

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$\begin{array}{r} 337.5 \\ -250 \\ \hline 87.5 \\ -87.5 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$337.5 = 125 \cdot 2.7 = 5^3 \cdot 3$$~~

$$\begin{aligned} \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x &= \sqrt{2} \cos 7x \\ \sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \sin(11x - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2} \cos 7x \\ \sin(3x - \frac{\pi}{4}) - \sin(11x - \frac{\pi}{4}) &= \cos 7x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cancel{2 \cos 8x \sin 4x} \\
 & \cancel{2 \cos 4x \sin 4x} \\
 & \cos\left(\frac{3\sqrt{c}}{4} - 3x\right) - \cos\left(\frac{3\sqrt{c}}{4} - 3x\right) = \cos 34x \\
 & -2 \sin\left(7x - \frac{\sqrt{c}}{4}\right) \sin 4x = \cos 34x \\
 & -2 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\sqrt{c}}{4}\right) = -\sin\left(34x - \frac{\sqrt{c}}{2}\right) \\
 & 2 \sin 4x \cos\left(7x - \frac{\sqrt{c}}{4}\right) = 2 \sin\left(7x - \frac{\sqrt{c}}{4}\right) \cos\left(7x - \frac{\sqrt{c}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos\left(7x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) &= 0 \\ 7x - \frac{\sqrt{2}}{4} &= \sqrt{k} + \frac{\sqrt{2}}{4}; k \in \mathbb{Z} \\ 7x &= \sqrt{k} + \frac{3\sqrt{2}}{4}; k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\sqrt{k}}{7} + \frac{3\sqrt{2}}{28}; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

2) $\cos(7x - \frac{\pi}{h}) \neq 0$, разделим на $\cos(7x - \frac{\pi}{h})$ обе части уравнения:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \\ \Rightarrow 7x - \left(7x - \frac{\pi}{4}\right) &= 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow 3x + \frac{\pi}{4} &= 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{4} &= 2\pi n + \pi; \\ \Rightarrow x &= -\frac{2\pi n}{7} + \frac{\pi}{12} \\ x &= \frac{2\pi n}{7} + \frac{5\pi}{12} \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Отв: $x = \frac{5k}{7} + \frac{3\sqrt{11}}{28}$; $x = -\frac{25k}{3} + \frac{\sqrt{11}}{32}$; $x = \frac{25k}{11} + \frac{5\sqrt{11}}{44}$ ($k \in \mathbb{Z}$)
Задана 3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 32y = 0 \end{cases}; \text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 32y = 0$$

$$x^2 - x(2y+4) + 32y - 3y^2 = 0$$

$$D = (2y+4)^2 - 4(32y - 3y^2) = (4y^2 + 16y + 16) - (128y - 12y^2) = 16y^2 - 112y + 16 = (4y-4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{(2y+4) \pm (4y-4)}{2} = (y+2) \pm (2y-2)$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

1) $x = 3y$
Подставим $x = 3y$ в первое уравнение системы:

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right)^{\lg(3y)} = y^{2\lg(3y^2)}$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right)^{\lg(3y)} = y^{2\lg(3y^2)}$$

$$\lg\left(\frac{y^4}{3}\right) \cdot \lg(3y) = \lg y \cdot 2\lg(3y^2)$$

$$30 = 30$$

$$(4\lg y - \lg 3)(\lg 3 + \lg y) = 2\lg y(2\lg y + \lg 3)$$

$$4\lg y \cdot \lg 3 - \lg^2 3 + 4\lg^2 y - \lg 3 \cdot \lg y = 4\lg^2 y + 2\lg 3 \cdot \lg y$$

$$4\lg 3 \cdot \lg y - \lg^2 3 = 0$$

$$\lg 3(\lg y - \lg 3) = 0$$

решение в косинусе б ОДЗ, $\lg y = \lg 3$; $y = 3$; $x = 3 \cdot y = 3 \cdot 3 = 9$. Проверено, это

2) $x = 4-y$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)y)}$$

$$\left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{\lg(4-y)} = y^{2\lg((4-y)y)}$$

$$\lg y \cdot 2\lg((4-y)y)$$

$$30 = 30$$

$$\lg(4-y) \cdot (5\lg y - \lg(4-y)) = 2\lg y(\lg(4-y) + \lg y)$$

$$5\lg(4-y)\lg y - \lg^2(4-y) = 2\lg y\lg(4-y) + 2\lg^2 y$$

$$3\lg(4-y)\lg y - \lg^2(4-y) = 2\lg^2 y$$

$$2\lg^2 y - 3\lg(4-y)\lg y + \lg^2(4-y) = 0$$

$$(\lg(4-y) - \lg y)(\lg(4-y) - 2\lg y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg(4-y) = \lg y \Rightarrow 4-y = y \Leftrightarrow y = 2; x = 4-y = 4-2 = 2$$

$$\lg(4-y) = 2\lg y \Rightarrow 4-y = y^2; y^2 + y - 4 = 0; \Delta = 17; y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$D = 1 \pm 4 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}; \text{т.к. по ОДЗ } y > 0$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = 4-y = 4 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} = \frac{8 + 1 - \sqrt{17}}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

x так же входит в ОДЗ.

$$\text{Ответ: } (9; 3); (2; 2); \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$$

Задача 5.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$1) y-3-x \geq 0; y-3+x \geq 0; \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}; \text{тогда уравнение}$$

имеет вид $2y-6=6; y=6$; то есть граница отрезка $y \geq 6$; тогда $y \geq x+3$ и $y \geq 3-x$ выполняются, тогда $\begin{cases} x \leq 3 \\ 0 \geq 3-x \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3 \\ 3-x \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} x \leq 3 \\ x-3 \geq 0 \end{cases};$

то есть решение не существует.

$$2) \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

уравнение равносильно $(y-3-x) - (y-3+x) = -2x = 6; \text{т.е. } x = -3.$

тогда $\begin{cases} y \geq (-3)+3 \\ y \leq 3-(-3) \end{cases}; \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}; \text{т.е. уравнение задаёт отрезок с концами в } (-3; 0) \text{ и } (-3; 6)$

Рассмотрим первое уравнение системы:

$$1) \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}; \text{В таком случае уравнение равносильно } (y-3-x) + (y-3+x) = 2y-6=6; 2y=12; y=6.$$

$$2) \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases}; \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

тогда $\begin{cases} 6 \leq x+3 \\ 6 \leq 3-x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ 3 \geq -x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ -3 \leq x \end{cases}; \begin{cases} x \geq 3 \\ x \geq -3 \end{cases}; \text{т.е. уравнение задаёт отрезок с концами в } (3; 6) \text{ и } (-3; 6).$

Таким образом, в этом случае уравнение задаёт отрезок с концами в $(-3; 0)$ и $(-3; 6)$ и $(3; 6)$ и $(-3; 6)$.

$$2) \begin{cases} y-3-x \geq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases} ; \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

В этот случай 3-ое уравнение системы равносильно $(y-3-x) - (y-3+x) = 6$
 $y-3-x-y+3-x=6$
 $-2x=6 ; x=-3$

Подставим $x=-3$:

$$\begin{cases} y \geq -3+3 \\ y \leq 3-(-3) \end{cases} ; \begin{cases} y \geq 0 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

Таким образом, в этот случай первое уравнение системы задаёт отрезок с концами в $(-3;0)$ и $(-3;6)$

$$3) \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \geq 3-x \end{cases}$$

В таком случае первое уравнение системы равносильно $-(y-3-x) + (y-3+x) = 6$

$$-y+3+x+y-3+x=6$$

$$2x=6 ; x=3$$

$$\begin{cases} y \leq 3+3 \\ y \geq 3-3 \end{cases} ; \begin{cases} y \leq 6 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Значит, в этот случай 3-ое уравнение системы задаёт отрезок с концами в $(3;0)$ и $(3;6)$

$$4) \begin{cases} y-3-x \leq 0 \\ y-3+x \leq 0 \end{cases} ; \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq 3-x \end{cases}$$

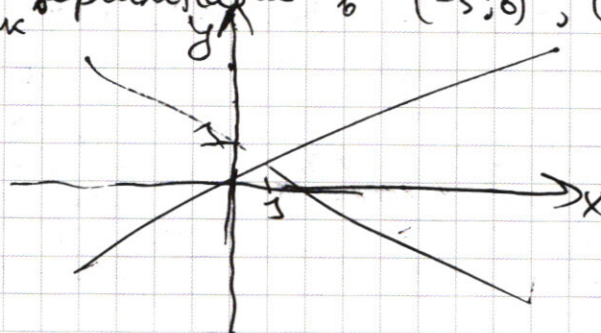
В таком случае первое уравнение системы равносильно $-(y-3-x) - (y-3+x) = 6$; $-y+6 = -6$; $-y \leq -12$; $y \geq 12$

Подставим $y=12$:

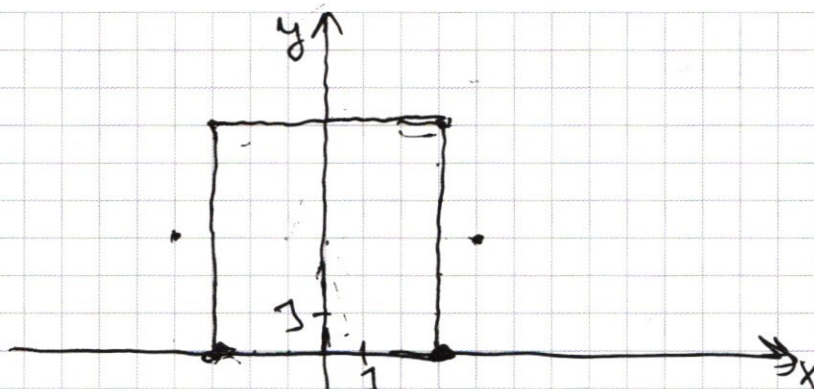
$$\begin{cases} 0 \leq x+3 \\ 0 \leq 3-x \end{cases} ; \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} ; \begin{cases} x \geq -3 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

Таким образом, в этот случай первое уравнение задаёт отрезок с концами в $(-3;0)$ и $(3;0)$.

Таким образом, первое уравнение системы задаёт вершины в $(-3;0)$; $(3;0)$; $(3;6)$; $(-3;6)$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Как мы видим, для всех решений первого уравнения $y \geq 0$. Значит, если в системе второе уравнение записать на ~~x~~ $(|x-4|)^2 + (y-3)^2 = a$, то-то решений не получится.

$$(|x-4|)^2 + (y-3)^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \\ x \leq 6 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a \end{cases}$$

Как мы видим, если $(x; y)$ — решение системы, то и $(-x; y)$ — решение. Таким образом, два решения система имеет тогда и только тогда, когда при $x \geq 0$ есть одно решение и нет решений при $x \leq 0$, либо когда есть два решения и оба при $x \geq 0$.
При $a \in (0; 16]$ уравнение $(|x-4|)^2 + (y-3)^2 = a$ задаёт две окр-ти с центрами в $(4; 3)$ и $(-4; 3)$ и радиусами $\sqrt{a}$. Тогда 2 решения при $x \geq 0$ возникает только тогда, когда обе окр-ти касаются близи к их централь стороне, то есть радиусе окружностей равен расстоянию от $(4; 3)$ до стороны квадрата с координатами в $(3; 0)$ и $(3; 6)$, т.е. $\sqrt{a} = 3$; $a = 9$.

Случай, когда есть 2 решения и оба при $x \leq 0$ достигается тогда, когда $(|x-4|)^2 + (y-3)^2 = a$ где $x \leq 0$ и $(y-3)^2 = 9$ и получаем $a = 4^2 + 3^2 = 25$.
При $a > 25$ система не имеет решений, т.к. тогда

Более, чем расстояние от $(4; 3)$ до любой точки прямоугольника, лежащей в I квадранте и следовательно нет решений $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ при $x \geq 0$, т.е. нет решений $(|x|-4)^2 + (y-3)^2 = a$.

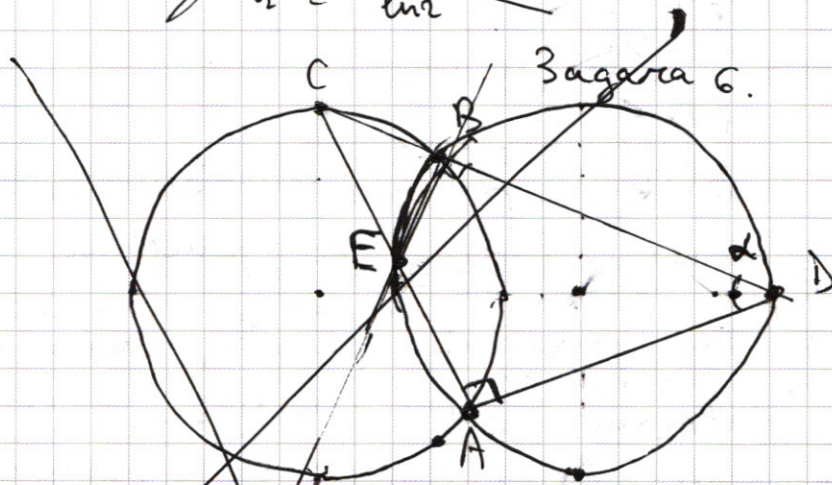
При $a = 0$ ~~система~~ задает точки $(4; 3)$ и $(-4; 3)$ и, следовательно, не имеет решений. При $a < 0$ две уравнения задают пустое множество и система не имеет решений.

Ответ: $a = 3$; $a = 25$.

Задача 7.

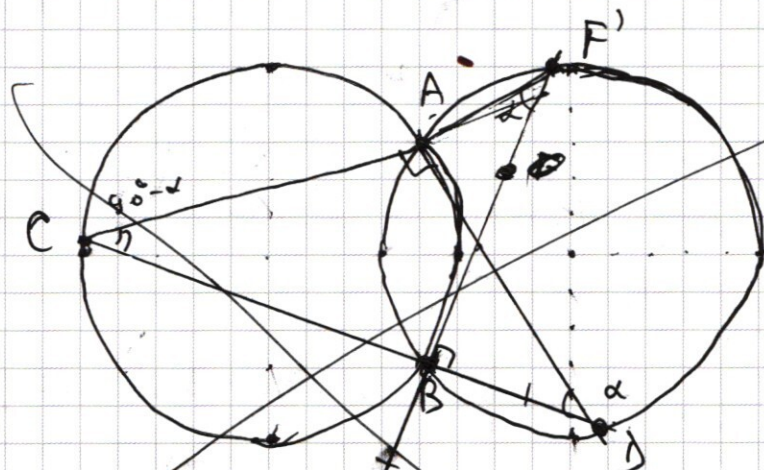
$$\begin{aligned} 0 &\leq x < 2^{64} - 1 \\ 2^x + 3 \cdot 2^{65} &= 20 + (2^{64} - 1) \\ 2^x - (2^{64} - 1) + 3 \cdot 2^{65} - 20 &= 0 \\ 2^x \ln 2 - (2^{64} - 1) &= 0 \\ 2^x &= \frac{2^{64} - 1}{\ln 2} \end{aligned}$$

Задача 6.



Обозначим $\angle CDA$ как α , обозначим точку пересечения AC и перпендикуляра к CD в точке B как E. Тогда BEAD вписан во вторую окружность и следовательно $\angle BEA = 180^\circ - \alpha$, $\angle BDA = 180^\circ - \alpha$. Тогда по свойству

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Обозначим $\angle ADB$ как α .

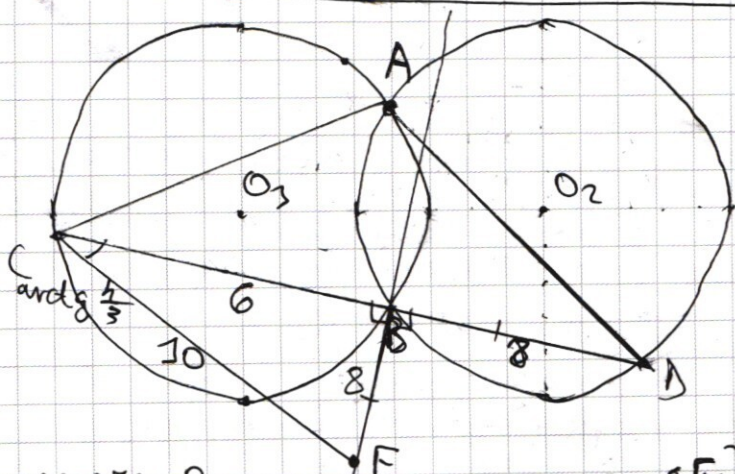
$$CF^2 = CB^2 + BF^2 =$$

$$= CB^2 + (CB \cdot CD) =$$

$$= CB^2 + CB \cdot CD = CF'^2$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2$$

Обозначим точку пересечения второй окружности и перпендикуляра к CD в точке B как F' . Тогда $\angle AFB = \angle ADB$. Заметим, что $\angle F'CB = 90^\circ - \angle CFB$, $\angle A'CB = 90^\circ - \alpha$ из $\triangle ACD$. Но из $\triangle BCF'$ $\angle F'CB = 90^\circ - \angle CFB =$



а) По теореме Пифагора для $\triangle BCF$ $CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2$. Обозначим центры первой и второй окружностей как O_1 и O_2 соответственно. Тогда $\angle CO_1B = 2\angle CAB$, $\angle BO_2D = 2\angle BAD$ по свойству центрального угла. Значит, $\angle AOB = \angle CAB + \angle BAD = \frac{\angle CO_1B + \angle BO_2D}{2}$; $\angle CO_1B + \angle BO_2D = 180^\circ$

из $\triangle BO_3C$ и $\triangle BO_2D$ по теореме косинусов:

$$\begin{cases} CO_3^2 + BO_3^2 - 2CO_3 \cdot BO_3 \cdot \cos \angle BO_3C = BC^2; \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} BO_2^2 + OD^2 - 2O_2B \cdot OD \cdot \cos \angle BO_2D = BD^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 50(1 - \cos \angle BO_3C) = BC^2 \\ 50(1 - \cos \angle BO_2D) = BD^2; \end{cases}$$

$$BC^2 + BD^2 = 50(1 - \cos \angle BO_3C) + 50(1 - \cos(180^\circ - \angle BO_3C)) = 50(1 - \cos \angle BO_3C + 1 + \cos \angle BO_3C) = 50 \cdot 2 = 100.$$

$CF^2 = BC^2 + BD^2$ кем мы хотим в начале решения,

$$CF^2 = 100; CF = \sqrt{100} = 10$$

Отсюда $CF = 10$.

д) Если $BC = 6$, то т.к. $BC^2 + BD^2 = 100$,

$$BD = \sqrt{100 - BC^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ и, наоборот верно,}$$

$$BF = BD = 8.$$

Найдем $\angle O_3BC$: из $\triangle O_3BC$, $O_3B^2 + BC^2 - 2O_3B \cdot BC \cdot \cos \angle O_3BC = O_3C^2$

$$25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \angle O_3BC = 25$$

$$36 - 60 \cos \angle O_3BC = 0$$

$$\cos \angle O_3BC = \frac{36}{60} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}; \angle O_3BC = \arccos \frac{3}{5}.$$

из $\triangle O_2BD$ найдем $\angle O_2BD$: $BO_2^2 + BD^2 - 2BO_2 \cdot BD \cdot \cos \angle O_2BD = O_2D^2$

$$25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \angle O_2BD = 25$$

$$64 = 80 \cos \angle O_2BD$$

$$\cos \angle O_2BD = \frac{64}{80} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}; \angle O_2BD = \arccos \frac{4}{5}.$$

Тогда $\angle O_3BO_2 = 180^\circ - (\angle O_3BC + \angle O_2BD) = 180^\circ - (\arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{4}{5}) = 90^\circ$. Тогда из $\triangle O_3BO_2$ по теореме Пифагора

$$\text{Гораздо } O_3O_2 = \sqrt{BO_3^2 + BO_2^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

т.к. $\angle O_3BC = \arccos \frac{3}{5}$

из $\triangle O_3AB$ найдем $\angle AOB$. AO_3BO_2 равнобедренный $AO_3^2 + O_3B^2 + BO_2^2 + O_2A^2 = AB^2 + O_3O_2^2$;

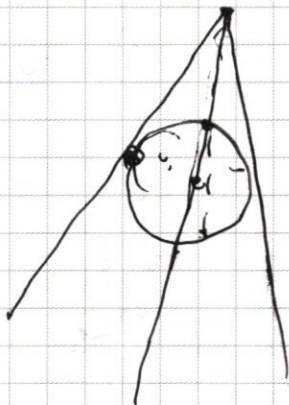
$$100 = (5\sqrt{2})^2 + AB^2; AB^2 = 50; AB = 5\sqrt{2}.$$

Тогда по теореме косинусов $O_3A^2 + O_3B^2 - 2O_3A \cdot O_3B \cdot \cos \angle AOB = AB^2$

$$50 - 2 \cdot 25 \cdot \cos \angle AOB = 50; \cos \angle AOB = 0 \text{ и } \angle AOB = 90^\circ.$$

Значит, по свойству центрального угла, $\angle AOB = 2\angle ACB$; $\angle ACB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Проведён сечение, параллельное α и β , через O . Тогда
Заметим, что сечение, параллельное плоскости KLM даёт
подобно сечениям α и β с одинаковыми коэф-
фициентами, следовательно его площадь равна $\sqrt{3} \cdot h = 2$.
Ответ: 2.

Задача №7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$\Rightarrow 70 + (2^{64} - 1)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\begin{aligned} & 2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x \\ & 2^x + 3 \cdot 2^{65} - 70 - (2^{64} - 1)x \leq 0 \\ & 2^x + (1 - 2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70 \leq 0 \\ & 2^x \ln 2 + (1 - 2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70 \leq 0 \\ & 2^x \ln 2 + (1 - 2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70 > 0 \end{aligned}$$

Из данной системы следует, что $2^x + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64} - 1)x$
 $2^x + (1 - 2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70 < 0$

Производная левой части относительно x равна
 $2^x \ln 2 + (1 - 2^{64})$, т.е. монотонно возрастает и значит

$f(x) = 2^x + (1 - 2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70$ имеет один экстремум.

При $x = -1$ пер-во не верно: $\frac{1}{2} + (2^{64} - 1) + 3 \cdot 2^{65} - 70 > 0$.

При $x = 0$ пер-во верно: $2^0 + (1 - 2^{64}) \cdot 0$

$$\text{При } x=64 \quad 2^{64} + (1-2^{64}) \cdot 64 + 3 \cdot 2^{65} - 70 =$$

$$= 2^{64}(1-64+6) - 70$$

$$\text{При } x=63 \quad 2^{63} + (1-2^{64}) \cdot 63 + 3 \cdot 2^{65} - 70 = 2^{63}(1+1-2^{64})$$

$$2^{30}((1-2^{30}) \cdot 30 + 3 \cdot 2^{65} - 70) =$$

$$2^x + (1-2^{64})x + 3 \cdot 2^{65} - 70 < 0$$

$$2^x(1+3 \cdot 2^{65-x}) + (1-2^{64})x < 70$$

$$2^{30} + (1-2^{30})$$

$$2^{30} + (1-2^{64}) \cdot 30 + 3 \cdot 2^{65} - 70 < 0$$

$$2^{30} + (6 \cdot 2^{34} - 30 \cdot 2^{34}) = 2^{30} - 24 \cdot 2^{34}$$

$$\text{При } x=30 \quad 2^{30} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1) \cdot 30 =$$

$$= 70 + 30 \cdot 2^{64} = 70 + 30 \cdot (3 \cdot 2^{65})$$

$$2^{20} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1) \cdot 20$$

$$2^{60} + 3 \cdot 2^{65} < 70 + (2^{64}-1) \cdot 60$$

$$2^{60}(1+3 \cdot 32) < 70 + 10 + 2^{64} \cdot 60$$

$$2^{60} \cdot 97 < 2^{68}$$

$$2^{64} + 3 \cdot 2^{65}$$

$$2^{65} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1) \cdot 65$$

$$2^{67} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1) \cdot 67$$

$$2^{64} \cdot 33 \leq 70 + 2^{64} \cdot 67$$

$$2^{68} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + 2^{64} \cdot 68 - 68 = 2 + 2^{64} \cdot 68$$

$$2^{64} \cdot 20 \leq 2 + 2^{64} \cdot 68$$

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65} \leq 70 + (2^{64}-1) \cdot 70$$

$$2^{69} + 3 \cdot 2^{65} \leq 1 + 2^{64} \cdot 70$$

$$038 \cdot 32 + 6 \leq 33 \cdot 2^{64} + 32$$

При $x=69$ пер-во верно (проверяет подстановкой), при $x=70$ неверно. При $x=20$ пер-во

Рассмотрим x и y в двоичной системе счисления.

Тогда 2^x - единица и x нулей, $3 \cdot 2^{65}$ это

33 0000
65 нулей.

В дальнейшем и $2^{64}-1=$

= 33 1111 11

64 единицы.

В дальнейшем из каждой пары скобок решается задача.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём $\angle C$. $\angle CO_3A = 2\angle CBA = 2(\angle CBO_3 + \angle O_3BA) =$
 $= 2(\arccos \frac{3}{5} + 45^\circ) = 2\arccos \frac{3}{5} + 90^\circ$

$\angle CBA = \angle CBO_3 + \angle O_3BA = \arccos \frac{3}{5} + 45^\circ$ ($\angle O_3BA = 45^\circ$;
 так как $\angle AOB = 90^\circ$ и $\triangle O_3AB$ — равнобедренный).

Тогда $\angle CBA > 90^\circ$, следовательно $\angle CO_3A = 2(180^\circ - \angle CBA) =$
 $= 2(180^\circ - 45^\circ - \arccos \frac{3}{5}) = 2(135^\circ - \arccos \frac{3}{5}) =$
 $= 270^\circ - 2\arccos \frac{3}{5}$

$AC^2 = O_3A^2 + O_3C^2 - 2O_3A \cdot O_3C \cdot \cos \angle CO_3A$;
 $AC^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos(270^\circ - 2\arccos \frac{3}{5}) =$
 $= 50(1 - \cos(90^\circ + 2\arccos \frac{3}{5})) = 50(1 + \sin(2\arccos \frac{3}{5})) =$
 $= 50(1 + 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}) = 50(1 + \frac{24}{25}) = 50 \cdot \frac{49}{25} = 98$ и
 $AC = 7\sqrt{2}$.

Тогда по формуле площади треугольника, $S_{ACF} =$
 $= \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \sin(\angle BCF + \angle ACB) =$
 $= 35\sqrt{2} \cdot \sin(\arctg \frac{4}{3} + 45^\circ) = 35\sqrt{2} \cdot \sin(\arcsin \frac{4}{5} + 45^\circ) =$
 $= 35\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{4}{5} + \frac{3}{5}) = 35 \cdot \frac{7}{5} = \frac{35 \cdot 7}{5} = 49$.

Отв: 49.

3375 = 5³ · 3³
 Значит, все цифры
 восьмизначного числа

Задача 1

$$\begin{array}{r} 3375 \div 125 \\ \underline{250} \\ 875 \\ \underline{875} \\ 0 \end{array}$$

должны быть либо единицами, либо тройками, либо пятёр-
 ками, либо семерками. Обозначим кол-во этих цифр в
 числе как a, b, c и d соответственно.
 Тогда в числе три пятёрки, сумма кол-ва троек и четвё-
 рок кол-во двоек так же должна быть равна 3.

$$\begin{cases} b+d=3 \\ c=3 \\ a+b+c+d=8 \end{cases} ; \begin{cases} b+d=3 \\ a+b+d=5 \end{cases} ; \begin{cases} a-d=2 \\ b+d=3 \end{cases}$$

$$b+d=3 \Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=2 \end{cases} \quad \text{т.к. } b, d \in \mathbb{Z} \text{ и } b \geq 0, d \geq 0.$$

значит, $a-3=2$; $a=5$.

$$\begin{array}{r} 5^3 \cdot 2^0 \\ \times 20 \\ \hline 1120 \end{array}$$

то есть $a=5$; $b=1$; $c=3$; $d=2$.

Таким образом, искомого кол-во сочетаний чисел равно $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1$ (сначала мы выбрали 3 места для элементов из 8, потом 1 для тройки из оставшихся пяти, потом 1 для пары из оставшихся четырех и одно место останется для одной детали).

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} \cdot 5 \cdot 1 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot 20 =$$

$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 120} \cdot 20 = \frac{7 \cdot 8}{120} \cdot 20 = 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{6} =$$

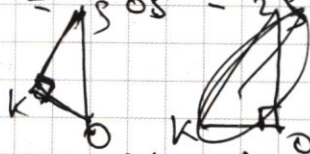
$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot 20 = 7 \cdot 8 \cdot 20 = 56 \cdot 20 = 1120.$$

Ответ: 1120.

Задача ~~14~~ №4.



Обозначим плоскость, сечение которой имеет площадь 1, как α , а плоскость, сечение которой имеет площадь 4, как β . Т.к. α и β перпендикулярны SO и касаются сферы в точках A и B в этот угол, сечение подобны, а значит, коэффициент подобия равен $\sqrt{\frac{4}{1}} = 2$. Следовательно, $SB = 2SA$, где A - точка касания сферы и α , B - точка касания сферы и β . Тогда $AB = SA$ и $\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{OA}{OS} = \frac{1}{2}$; $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$.



($\sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{OA}{OS}$; т.к. OK перпендикулярна касательной KA к сфере в точке A , а OA радиус, то $OK \perp OA$, т.к. K и A лежат на сфере с центром в O).