

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

Всеми цифр в произведении дают 3375.
среди цифр могут быть x единиц, которые
не влияют на значение произведения, а
оставшиеся 8-х цифр в произведении
дают $3^3 \cdot 5^3$. Рассмотрим делители этого
числа. На роль цифр (оставшиеся) могут
pretendовать 3, 5, $3^2=9$. $5^2=25 > 9$ не подходит,
 $3^3=27 > 9$ не подходит. $3 \cdot 5 = 15$ не подходит.
(а степени больше нет смысла рассматривать)
1) число содержит цифру 9. Тогда, чтобы
«добрать» до 3^3 , нужна еще одна тройка,
которая, как мы доказали выше, нигде
больше не входит. Кроме того, число содержит
три пятёрки, т.к. нет других подходящих
(0 быть не может) цифр, делящихся на 5.
Итого: 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1.

оставшиеся
цифры — единицы

т.к. нулей нет и
каждая цифра может

стоять на любом месте, то число способов
в этом случае: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 20 \cdot 56 = 1120$
длинн. т.к.
можем представлять единицы и 5-ки

2) число не содержит 3. Тогда, чтобы "добавить" до 3^3 , оно содержит "три тройки, три пятёрки - уже сказали выше почему, и оставшиеся две цифры единицы".
Способов: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \underbrace{(3, 3, 3, 5, 55, 1, 1)}$

$$= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

Итого способов: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

103

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = (y^{\lg x + \lg y})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y^{\lg x})^5}{x^{\lg x}} = (y^{\lg x + \lg y})^2$$

ОДЗ: $x > 0$
 $xy > 0 \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$$(y^{\lg x})^5 = x^{\lg x} \cdot (y^{\lg x})^2 \cdot (y^{\lg y})^2$$

$y^{\lg x} \neq 0 \Rightarrow$

$$(y^{\lg x})^3 = x^{\lg x} \cdot (y^{\lg y})^2$$

пусть $a = \lg y$
 $b = \lg x$

$y = 10^a$
 $x = 10^b$

$$((10^a)^b)^3 = (10^b)^b \cdot ((10^a)^a)^2$$

$$10^{3ab} = 10^{b^2} \cdot 10^{2a^2} = 10^{2a^2 + b^2}$$

$$3ab = 2a^2 + b^2$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$y = 10^x$ монотонно возрастает
рассмотрим как квадратное относительно b :

$$D = 9a^2 - 4 \cdot 2a^2 = a^2$$

$$b = \frac{3a \pm |a|}{2}$$

$$b = \begin{cases} \frac{3a+a}{2} = 2a \\ \frac{3a-a}{2} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y = \lg y^2 \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

в окз: $\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$ т.к. стр-я монотонная

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 12x = \pi + 8\pi k \\ 44x = 5\pi + 8\pi m \\ 7x = \frac{3\pi}{4} + \pi l \end{cases}$$

$k, m, l \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi m \\ x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi}{7} l \end{cases}$$

$k, m, l \in \mathbb{Z}$

Ответ:

№6 а)

Продлим BF до пересечения с ω_1 в точке K. Т.к. $\angle CBK = 90^\circ$,

то CK — диаметр
 $CK = 10$ ($2r = 2 \cdot 5$)

Заметим, что AD пересекает ω_1 в точке K, т.к.

(опир. на диаметр)
 $\angle CAK = 90^\circ = \angle CAB$, то есть

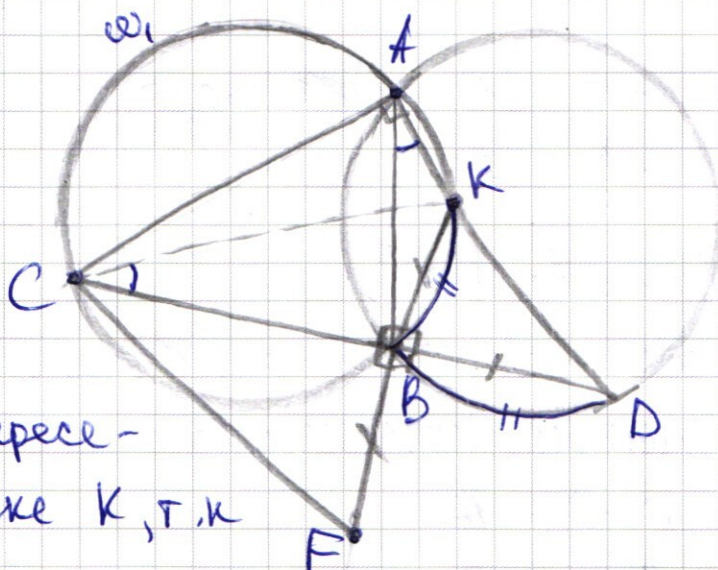
A, K, D лежат на одной прямой
(опир. на одну дугу) $\angle KAB = \angle KCB \Rightarrow \angle KCB = \angle KDB$ (выделено на рисунке)

рисунке)

т.к. окр-ти одинакового

радиуса $\Rightarrow BD = KB \Rightarrow \angle CKB = \angle CBF$

по двум катетам: CB общий, $KB = BD = BF$.
 $\Rightarrow CF = CK = 10$. (диаметр)



№3

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-3y^2 + 12y - 2xy + x^2 - 4x = 0$$

$$3y^2 - 12y + 2xy - x^2 + 4x = 0$$

$$3y^2 + (2x - 12)y - x^2 + 4x = 0$$

рассмотрим как квадратное отн-но y :

$$\Delta = (2x - 12)^2 - 12(4x - x^2) = 4x^2 - 48x + 144 - 48x + 12x^2 = 16x^2 - 96x + 144 = (4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 12 + 12^2 = (4x - 12)^2$$

$$y = \frac{2x - 12 \pm |4x - 12|}{6} = \begin{cases} \frac{2x + 4x - 24}{6} = \frac{6x - 24}{6} = x - 4 \\ \frac{-2x}{6} = -\frac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 4 & (1) \rightarrow y > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ в этом случае} \\ y = -\frac{x}{3} & (2) \end{cases} \quad (ОДЗ)$$

$$(1). 1. \lg x = \lg (x - 4)^2$$

монотонная ф-я $\Rightarrow$ в ОДЗ можно перейти к равенству аргументов

$$x = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 16 = 0$$

$$\Delta = 81 - 64 = 17$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

~~нас~~ нас интересует только $x > 4$.

$$\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \checkmark 4$$

$$9 - \sqrt{17} \checkmark 8$$

$$1 \checkmark \sqrt{17}$$

$$1 < \sqrt{17}$$

$\leftarrow$ не подходит

$$\frac{9 + \sqrt{17}}{2} \checkmark 4$$

$$9 + \sqrt{17} \checkmark 8$$

$$9 + \sqrt{17} > 8 \Rightarrow \text{этот } x \text{ подходит}$$

$$x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$(y = x - 4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) ~~$y = \frac{x}{3}$~~ $x = -3y$ (1).2 $\lg x = \lg(x-4)$ [NB]
 $x = x-4$
 $0 \neq -4$ противоречие.

(2) ~~$y = -\frac{x}{3}$~~

$x = -3y$ этот случай невозможен, т.к.
 ~~$\lg(-3y) = \lg y^2$~~ в ОДЗ $x, y > 0$, а тут
 x и y разных знаков
($x, y \neq 0$).

Ответ: $x = \frac{9+\sqrt{17}}{2}$; $y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

268)

$$BF = \sqrt{100 - 64} = 6$$

$$AH = x = AK$$

$$(\angle AKB = 45^\circ)$$

$$\Rightarrow LK = \sqrt{2}x$$

Применение теоремы
косинусов:

$$x \cdot 8\sqrt{2} = x \cdot \sqrt{2}$$

$$LD^2 = x^2 + (x + 8\sqrt{2})^2$$

$$100 = 2x^2 + 16\sqrt{2}x + 128$$

$$x^2 + 8\sqrt{2}x - 14 = 0$$

$$D = 64 \cdot 2 - 40 - 16 = 128 - 40 - 16 = 48$$

$$x = \frac{-8\sqrt{2} \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{-2\sqrt{2} \pm \sqrt{14\sqrt{2}}}{2}$$

$$D = 72 + 4 \cdot 14 = 72 + 40 + 16 = 128$$

$$x = \frac{-6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}}{2}$$

$$x > 0 \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$KL = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Найдём $\angle LKC$ по т. косинусов:

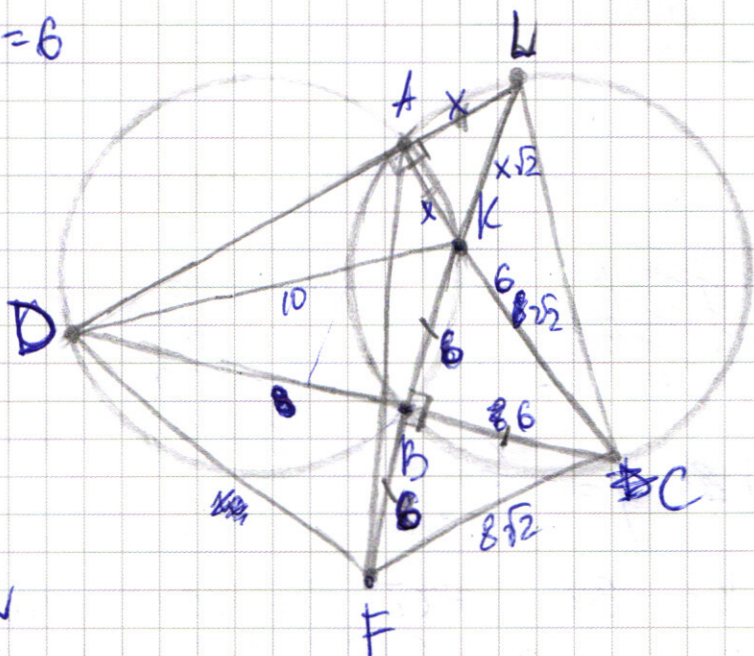
$$100 = 4 + 72 - 4 \cdot 6\sqrt{2} \cos \angle K$$

$$24 = -24\sqrt{2} \cos \angle K$$

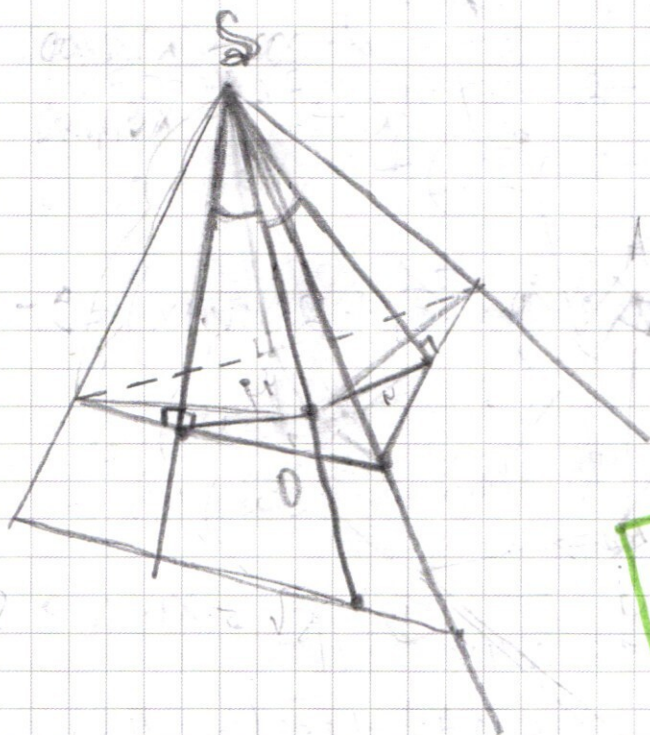
$$\cos \angle K = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle K = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ$$

$$AF \text{ найдём по т. косинусов: } AF^2 = 2 + 12^2 - 4\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$$

$$CA = 9a^2 - 8a^2 = a^2$$

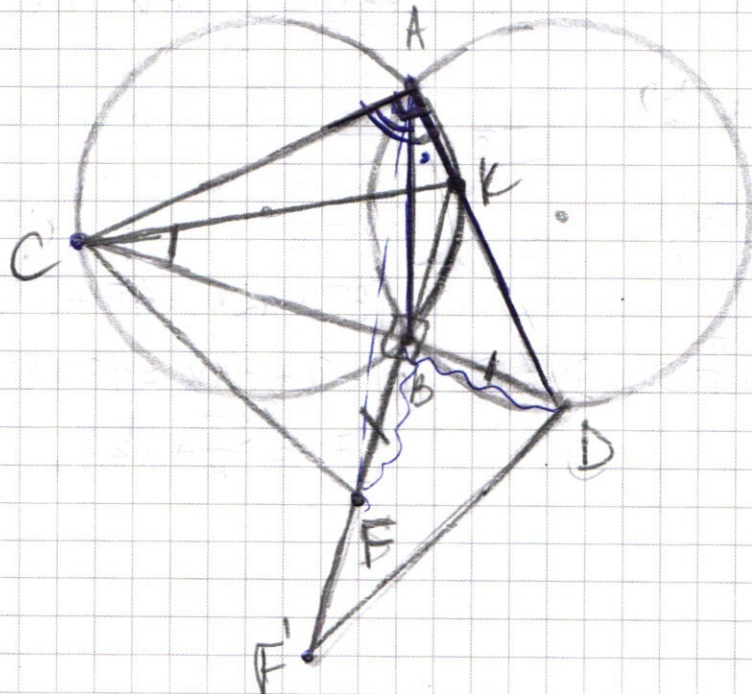
$$\lg y = a \quad y = 10^a$$

$$\lg x = b \quad x = 10^b$$

$$\left((10^a)^{b/3} \right)^2$$

$$= (10^b)^b \cdot (10^{a^2})^2$$

$$(10^{3ab})^2 = 10^{6ab} = 10^{b^2} \cdot 10^{2a^2}$$



А, К, D
на окружности
прямой

12.

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = 2 \sin(-4x) \cdot \cos 7x =$$

$$= -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\sqrt{2} \cos 14x = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$\sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x) +$$

$$+ 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) ((\cos 7x - \sin 7x) + \sqrt{2} + 2 \sin 4x) = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) = -2 \sin 4x \quad (2)$$

$$(2) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x = -\sin 4x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x = -\sin 4x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$\sin 4x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right)$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) = 0$$

$$2 \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 3x}{2} \cdot \cos \frac{-\frac{\pi}{4} + 11x}{2} = 0$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3x}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{11x}{2} \right) = 0$$

$$(1) \quad \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 7x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 7x = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{8} + \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{8} + \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{8} + \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\pi + 12x = 4\pi + 8\pi k \\ -\pi + 44x = 4\pi + 8\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi + 12x = 4\pi + 8\pi k \\ -\pi + 44x = 4\pi + 8\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi + 12x = 4\pi + 8\pi k \\ -\pi + 44x = 4\pi + 8\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi + 12x = 4\pi + 8\pi k \\ -\pi + 44x = 4\pi + 8\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi + 12x = 4\pi + 8\pi k \\ -\pi + 44x = 4\pi + 8\pi m \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- начнем увеличивать радиус окр-тей
- I. нет решений, когда окружности ещё не касаются сторон квадрата (на рисунке отмечено I).
- II. $a = 1$ две окр-ти касаются в одной точке центра. 2 решения. $\Rightarrow a = 1$ подходит.
- III. увеличиваем a до касания с прямой $y = 0$ по 4 решения, т.к. две окр-ти пересекают в двух точках
- IV. в случае касания $y = 0$ $a = 3$ ~~нет~~ также 4 решения.
- V. увеличивая a до случая касания с $x = 0$ все равно получаем по 2 решения, т.к. каждая окр-ть все равно пересекает в двух точках (точки A и B), например.
- VI. увеличивая a после касания будем получать по 2 решения до тех пор, пока не получим случай VII.
- VII. каждая окр-ть пересекает квадрат в точках $(0; 0)$ и $(0; 6)$.
- $$a = DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$
- $\Rightarrow a = 25$. подходит
- VIII. увеличивая a видно, что решений нет. (не пересекает квадрат). Ответ. при $a = 1$; $a = 25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$144 - 48x + 4x^2 + 12x^2 - 48x =$$

$$= 16x^2 - 96x + 144 =$$

$$= (4x)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 12x + 12^2 = (4x - 12)^2$$

$$D = (4x - 12)^2$$

$$y = \frac{12 - 2x \pm (4x - 12)}{-6} =$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{-6} = -\frac{x}{3} \\ \frac{24 - 6x}{-6} = -\frac{24}{6} + x = -4 + x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} -\frac{x}{3} \\ x - 4 \end{cases}$$

✓ OKB

$$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$x = -3y$$

$$\left(\frac{-x^5}{x \cdot 3^5} \right) \lg x = \left(-\frac{x}{3} \right)^2 \lg x \left(-\frac{x}{3} \right)$$

$$\left(-\frac{x^4}{3^5} \right) \lg x = \left(-\frac{x}{3} \right) \lg \left(-\frac{x^2}{3} \right)^2$$

$$\left(\frac{y^5}{-3y} \right) \lg(-3y) = (y^2)^2 \lg(-3y^2)$$

$$\left(-\frac{y^4}{3} \right) \lg(-3y) =$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = (y \lg x + \lg y)^2 =$$

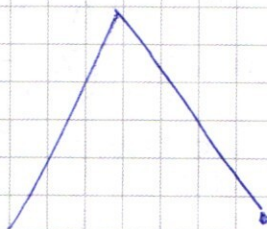
$$= (y \lg x \cdot y \lg y)^2$$

$$\cancel{\lg x} = \cancel{x \lg x}$$

$$(y \lg x)^5 = x \lg x (y \lg x)^2 (y \lg y)^2$$

$$1) \cancel{\lg x} = \cancel{x \lg x}$$

$$(y \lg x)^3 = x \lg x (y \lg y)^2$$



№5

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases} \text{ ясно, что } a \geq 0$$

построим график (1).

I. $\begin{cases} y-x-3 \geq 0 \\ y+x-3 \geq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases} \quad \text{II.} \quad \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$2y-6=6 \quad x-y+3+y-3+x=6$$

$$2y=12 \quad 2x=6$$

$$y=6 \quad x=3$$

III. $\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \end{cases}$

$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$-2x=6$$

$$x=-3$$

IV. $\begin{cases} y \leq x+3 \\ y < -x-3 \end{cases}$

$$x-y+3-y+3-x=6$$

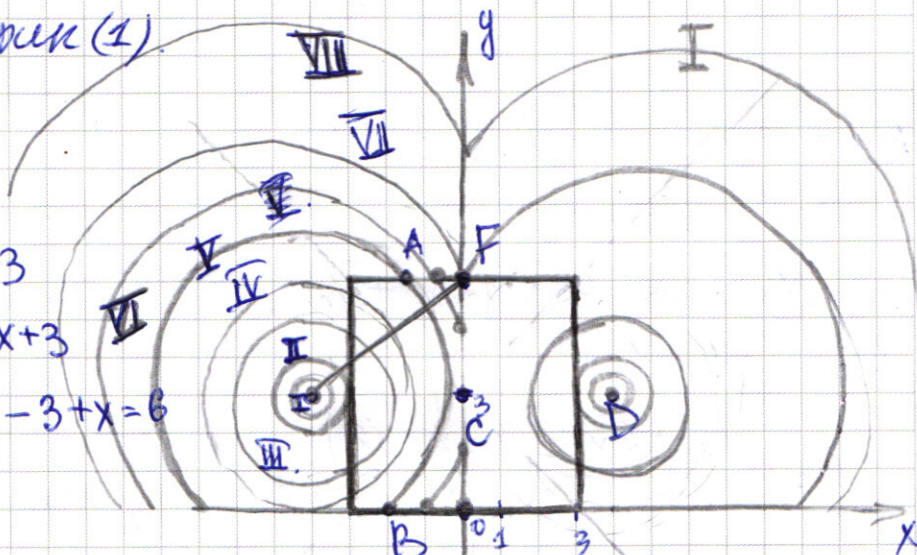
$$-2y=0$$

$$y=0$$

это квадрат.

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x+4)^2 + (y-3)^2 = a$
(-4, 3)

4) $x < 0, y < 0 \quad (x+4)^2 + (y+3)^2 = a$
(-4, -3)



II. построим эскиз (2)

1) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x-4)^2 + (y-3)^2 = a$
это окр-ть с радиусом $\sqrt{a}$.

(случай $a=0$ нас не интересует, т.к. в этом случае у (2) будет не более 160 решений)

окр-ть с центром (4, 3) (или часть окружности, если $\sqrt{a} > 3$)

2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad (x-4)^2 + (y+3)^2 = a$
центр (4, -3)

по сути эти случаи нас не интересуют, т.к. они расположены ниже $y \geq 0$, а квадрат - выше.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 125} \\ 25 \overline{) 135} \\ 87 \\ -75 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$135 \cdot 25$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 10 \overline{) 27} \\ 35 \end{array}$$

$$27 \cdot 5^3$$

$$3^3 \cdot 5^3 = a$$

$$\begin{array}{r} 125 \overline{) 87} \\ 27 \overline{) 895} \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

приоритет могут 5

1 единица.

3 потерни

5² уже не может войти.

$$5,5,5, \dots$$

$$93111$$

$$3,3,3, 9,3$$

$$\sin \alpha - \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x =$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x +$$

$$+ 2 \sin (-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin(4x) (\sin 7x + \cos 7x) =$$

$$= \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$8 \cdot 7 = 4 \cdot 2 \cdot 7 =$$

$$= 28 \cdot 2 = 56$$

$$\begin{array}{r} + 56 \\ 20 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\lg 1000 = \lg 10 + \lg 100 =$$

$$= 14$$

$$\cos 11x - \sin 11x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 11x - \sin$$

sin

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = -\cos$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 11x - \sin 11x) = \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right)$$



$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 3x - \cos 3x) = - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x \right) =$$

$$= - \left(\cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -1$$

$$-2 \sin \frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \sin \frac{8x}{2} = \cos 14x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sin 4x = \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos \left(\frac{14x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \frac{11x}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \\ \left(\frac{y}{x} \right)^2 \lg x = y^2 \lg xy \neq y (\lg x + \lg y)^2 \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} \lg x = y^2 \lg xy \neq y (\lg x + \lg y)^2$$

$$x^2 - x(2y + 4) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$\begin{aligned} -3y^2 + y(12 - 2x) + x^2 - 4x &= 0 \\ D &= (12 - 2x)^2 + 12(x^2 - 4x) \\ &= 4y^2 + 12y^2 + 16y - 48y + 16 = \\ &= 16y^2 - 36y + 16 = \\ &= 4(4y^2 - 9y + 4) \end{aligned}$$