

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Система может иметь два решения, если окружности 1 и 2 касаются сторон $СД$ и $АВ$ соотв., в таком случае 2 других окружн. не будут иметь общих точек с квадратом. В данном случае радиус окружностей $= 1$, $\sqrt{a} = 1$, $a = 1$

При увеличении радиусов окружн., у квадрата с этими окружн. будет > 2 пересеч., до того момента когда окр. 3 и 4 пройдут через точки B и C соотв., т.к. окр. 1 и 2 не будут иметь т. пересеч. с квадратом. В данном случае радиус окр. $= \sqrt{7^2 + 9^2}$, $\sqrt{a} = \sqrt{130}$, $a = 130$.
Ответ: $a = 1$, $a = 130$.

N1 abcdefgh

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 3375 = 3^3 \cdot 5^3$$

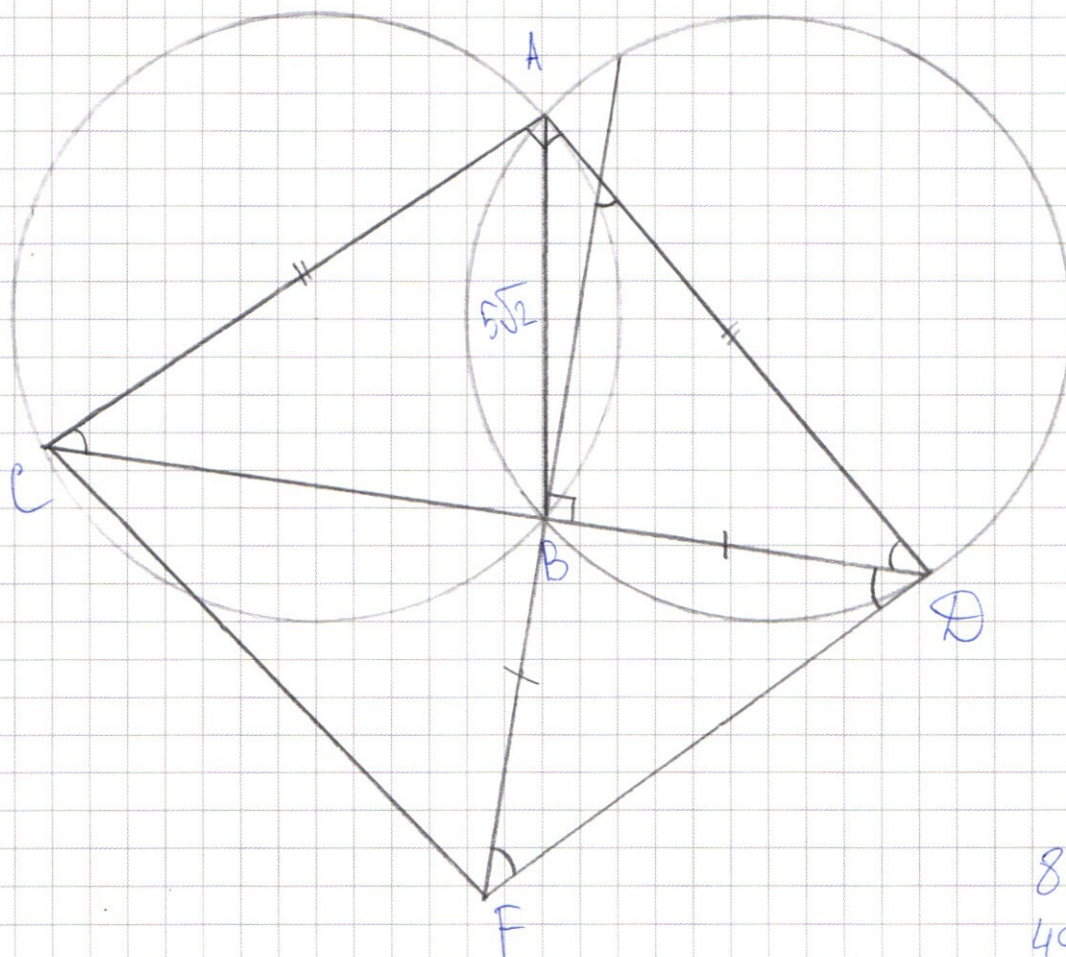
Если ни одна из цифр не содержит 3 или 5 во 2 или 3 степени, то способов выбрать расположение для цифры, содержащей в своём разложении прост. множ. $5^1 = C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$, т.к. у нас есть 3 пятёрки; аналогично, кол-во

способов выбрать цифру, содержащую $3^1 = C_8^3 = 56$; т.к. мы выбираем независимо, то общ. кол-во случаев $= 56 \cdot 56 = 3136$,

Если ^{только} одна цифра содержит 3^2 и ни одна другая — 5^2 или 5^3 ,
то кол-во способов выбрать расклад. для $3^2 = 8$, тогда для
оставш. $3^1 = 7$ способов, значит кол-во способов для выбора
 $3^4 = 8 \cdot 7 = 56$, а для пятёрки — $C_8^3 = 56$, общее кол-во
способов = 3136 , аналогично для случая, когда одна цифра
содержит 5^2 и ни одна другая — 3^2 или 3^3

Если одна цифра содержит 3^3 , то ^{кол-во} способов её выбрать = 8

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

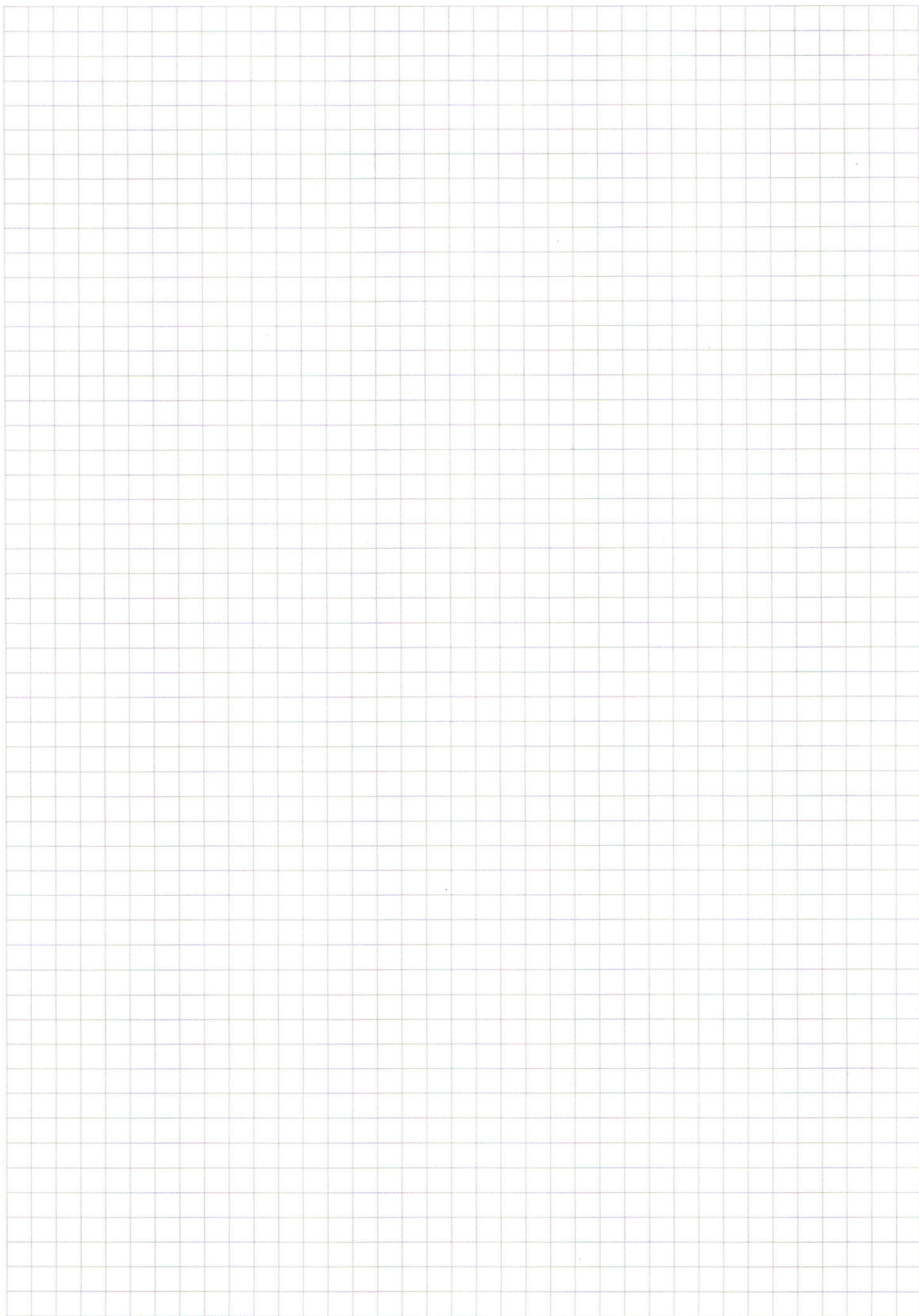


$$3^3 \cdot 5^3 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h$$

~~9/~~ $5^3 = 8$ числовое

$$C_8 = \frac{8.76}{6} = 56$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 49 \\ \hline 130 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $x = 4 - y$:
 $\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg(4-y) \cdot y}$, прологарифмируем обе части ур-я
 по основанию 10, получим:

$$\lg(4-y) \cdot \lg\left(\frac{y^5}{4-y}\right) = 2\lg(4-y) \cdot y \cdot \lg y,$$

$$\lg(4-y) \cdot (5\lg y - \lg(4-y)) = 2\lg y (\lg(4-y) + \lg y), \quad \lg y = t, \lg(4-y) = s;$$

$$s(5t - s) = 2t(s + t),$$

$$5ts - s^2 = 2ts + 2t^2,$$

$$2t^2 + s^2 - 3ts = 0,$$

$$3t^2 - t^2 + s^2 - 3ts = 0,$$

$$3t(t-s) - (t^2 - s^2) = 0,$$

$$3t(t-s) - (t-s)(t+s) = 0,$$

$$(t-s)(3t - t - s) = 0,$$

$$(t-s)(2t-s) = 0,$$

$$\begin{cases} t = s, \\ 2t = s; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y), \\ 2\lg y = \lg(4-y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4-y, \\ \lg y^2 = \lg(4-y); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ y^2 = 4-y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2, \\ y^2 + y - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \Rightarrow x = 2 \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ — не удовл. } \textcircled{D3} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = 4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

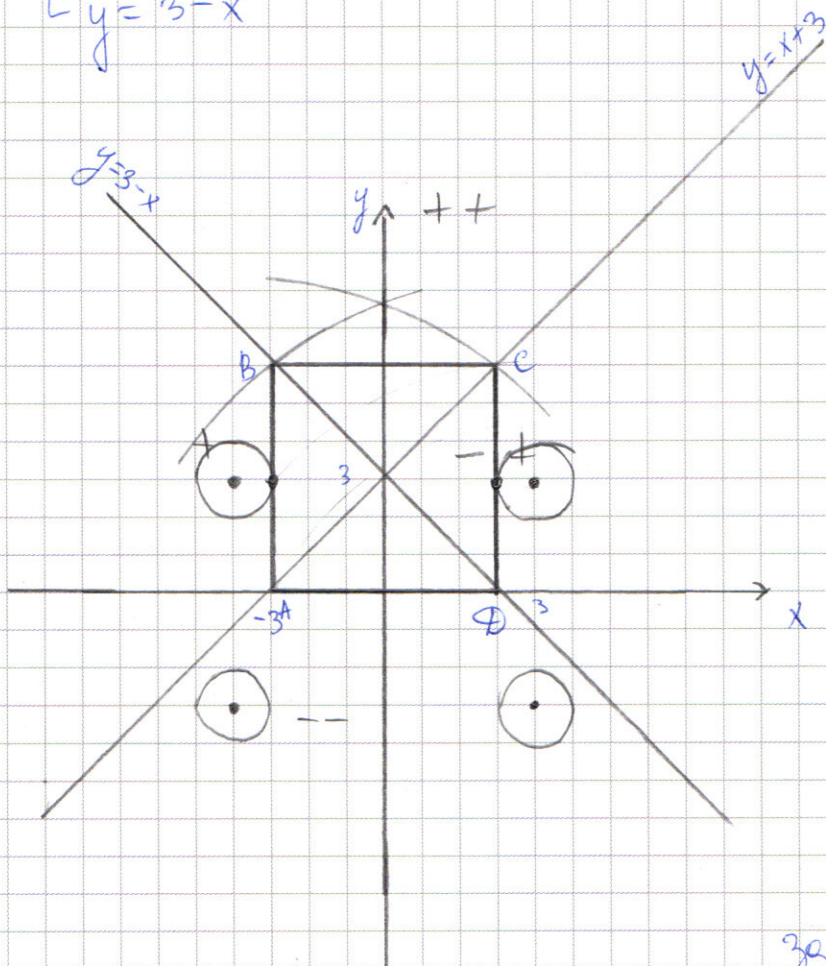
Ответ: $(9; 3); (2; 2); \left(4 - \frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ ((x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a, \end{cases}$$

$a = 2$ решения

Подмодульн. выраж. 1-го ур-я равны нулю:

$$\begin{cases} y = x+3 \\ y = 3-x \end{cases}$$



$$1) \quad y-3-x+y-3+x=6$$

$$y=6$$

$$2) \quad y+3+x-y+3-x=6$$

$$y=0$$

$$3) \quad y-3-x-y+3-x=6$$

$$x=-3$$

$$4) \quad -y+3+x-y+3+x=6$$

$$x=3$$

Значит, 1-е ур-е задает квадрат с центром в т. $(0;0)$, сторонами,

параллельн. осям коорд. и равными 6.

Второе ур-е задает 4 окружности:

1. С центром в $(4;3)$ и радиусом $\sqrt{2}$
2. С центром в $(-4;3)$ и радиусом $\sqrt{2}$
3. С центром в $(4;-3)$ и радиусом $\sqrt{2}$
4. С центром в $(-4;-3)$ и радиусом $\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{16}{3}\right)^{\lg 2} = 2^{\lg 16}$$

$$\lg 3y \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = 2 \lg 3y^2 \cdot \lg y$$

$$(\lg 3 + \lg y)(4 \lg y - \lg 3) = 2(\lg 3 + 2 \lg y) \cdot \lg y \quad \lg y = t \quad \lg 3 = s$$

$$(s+t)(4t-s) = 2(s+2t) \cdot t$$

$$4ts - s^2 + 4t^2 - ts = (2s + 4t) \cdot t$$

$$4t^2 - s^2 + 3ts = 2ts + 4t^2$$

$$ts = s^2$$

$$t = s$$

$$\lg y = \lg 3$$

$$y = 3, \quad x = 9$$

$$x = 4 - y$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^2 \lg(4-y) \cdot y$$

$$\lg(4-y) \cdot (\lg y^5 - \lg(4-y)) = 2(\lg(4-y) + \lg y) \cdot \lg y \quad \lg y = u, \quad \lg(4-y) = v$$

$$v \cdot (5u - v) = 2(v + u) \cdot u$$

$$3u(u-v) - (u-v)(u+v) = 0$$

$$(u-v)(3u - (u+v)) = 0$$

$$(u-v)(2u-v) = 0$$

$$5uv - v^2 = 2uv + 2u^2$$

$$2u^2 + v^2 - 3uv = 0$$

$$3u^2 - u^2 + v^2 - 3uv = 0$$

$$u^2(2 - 3u(u-v)) - (u^2 - v^2) = 0$$

$$\begin{cases} -u = v \\ 2u = v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) \\ 2 \lg y = \lg(4-y) \end{cases}$$

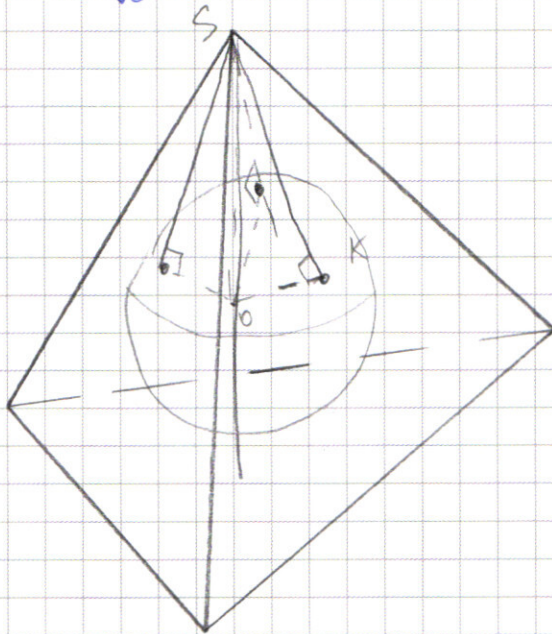
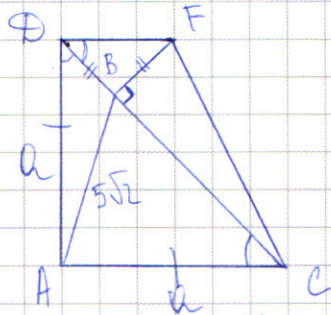
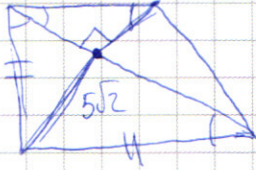
$$y = 4 - y \rightarrow y = 2 \quad x = 2$$

$$\begin{aligned} y^2 &= 4 - y \\ y^2 + y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

N1 $5^3 \cdot 3^3 = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h$

2 единицы

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$



56
56
336
280
3136

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

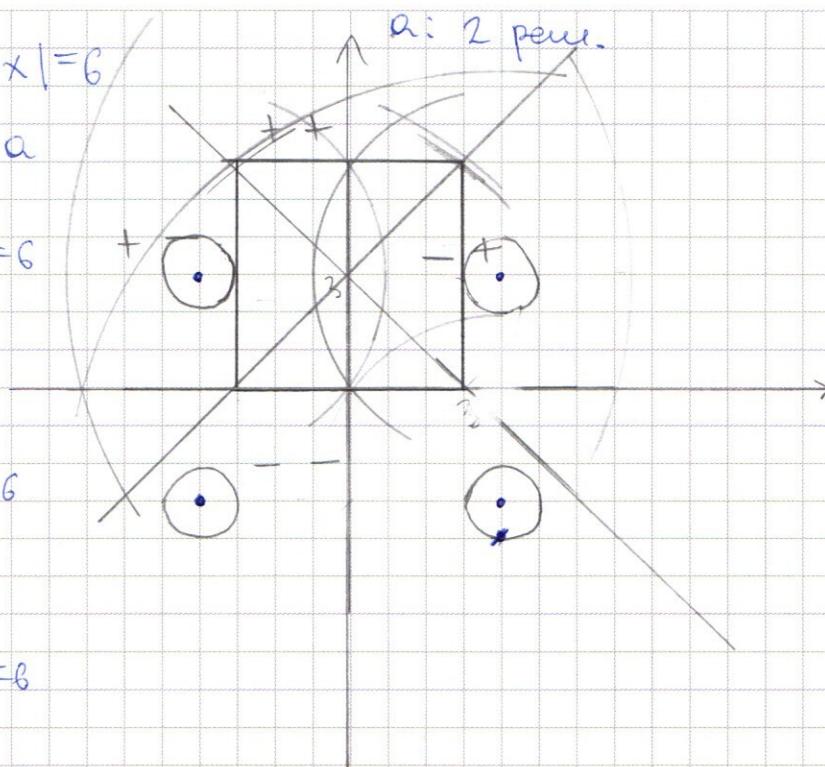
1) $++$ $y-3-x + y-3+x = 6$
 $2y-6=6$
 $y=6$

2) $--$ $-y+3+x - y+3+x = 6$
 $-2y+6=6$

3) $+-$ $y-3-x - y+3-x = 6$
 $-2x=6$
 $x=-3$

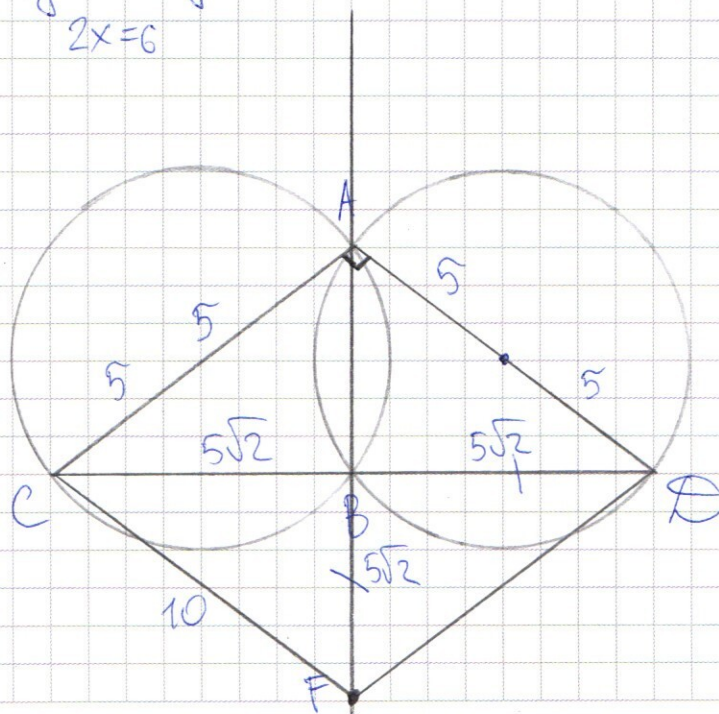
4) $-+$ $x=3$

$-y+3+x + y-3+x = 6$
 $2x=6$



$R=1$ $a=1$
 $R=\sqrt{82}$ $a=82$

N6



~~$R=5$~~
 ~~$CF=10$~~
 ~~$BC=6$~~
 ~~$S_{ACF}=?$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $3375 = 5^3 \cdot 3^3$

$abcde fgh \quad a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 5^3 \cdot 3^3$

3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

N2 $\cos 14x - \cos 3x - (\sin 14x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$

$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 7x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x$

$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$

$(\sin 7x + \cos 7x) \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0$

$\sin 7x + \cos 7x = 0 \quad | : \cos 7x \neq 0$

$\tan 7x = -1$

$\sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + 2 \sin 4x = 0$

$\tan 7x = -1$

$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$

$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} = 0$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

$\sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0$

$\cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi n}{3}$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}$

$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi n$

$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{44} - \frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi n}{11}$

- Ответ

$$N3 \quad \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$(x-2)^2 - 4 - 2xy - (3y^2 - 12y) = 0$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

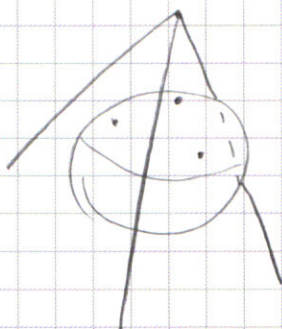
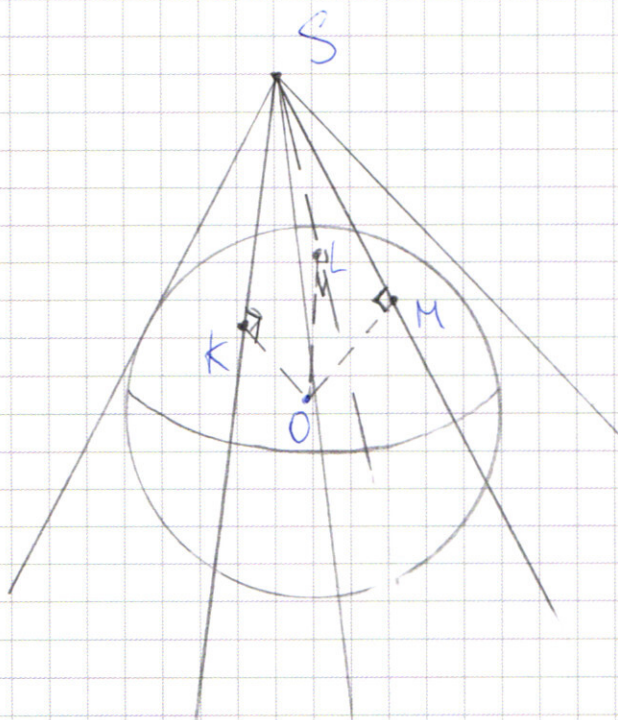
$$(x-y)^2 - (2y-3)^2 + 9 - 4x = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 - 2xy - //$$

$$\begin{aligned} -4y^2 + 12y &= -(4y^2 - 12y) = \\ &= -((2y-3)^2 - 9) \end{aligned}$$

N4

∠KSO



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x,$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x),$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x),$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x),$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0,$$

$$\begin{cases} \sin 7x + \cos 7x = 0, \quad | : \cos 7x \neq 0, \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x + 1 = 0, \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) + 2 \sin 4x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 7x = -1, \\ 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + 2 \sin 4x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ 2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) = 0, \\ \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} \right) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}; \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}; \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}; -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}; k \in \mathbb{Z}.$

$$N3 \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

$$OD3: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Преобразуем 2-е ур-е системы:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0,$$

$$x^2 - x(2y+4) - (3y^2 - 12y) = 0,$$

$$D = (2y+4)^2 + 4 \cdot (3y^2 - 12y) = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = (4y-4)^2$$

$$x = \frac{2y+4 \pm (4y-4)}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2y+4+4y-4}{2} = 3y \\ x = \frac{2y+4-4y+4}{2} = 4-y \end{cases}$$

1) $x = 3y$:

$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg 3y} = y^2 \lg 3y^2$, Логарифмируем обе части ур-я по основанию 10, получим:

$$\lg 3y \cdot \lg\left(\frac{y^4}{3}\right) = 2 \lg 3y^2 \cdot \lg y,$$

$$(\lg 3 + \lg y) \cdot (4 \lg y - \lg 3) = 2(\lg 3 + 2 \lg y) \cdot \lg y, \quad \lg y = u, \lg 3 = v,$$

$$(v+u) \cdot (4u-v) = 2(v+2u) \cdot u,$$

$$4uv - v^2 + 4u^2 - uv = 2uv + 4u^2,$$

$$3uv - v^2 = 2uv,$$

$$uv = v^2 \quad | : v \neq 0,$$

$$u = v,$$

$$\lg y = \lg 3,$$

$$y = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 3 = 9$$