

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

$x=1, y > 16 + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + (2^{64} - 1)x$

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$x=0: y > 1+3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$y > 2 + 6 \cdot 2^{64}$
 $y \leq 65 + 2^{64}$
 $(2^x + 3 \cdot 2^{65}) \leq 2^x + 65$
 $x=1: y > 2 + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + 2^{64} - 1$
 $2^{64} - 1 \geq 2^{65} + 3$
 $y > 1 + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 70 + 2^{64} - 2$
© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА $\log_x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} x} = \frac{1}{\log_{10} x}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} &= y^2 \log xy & x > 0; xy > 0; \Rightarrow y > 0 \\ & & x > y > 0 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0 \end{cases} & \begin{cases} x^2 - x(2y+4) - 3y^2 + 12y = 0 \\ x^2 - 2x(y+2) + 12y - 3y^2 = 0 \end{cases} \\ x_{1,2} = y+2 \pm \sqrt{(y+2)^2 - (12y-3y^2)} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = y+2-2y+2 = 4-y \\ x = y+2+2y-2 = 3y \end{cases} & \begin{aligned} &= y+2 \pm \sqrt{y^2+4y+4-12y+3y^2} = \\ &= y+2 \pm \sqrt{4y^2-8y+4} = \\ &= y+2 \pm \sqrt{(2y-2)^2} = \\ &= y+2 \pm |2y-2| \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\log(4-y)} = y^2 \log(4-y)y$$

$$\frac{y^{5\log(4-y)}}{(4-y)^{\log(4-y)}} = y^{2\log(4-y)y} \Rightarrow y^{5\log(4-y)} = (4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2\log(4-y)}$$

$$\begin{aligned} y^{5\log(4-y)} &= (4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2\log(4-y)} \cdot y^{2\log y} \\ y^{3\log(4-y)} &= (4-y)^{\log(4-y)} \cdot y^{2\log y} \\ y^{3\log(4-y)} - 2\log y &= (4-y)^{\log(4-y)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\log 3y} = y^{2 \log(3y^2)}$$

$$\left(\frac{1}{3}y^n\right)^{\log 3y} = y^{2 \log 3y} \cdot y^{2 \log y}$$

$$\frac{y^n \log 3y}{3^{\log 3y}} = y^{2 \log 3y} \cdot y^{2 \log y}$$

$$\frac{y^{2 \log 3y}}{3^{\log 3y}} = y^{2 \log y}$$

$$\frac{y^{2 \log y} \cdot y^{2 \log 3}}{3^{\log 3y}} = y^{2 \log y}$$

$$y^{2 \log y} \rightarrow \frac{y^{2 \log 3}}{3^{\log 3y}} = 1$$

$$y^{\log 3} = t \Rightarrow y^2 - 3y = 0$$

$$\uparrow y(y-3) = 0$$

$$\begin{cases} y=0 \\ y=3 \Rightarrow x=y \end{cases}$$

$$y^{2 \log 3} = 3^{\log 3y}$$

$$y^{2 \log 3} = (3y)^{\log 3}$$

$$y^{2 \log 3} = 3^{\log 3} \cdot y^{\log 3}$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$(y-3-x)^2 + (y-3+x)^2 = 36$$

$$(y-3-x)^2 + 2(y-3-x)(y-3+x) + (y-3+x)^2 = 36$$

$$= ((y-3)-x)^2 + 2((y-3)^2 - x^2) + ((y-3)+x)^2 =$$

$$= \frac{(y-3)^2 - 2x(y-3) + x^2}{2} + 2(y-3)^2 - x^2 + \frac{(y-3)^2 + 2x(y-3) + x^2}{2}$$

$$4(y-3)^2 = 36$$

$$12(y-3) = 6 \Rightarrow |y-3| = 3 \Rightarrow \begin{cases} y-3=3 \\ y-3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ y=0 \end{cases}$$

$$|t-x| + |t+x| = 6$$

$$(t-x)^2 + 2|t-x||t+x| + (t+x)^2 = 36$$

$$t^2 - 2tx + x^2 + t^2 + 2tx + x^2 + 2|t-x||t+x| = 36$$

$$2t^2 + 2x^2 + 2|t-x||t+x| = 36$$

$$2t^2 + 2x^2 + 2|t-x||t+x| = 36$$

$$t^2 + x^2 + |t-x||t+x| = 18$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 25} \\ 25 \\ \hline 87 \\ 75 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 135 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 10 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 55533311 \\ 55533111 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3!3!2!} =$$

$$\frac{8!}{3!3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 56 = 560$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x - \sqrt{2} (\cos 11x \cos 3x - \sin 11x \sin 3x) = 0$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha \\ x-y &= \beta \\ x &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y &= \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y$$

$$\begin{array}{r} 332 : \frac{3!}{2!} = 3 \\ 332 \quad 233 \quad 1221 \quad \frac{4!}{2!2!} = 6 \end{array}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} (\cos 14x + \cos 8x) - \frac{1}{2} (\cos 8x - \cos 14x) \right)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 8x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 8x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}; y = \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos(\frac{x-y}{2}) - \cos(\frac{x+y}{2}) = 2 \sin x \sin y$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x =$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x \quad 2 \sin(-4x) \cos 7x$$

$$= -2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (2 \cos^2 7x - 1)$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x - 2 \sqrt{2} \cos^2 7x + 1 = 0$$

$$2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) - 2 \sqrt{2} \cos^2 7x + 1 - \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) (2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)) = 0$$

$$2 \sin 4x + \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = 0$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = \sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \sin 4x + 2 \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sin 4x = -\cos(7x + \frac{\pi}{4}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - 7x - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4} - 7x)$$

$$\sin 4x = \sin(7x - \frac{\pi}{4})$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} k$$

$$4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} n$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|t-x| + |t+x| = 6$$

$$\begin{array}{c} - - - + + + \\ -x \quad +x \end{array} \quad \leftarrow$$

$t > x$

$$1) t-x + t+x = 6$$

$$t=3 \Leftrightarrow y-3=3 \Rightarrow y=6$$

$$\begin{array}{l} y-3 \geq x \\ y-3 \geq y \\ y \geq 7 \end{array}$$

$$(|x|-4)^2 + 9 = a$$

$$|x|^2 - 8|x| + 16 + 9 = a$$

$$|x|^2 - 8|x| + 25 = a$$

$$|x|^2 - 8|x| + 25 - a = 0$$

$$D=0 \Rightarrow 16 - 25 + a = 0$$

$$\Rightarrow a=9 \Rightarrow (|x|-4)^2 = 0 \Rightarrow x=\pm 4$$

$$x=4: |y-7| + |y+1| = 6$$

$$\begin{array}{c} - - - + + \\ -7 \quad 7 \end{array}$$

$$1) y-7+y+1=6$$

$$2y=12 \Rightarrow y=6 \text{ не уст. уст.}$$

$$\Rightarrow a=9 \text{ - не реш.е}$$

$$2) \cancel{x} - \cancel{y} - 2y - 3 < x$$

$$1) y=5 \rightarrow 2|x|=6$$

$$|x|=3 \rightarrow x=\pm 3$$

$$-x+x+x+x=6$$

$$2x=6 \Rightarrow x=3$$

$$1 + (|y|-3) = a \Rightarrow |y|^2 - 6|y| + 10 - a = 0$$

$$|y|^2 - 6|y| + 5 + 1 = a$$

$$9 - (10 - a) = 0 \Rightarrow -1 + a = 0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=\pm 3$$

$$4-y=a$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\log(4-y)} = y^{2\log(y(4-y))}$$

$$\left(\frac{y^5}{a}\right)^{\log a} = y^{2\log ay} \Rightarrow \frac{y^{3\log a}}{a^{\log a}} = \frac{y^{2\log a}}{y^{2\log y}}$$

$$\frac{y^{3\log a}}{a^{\log a}} = y^{2\log y}$$

$$\left(\frac{y^3}{a}\right)^{\log a} = (y^2)^{\log y}$$

$$\log a \log \frac{y^3}{a} = 2\log y \cdot \log y$$

$$\log a (3\log y - \log a) = 2\log^2 y \Rightarrow 3\log a \cdot \log y - \log^2 a = 2\log^2 y$$

$$2\log^2 y + 2\log^2 a - 3\log a \log y = 0$$

$$m^2 - 3ml + 2l^2 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{3l \pm \sqrt{9l^2 - 8l^2}}{2} = \frac{3l \pm l}{2}$$

$$1) m = 2l; 2) m = l$$

$$1) \log(4-y) = 2\log y$$

$$4-y = y^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ не год. } y \text{ а.}$$

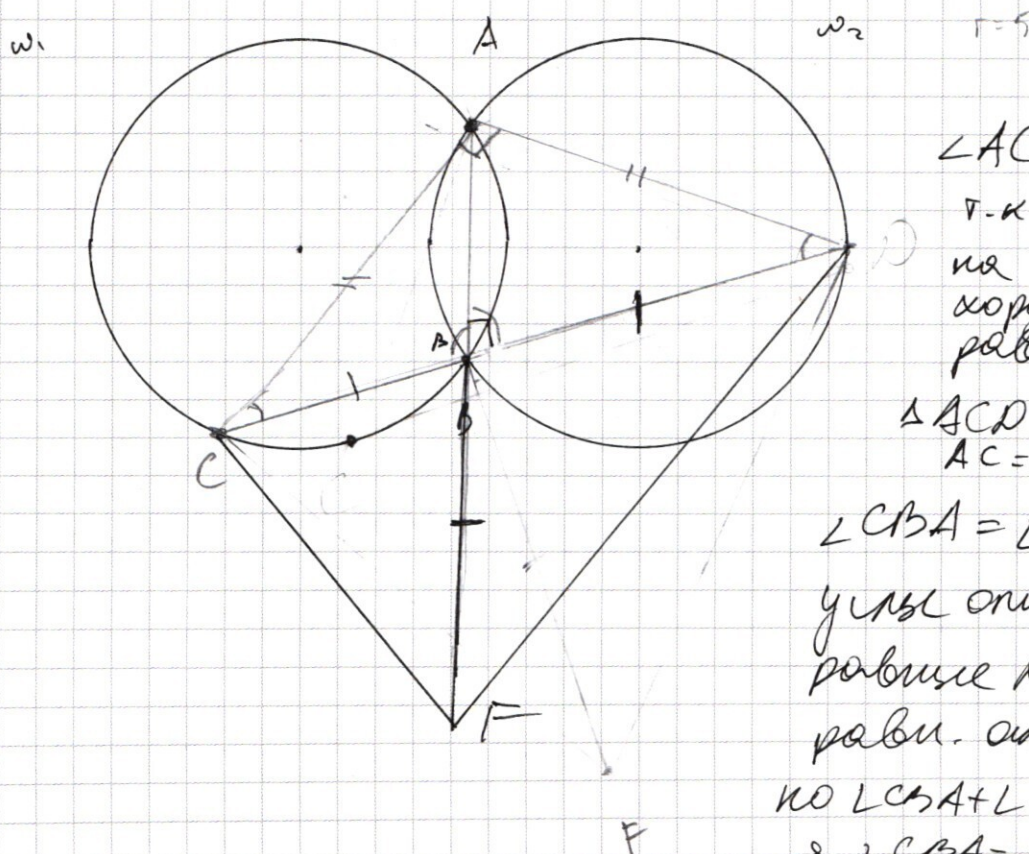
$$2) \log(4-y) = \log y$$

$$4-y = y \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 4-2 = 2$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

n/6



$\angle ACD = \angle ADC$,
т.к. опираются
на равные
хорды окружности
равного радиуса.

$\triangle ACD$ - р/б, $AC = AD$, $\angle CAD = 100^\circ$

$\angle CBA = \angle ABD$ как
углы опирающ. на
равные хорды в
равн. окр-тях.

$$\begin{aligned} \angle CBA + \angle ABD &= 180^\circ \\ \Rightarrow \angle CBA &= \angle ABD = 80^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow B \in AF$. Заметим, что $\Delta AEB = \Delta AFD$ как 1-ки, образованные высотой ~~на~~ на основании $Р/Б$ 1-ки ACD . $\Rightarrow CB = BD = BF$
 B и CFD медиана FB делит ΔCFD на равные себе отрезки $\Rightarrow \Delta CFD$ - прямоугол,
 $\angle F = 90^\circ$. В четырехугольнике $ACFD$ $\angle A = \angle F = 90^\circ$,
 $AF = CD$ (диагонали), $\angle ABD = 90^\circ$ (углы между диагоналями) $\Rightarrow ACFD$ - квадрат

Т.к. $\angle ABC = 80^\circ \Rightarrow AC$ — диаметр.

Но $CF = AC = 25 = 10$. either a) so.

$$\neg \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$x = 0:$$

$$\begin{aligned} y &> 1 + 3 \cdot 2^{65} \\ y &\leq 70 \\ y &\emptyset \end{aligned}$$

$$x = 1:$$

$$\begin{aligned} y &> 2 + 3 \cdot 2^{65} \\ y &\leq 70 + 2^{64} - 1 \\ y &\emptyset \end{aligned}$$

$$x = 2:$$

$$\begin{aligned} y &> 4 + 3 \cdot 2^{65} \\ y &\leq 70 + 2^{65} - 2 = 68 + 2^{65} \\ y &\emptyset \end{aligned}$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \Rightarrow f'(x) = 2^x \ln 2$$

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x \quad g'(x) = 2^{64} - 1 = \text{const}$$

С увеличением x , ф-ция $f(x)$ начнет расти быстрее ф-ции $g(x)$.

$$x = 12:$$

$$\begin{aligned} y &> 2^{12} + 3 \cdot 2^{65} \\ y &\leq 70 + 3 \cdot 2^{65} - 4 \end{aligned}$$

$$70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$x = 2^{64}:$$

$$\cancel{y > 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$X = \begin{cases} y+2 - (2y-2) \\ y+2 + 2y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4-y \\ x = 3y \end{cases}$$

1) $x = 3y$:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y}$$

$$= y^2 \lg(3y^2)$$

$$\frac{y^4 \lg 3y}{3 \lg 3y} = y^{2(\lg 3y + \lg y)} = y^{2 \lg 3y} \cdot y^{2 \lg y}$$

Пограним на $y^{2 \lg 3y} \neq 0$:

$$\frac{y^{2 \lg 3y}}{3 \lg 3y} = y^{2 \lg y} \Leftrightarrow \frac{y^{2 \lg 3} \cdot y^{2 \lg y}}{3 \lg 3y} = y^{2 \lg y}$$

Пограним на $y^{2 \lg y} \neq 0$

$$\frac{y^{2 \lg 3}}{3 \lg 3y} = 1 \Rightarrow y^{2 \lg 3} = 3^{\lg 3y} \Rightarrow y^{2 \lg 3} = (3y)^{\lg 3}$$

$$y^{2 \lg 3} - 3^{\lg 3} \cdot y^{\lg 3} = 0 \quad y^{\lg 3} = t, \quad t > 0$$

$$t^2 - 3^{\lg 3} t = 0 \Rightarrow t(t - 3^{\lg 3}) = 0$$

$$\begin{cases} y^{\lg 3} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ (не год. год.)} \\ y^{\lg 3} = 3^{\lg 3} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 3 = 9 \end{cases}$$

2) $x = 4 - y$:

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)}$$

$$= y^2 \lg(y(4-y))$$

Для удобства пусть $x - y = a$:

$$\left(\frac{y^5}{a}\right)^{\lg a} = y^{2 \lg a y} \Rightarrow \frac{y^{5 \lg a}}{a^{\lg a}} = y^{2 \lg a} \cdot y^{2 \lg y} \quad \left| \frac{1}{y^{2 \lg a}} \right|$$

$$\frac{y^{3 \lg a}}{a^{\lg a}} = y^{2 \lg y} \Rightarrow \left(\frac{y^3}{a}\right)^{\lg a} = y^{2 \lg y}$$

Прологарифмируем по основанию 10:

$$\lg\left(\left(\frac{y^3}{a}\right)^{\lg a}\right) = \lg(y^{2 \lg y}) \Rightarrow \lg a \lg \frac{y^3}{a} = 2 \lg y \cdot \lg y$$

$$\Rightarrow \lg a (\lg y^3 - \lg a) = 2 \lg^2 y \Rightarrow 3 \lg a \lg y - \lg^2 a = 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 a - 3 \lg a \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$m^2 - 3 m l + 2 l^2 = 0$. Однородное уравнение 2-й степени
вещным относительно m :

$$m_{1,2} = \frac{3l \pm \sqrt{9l^2 - 8l^2}}{2} = \frac{3l \pm l}{2}$$

Можно лишнее убрать, т.к. стоит знак $\pm$:

$$m = \begin{bmatrix} 2l \\ l \end{bmatrix} \Rightarrow 1) \lg(x-y) = 2 \lg y \quad 2) \lg(x-y) = \lg y$$

$$x-y = y^2$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{не год.}$$

$$1.2) y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\Rightarrow x = y - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

$$x-y = y$$

$$y = 2 > 0$$

$$x = \frac{3}{2} \quad x-y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ответ: } (3; 3), (2; 2), \left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\underbrace{\cos 11x - \cos 3x}_u - \underbrace{\sin 11x + \sin 3x}_u = \sqrt{2} \cos 4x$$

из $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$
и $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) + 2 \sin 4x \cos 7x + 2 \sin 4x \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} ((\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)) + 2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 7x + \sin 7x = 0 & (1) \\ \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\cos 7x + \sin 7x = 0$

Если $\cos 7x = 0 \Rightarrow \sin 7x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ равенство не выполняется

Если $\cos 7x \neq 0 \Rightarrow 1 + \tan 7x = 0 \Rightarrow 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z}$

(2) $\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x}_{\cos \frac{7x}{2}} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x}_{\sin \frac{7x}{2}} \right) + 2 \sin 4x = 0$$

$$2 \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin 4x = 0$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin 4x = 0 \Rightarrow \sin 4x = -\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 4x = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow 11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \begin{cases} -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7}n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№1

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Таким образом, восьмизначное число имеет
 вер: 1) 55533311 (и все различные перестановки)
 либо 2) 55539111 (и все различные перестановки)

$$1) \text{ Количество перестановок: } \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

$$2) \text{ Количество перестановок: } \frac{8!}{3!3!} = 1120$$

$$\text{Суммарное кол-во: } 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{3x} = y^2 \log y \quad (1) \quad \underline{x > 0, y > 0}$$

$$x^2 - 2xy - 4x + 3y^2 + 12y = 0 \quad (2)$$

$$(2): x^2 - 2x(y+2) + 12y - 3y^2 = 0. \text{ Решим относительно } x$$

$$x_{1,2} = y+2 \pm \sqrt{(y+2)^2 - (12y - 3y^2)} = y+2 \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4} =$$

$$= y+2 \pm \sqrt{(2y-2)^2} = y+2 \pm |2y-2|$$