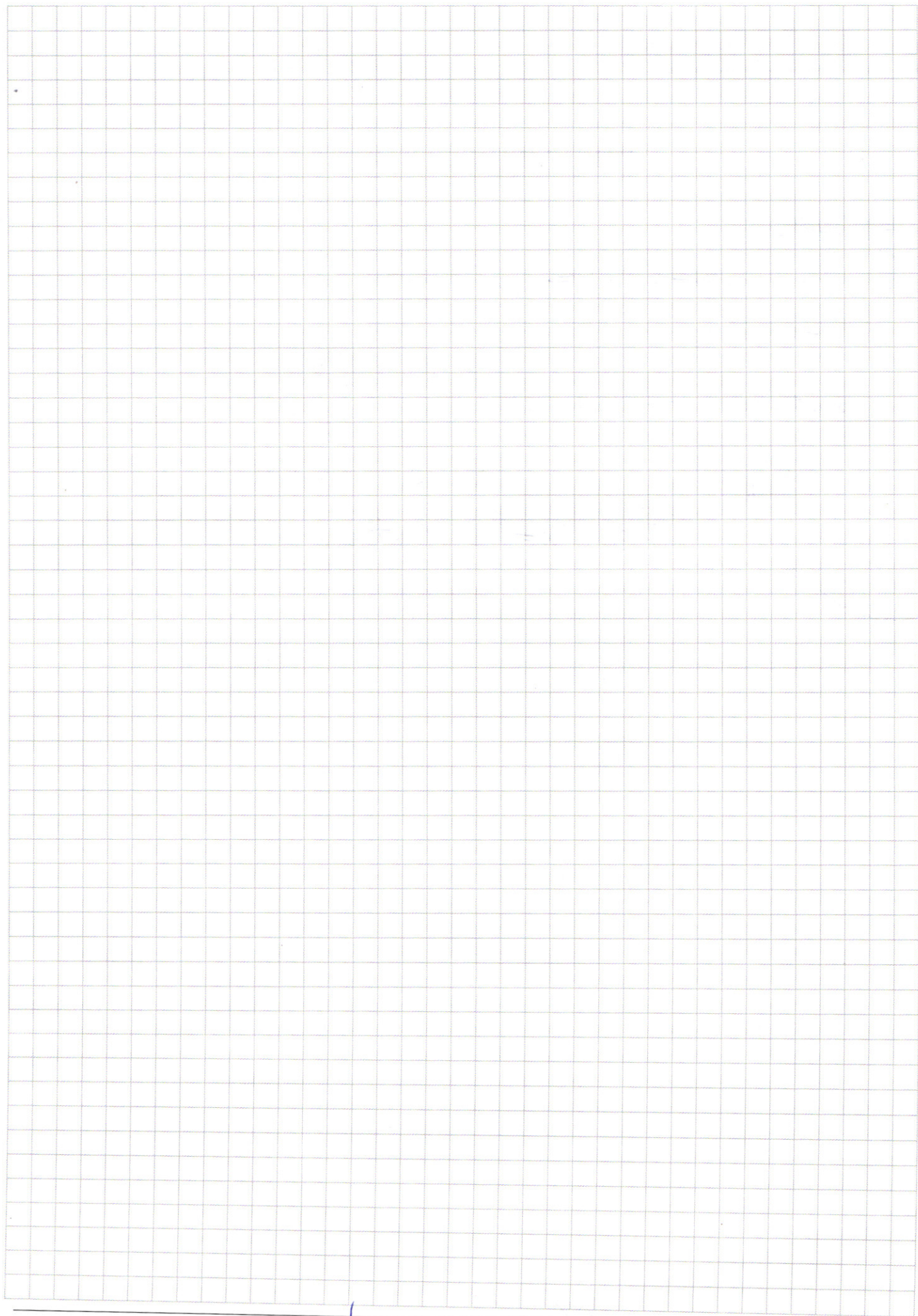
$$\sin 7x \cos 4x = -\cos 7x \sin 4x$$

$$1 - 2\sin^2 7x$$

co

$$\cos 2x = 1 - \cos^2 x - 1$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$



☒ черновик



☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18 \cdot 22 \cdot 17 = 25$$

$$a_1 \dots a_8 \quad a_1 \dots a_8$$

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 675 \mid 5 \\ \underline{65} \\ 135 \end{array} \quad \begin{array}{r} 125 \mid 5 \\ \underline{10} \\ 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8! \\ \underline{3! \cdot 3! \cdot 2!} \\ 8! \end{array}$$

$$= 5 \cdot 675 = 25 \cdot 135 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$a_1 \quad 5^3 \cdot 3^3 \quad \boxed{555333111} - \text{равны числ.}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ \underline{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{555333111} - \text{из этих цифр ском.}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{3!} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{3! \cdot 3! \cdot 2!} \end{array}$$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

№2

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x \right)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$-2 \sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \sin(4x) = \cos 4x$$

$$\alpha = 4x$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$-1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x$$

$$(-\sqrt{2} \sin 7x + \sqrt{2} \cos 7x) \sin 4x = \cos 4x$$

$$\frac{1}{i}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) = \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$11x + \frac{\sqrt{c}}{4} =$$

$$3x + \frac{\sqrt{c}}{4} =$$

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$-2 \sin\left(7x + \frac{\sqrt{c}}{4}\right) \sin(4x) = \cos 4x$$

~~sin 4x~~

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg(xy)}$$

$$x^4 - 2xy - 4x - 3y^2 + 11y = 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\left(y^{\lg x + \lg y}\right)^2 = y^2$$

$$y^{5 \lg x} \cdot x^{-\lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x - 2 \lg y} = x^{\lg x}$$

$$\lg y (3 \lg x - 2 \lg y) = \lg x \cdot \lg x$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = 2 (\lg x + \lg y) \lg y$$

$$3 \lg x \lg y - (\lg x)^2 = 2 (\lg y)^2$$

$$2b^2 - 3ab + a^2 = (2b - a)(b - a)$$

$$\lg x = \lg y \rightarrow \boxed{x = y} \quad \lg y^4 = \lg x \quad y^4 = x$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 11y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 7y^2 + 11y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 11) = 0$$

$$\begin{array}{r} 11 - - - - - 11 + 11 \quad 30 \\ 27 - 18 - 21 + 12 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$(|x-4|)^2 + (|y-3|)^2 = a$$

a

$$|y-x-3| + |y+x-3|$$

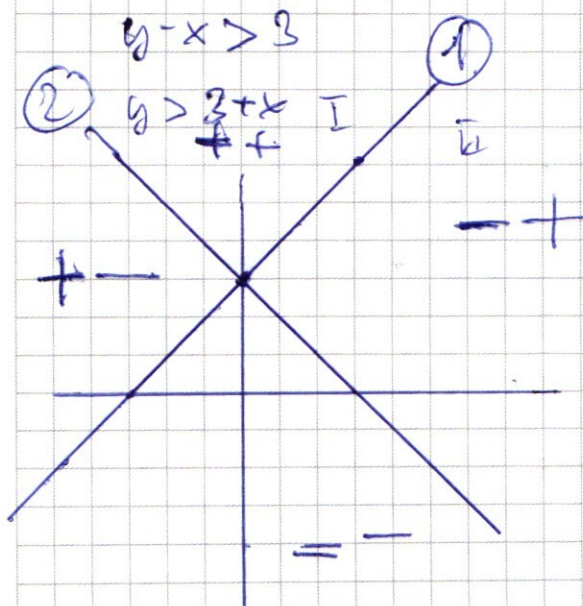
$$y-x > 3$$

радиус $\sqrt{a}$

$$y > 3+x$$

$$y+x > 3$$

$$y > 3-x$$



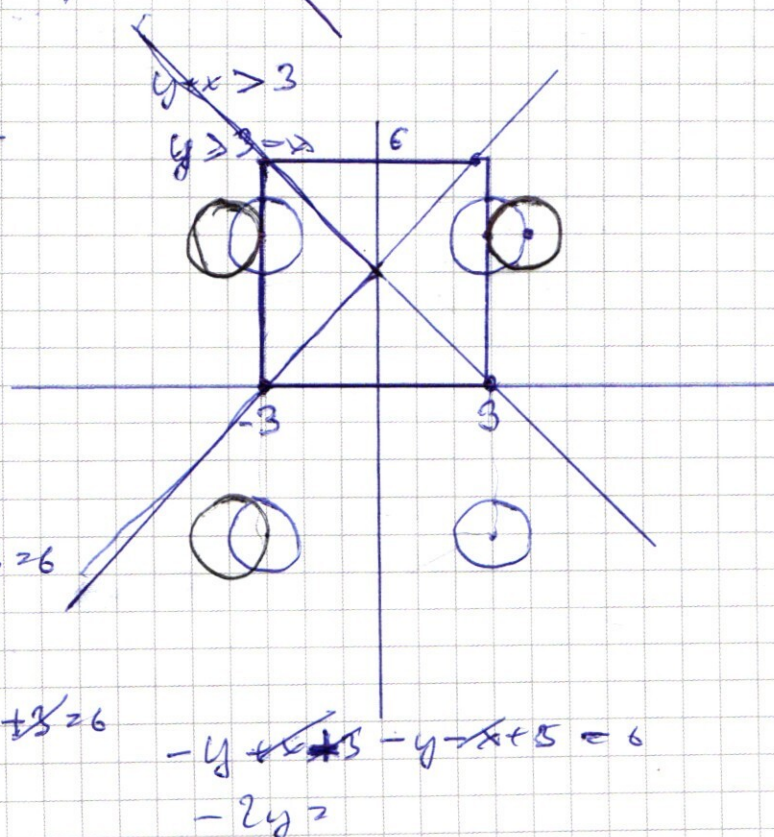
$$+ + |y-x-3| + |y+x-3| = 6$$

$$y = 6$$

$$+ - |y-x-3| - |y+x-3| = 6$$

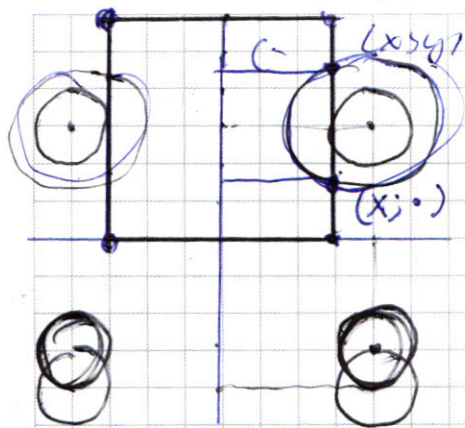
$$-2x = 6$$

$$x = -3$$



$$-y+x+3 - y-x+3 = 6$$

$$-2y = 6$$



$$a > 0$$

$$a \in (0, 1) - 0$$

$$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{B} = 1$$

$$a > 1 \Rightarrow 1$$

$$x \Rightarrow |1-x|$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 125 \\ \times 27 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

y, x -реш

$$-3 > 0 \quad -3$$

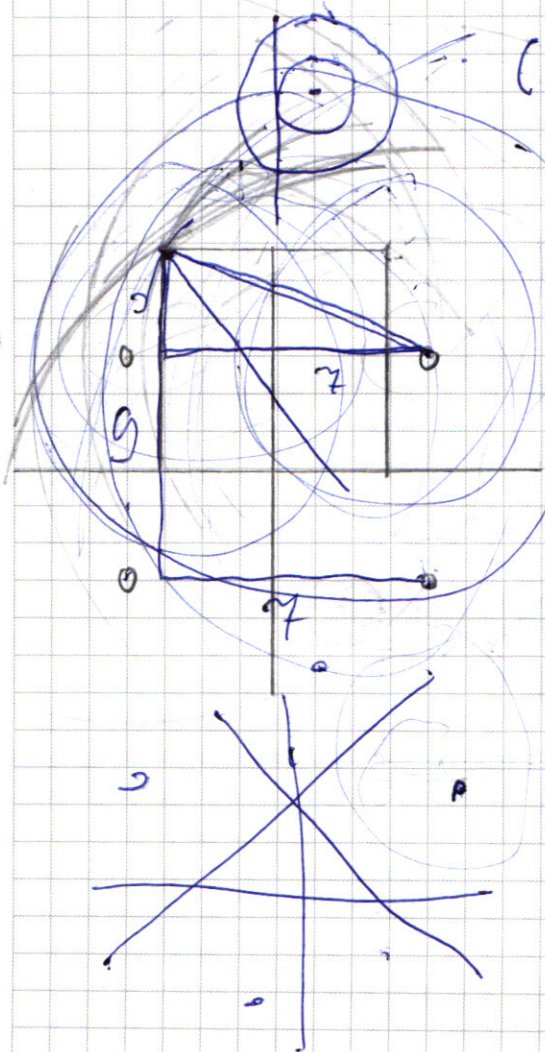
$$-3 > 6$$

$$6 - 3 + 3$$

$$6 - 3 - 3$$

$$\Rightarrow -x > y \text{ - тоже реш}$$

если есть решение $x, y \Rightarrow -x, y$ - тоже реш.



$$(x-4)$$

$$\sqrt{45+9}$$

$$81+45 = 90+42 = 132$$

X

$$a \in (1, \sqrt{5})$$

V



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

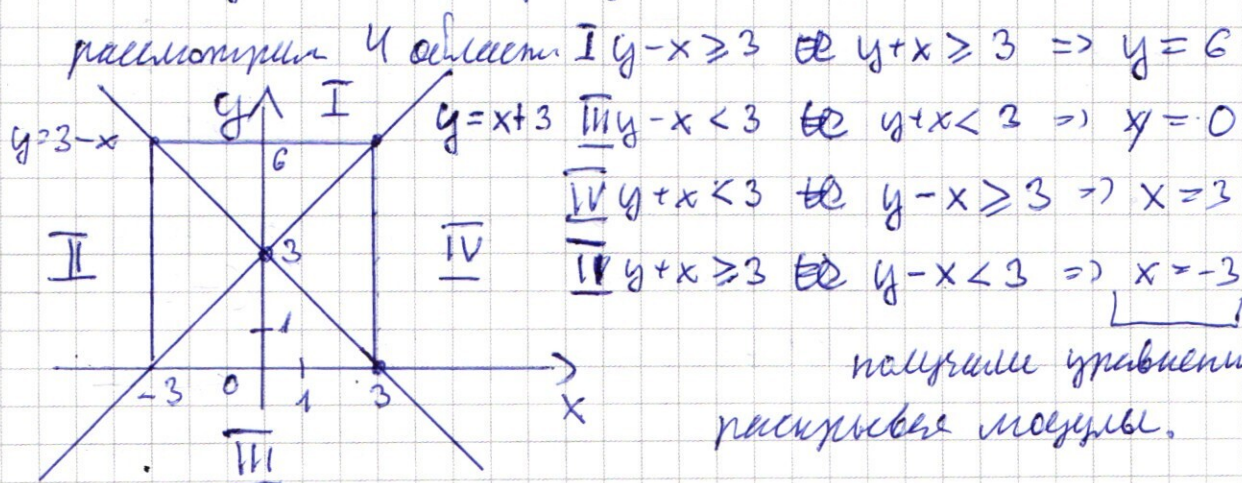
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases} \quad \text{система имеет} \\ \text{2 решения} \Rightarrow \underline{a \geq 0} \text{ и т.д. Ответ}$$

1) первое уравнение — фигура в координатной плоскости



$\Rightarrow$ фигура — прямоугольник.

2) второе уравнение — четыре окружности
радиусов $\sqrt{a}$ при $a > 0$ (при $a < 0$ — пустое мнж.)

$$(|x-4|)^2 + (|y-3|)^2 = a \text{ — одна окружность;}$$

требуемые модули, получили четыре окружности,
которые симметричны относительно осей x ,
оси y , центры и окружности совпадают с границей.



черновик



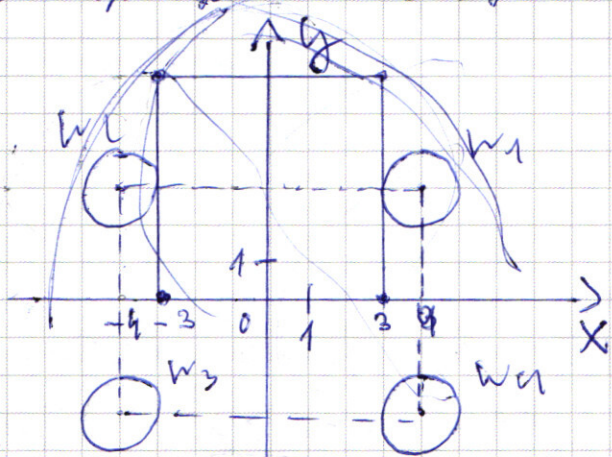
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

3) Нарисовать все в одной координатной плоскости



из рисунка ясно, что:

- $a \in (-\infty; 1)$ - 0 решений
- $a \in \{1\}$ - ровно два решения.

• ~~$a \in (1; \sqrt{58})$~~ - 4 и более решений
 $a \in (\sqrt{58}; \sqrt{130})$ (сначала две окружности
 выше оси пересекаются с прямой.

в 4 точках: при $a \in (1; \sqrt{58}]$; а при $(\sqrt{58}; \sqrt{130})$ за
 две "нижние" окружности пересекаются с прямой (равно-
 ным в четырех точках).

$a \in \{\sqrt{130}\}$ - две окружности касаются (-3) - 4).

пересекаются с прямой

$\sqrt{58} = \sqrt{49+9}$. Иначе
 рас. от центра $W1$ до
 дальней вершины

$a \in (-\infty; 0)$ 0

$a \in [0; 1)$ 0 $W1$ 0 $W2$

$a \in \{1\}$ 2 $W1$ 1 $W2$ 1 $W3$ 1 $W4$ 1

$a \in (1; \sqrt{58}]$ ≥ 4

$a \in (\sqrt{58}; \sqrt{130})$ $= 4 - W$

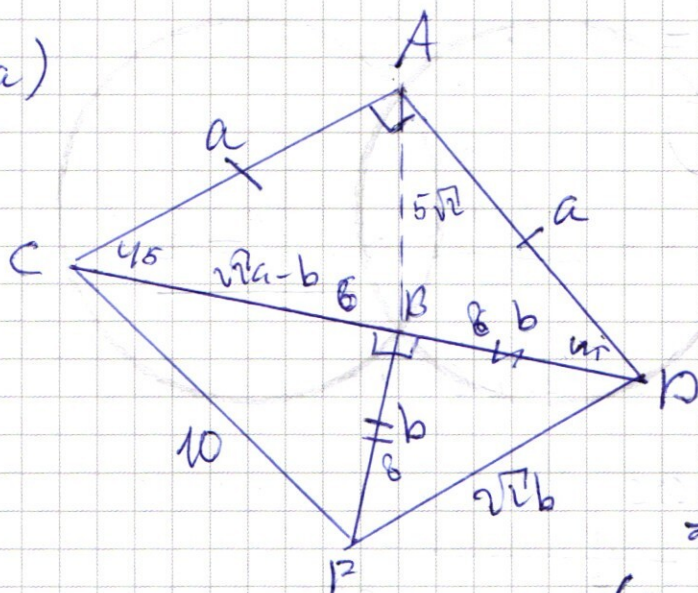
$a \in \{\sqrt{130}\}$ 2

$a \in (\sqrt{130}; +\infty)$ 0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 16

a)



1) $AC = AD$, тогда

$$\angle ADB = \angle ACB$$

открываем и

одну фигуру в равном

(но разным)

открываемся

$$\Rightarrow \angle ADB = \angle ACD = 45^\circ$$

(так $\angle ACD$ - прилежащ.).

2) по теореме синусов в $\triangle ADB$

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R = 10$$

$$\Rightarrow AB = 5\sqrt{2}$$

3) пусть $AD = AC = a \Rightarrow CP = \sqrt{2}a$

$$BD = BP = b \Rightarrow DP = \sqrt{2}b$$

$$\Rightarrow CB = \sqrt{2}a - b$$

$$4) CB^2 + BP^2 = CP^2 \Rightarrow \quad (\text{так } BC = \sqrt{2}a - b)$$

$$2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab = CP^2 \quad (BP = b)$$

5) по теореме косинусов в $\triangle ADB$

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 45^\circ$$

$$50 = a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab$$

$$100 = 2a^2 + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab \Rightarrow CP^2 = 100$$

$$\Rightarrow CP = 10$$

Ответ 10

$$b) S_{ACP} = \frac{a \cdot CP}{2} \cdot \sin(\angle ACP)$$

$$\bullet a^2 + a^2 = (CB^2 + BP^2)^2 = 36 + 64 + 144 = 244$$

$$(BP^2 = CP^2 - BC^2 = 8^2)$$

$$a^2 = \frac{144}{2} \Rightarrow a = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\bullet \sin(\angle ACP) = \sin(45^\circ + \angle BCP) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \angle BCP + \cos \angle BCP)$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

(из $\triangle CBP$ прямоугол.).
(и $BC = 6, BP = 8, CP = 10$)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\Rightarrow S_{ACP} = \frac{6\sqrt{2} \cdot 10}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$$

Ответ 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$1) \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 14x \Leftrightarrow$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin(4x) = \cos 14x$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 4x \left(\sin 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \cos 14x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \cos 14x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0 \\ -\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x \quad (= (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x) \cdot \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x \\ -\sqrt{2} \sin 4x = \sqrt{2} \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = -\cos 7x \\ \sin -4x = \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \end{cases}$$

$$1) \text{ решить } \sin 7x = -\cos 7x \quad (\Rightarrow)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$\Leftrightarrow 7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

2) решить $\sin(-4x) = \cos(7x + \frac{\sqrt{5}}{4})$

$\Leftrightarrow \cos(4x + \frac{\sqrt{5}}{2}) = \cos(7x + \frac{\sqrt{5}}{4})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\sqrt{5}}{2} = 7x + \frac{\sqrt{5}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 4x + \frac{\sqrt{5}}{2} = -7x - \frac{\sqrt{5}}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x = -\frac{\sqrt{5}}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 11x = -\frac{3\sqrt{5}}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\sqrt{5}}{44} + \frac{2\pi h}{11}, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ $\{ \frac{3\sqrt{5}}{28} + \frac{\sqrt{5}n}{7} | n \in \mathbb{Z} \} \cup$

$\cup \{ \frac{\sqrt{5}}{12} + \frac{2\sqrt{5}n}{3} | n \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\frac{3\sqrt{5}}{44} + \frac{2\sqrt{5}n}{11} | n \in \mathbb{Z} \}$

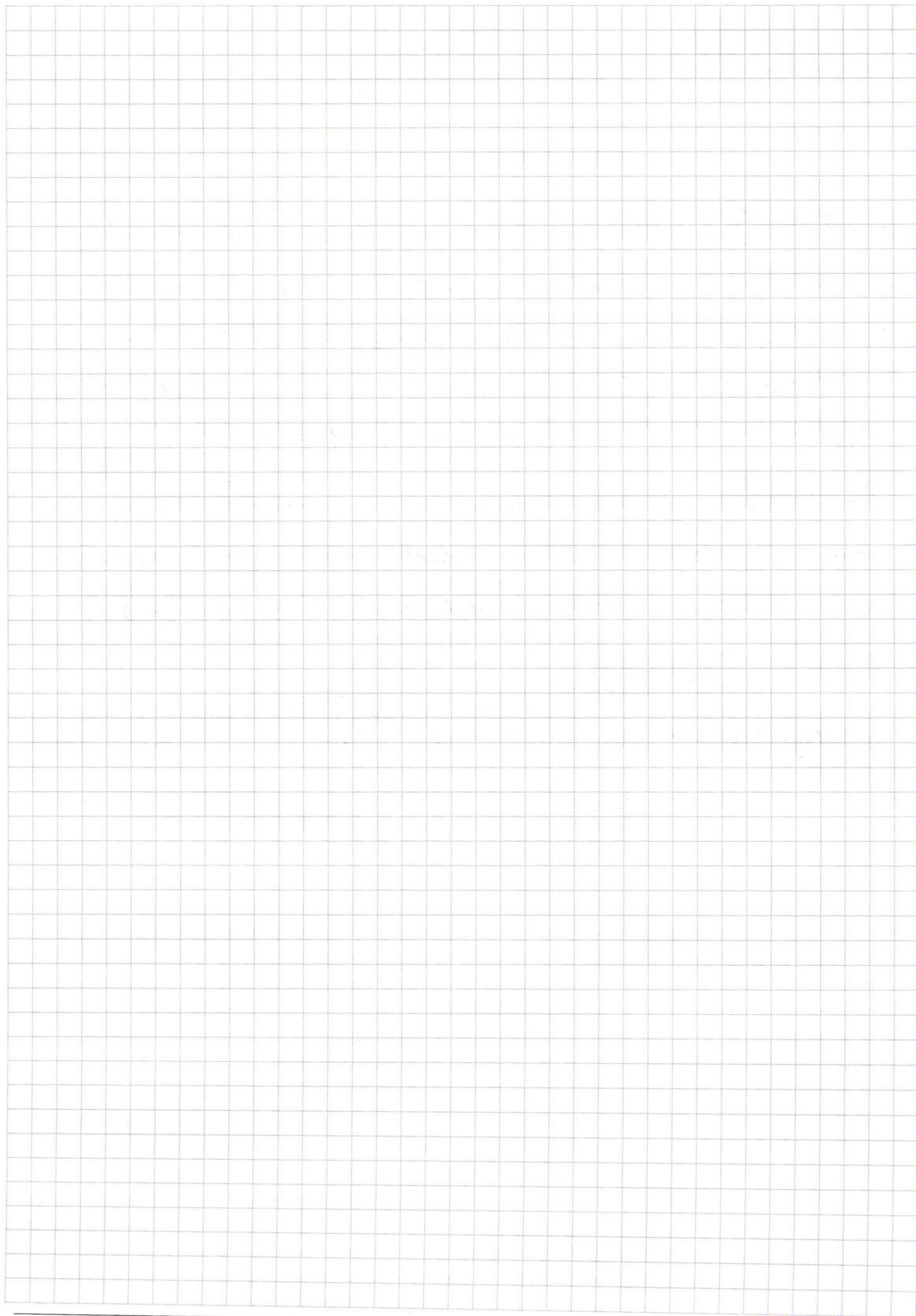
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- $\alpha \in \{120\}$ — ровно 1 пересечение A с w_2 (в зависимости от центра w_2 вершины A). Аналогично для пересечения A с w_1 . (w_1 и w_2 не пересекают BA)
- $\alpha \in (120; +\infty)$ — нет пересечений, все окружность содержится A внутри себя, не пересекаясь с A .

По условию, нужно найти α при котором есть ровно 2 решения. Это эквивалентно двум пересечениям окружностей в плоскости $\Rightarrow \alpha \in \{1, 120\}$

Ответ: $\{1, 120\}$

(см. задачу на странице №7).



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$a_1 \dots a_8$ - восьмизначное число: $a_1 \dots a_8 = 3375$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow a_1, \dots, a_8 \text{ - цифры, значит, чтобы}$$

они как произведение давали результат 3375, то необходимо и достаточно, чтобы ровно три цифры были равны 5, ровно три цифры были равны 3, ровно две цифры были равны 1. Таким числом

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 5 = 10 \cdot 56 = 560$$

Ответ: 560

Задача №5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

- это два уравнения в координатной плоскости

$\Rightarrow$ их пересечение - это решение системы.

1) $|y-x-3| + |y+x-3| = 6$ - график в коор. плоскости рассмотрим 4 области и рассмотрим модули:

$$\text{I } y-x \geq 3 \text{ и } x+y \geq 3 \Rightarrow y=6$$

$$\text{II } y-x < 3 \text{ и } x+y \geq 3 \Rightarrow x=-3$$

$$\text{III } y-x < 3 \text{ и } x+y < 3 \Rightarrow y=0$$

$$\text{IV } y-x \geq 3 \text{ и } x+y < 3 \Rightarrow x=3$$

$\Rightarrow$ найдем его прямоугольник. Назовем его A .

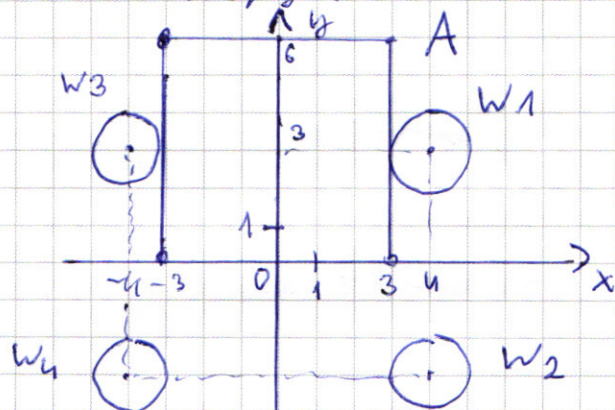
2) $(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a$

- при $a < 0$ - пустое множество
- при $a = 0$ - 4 точки $(4; 3), (4; -3), (-4; 3), (-4; -3)$
- при $a > 0$ - 4 окружности с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами $(4; 3), (4; -3), (-4; 3), (-4; -3)$.

(так три окружности мы нарисовали из окружности $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ отразившим относительно оси x , оси y , центри посре, мы добав. модули).

Назовем окруж. соств. $w_1; w_2; w_3; w_4$.

3) Нарисуем график, задаваемый уравнением в посре. плоскости.



Итак найдем, что при

- $a \in (-\infty; 0)$ - нет решений
- $a \in [0; 1)$ - нет решений (окруж. не пересека с A)
- $a \in [1; 3]$ - A пересека с w_1 1 раз и с w_3 1 раз.

- $a \in (1; \sqrt{58})$ - A пересекает как минимум в 4 точках с w_1 (в 2х), с w_3 (в 2х);

- $\sqrt{58}$ - максимальное расстояние от центра w_1 до дальней вершины A (аналог с w_3) ($\sqrt{58} = \sqrt{45+9}$)

- $a \in (58; 130)$ - w_2 и w_4 пересекаются с A как минимум в 4 точках. ($\sqrt{130}$ - максимальное расстояние от центров w_2 и w_4 до соств. дальней вершин A) ($\sqrt{130} = \sqrt{45+81}$) не ~~тогда~~ w_1 и w_3 уже не пересека с A)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg(xy)} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

1) Допустимые значения x и y : $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

2) рассмотрим первое уравнение системы, перейдем к логарифмам из него, проверим их, подставив в уравнение системы; прологарифмируем обе части

$$\lg\left(\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x}\right) = \lg(y^{2\lg(xy)})$$

$$\Rightarrow \lg x (5\lg y - \lg x) = 2(\lg x + \lg y) \lg y$$

$$\Rightarrow 3\lg x \lg y - (\lg x)^2 = 2(\lg y)^2$$

$$\Rightarrow (2\lg y - \lg x)(\lg y - \lg x) = 0$$

2.1) $\lg y = \lg x \Rightarrow x = y$; подставим во второе уравн:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$-4x^2 + 8x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 - \text{не подходит} \\ x=2 - \text{подходит} \Rightarrow y=2 \end{cases}$$

2.2) $2\lg y - \lg x = 0 \Rightarrow y^2 = x$; подставим во второе уравн:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y(y^3 - 2y^2 - 7y + 12) = 0 \quad |:y>0 \text{ по 1)}$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$(y-3)(y^2+y-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$\begin{cases} y_1 = 3 - \text{по 1)} \\ y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - \text{по 1)} \\ y_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} - \text{не по 1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_1 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_{11} = +9 - \text{по 1)} \\ \text{---} \end{cases}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_2^2 = \frac{1 + 17 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{21} = +\left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right) - \text{по 1)} \\ \text{---} \end{cases}$$

3) В итоге получаем 3 решения: $(2, 2); (9, 3)$

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$\text{Ответ } (2, 2); (9, 3); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$