

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.

- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

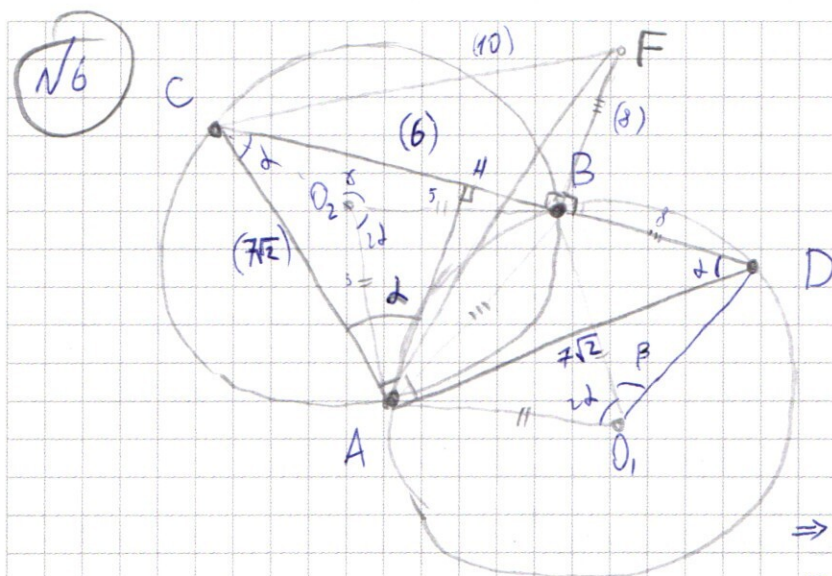
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

$$\angle O_1 = \angle O_2, \text{ м.к. } O_1AB = O_2AB$$

$$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2} \angle BO_2A = \angle ACD \Rightarrow \angle ACD =$$

$$\angle ADC = 95^\circ \Rightarrow$$

$$\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$BD = 2R \cdot \sin \frac{\beta}{2}$$

$$BC = 2R \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right)$$

$$BC^2 + BD^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 10$$

$$\delta) FB = 8, BD = 8, CA = AD = 7\sqrt{2} \text{ по м. Тупоголоса.}$$

$$\begin{aligned} (\text{м.к. } \angle HAC = 45^\circ) AH = 7 = HC \Rightarrow S_{\triangle ACF} &= CH \cdot (AH + FH) = CH \cdot (AH + FB) = \\ &= 7 \cdot (7 + 8) = 105. \end{aligned}$$

Ответ: а) 10, б) 105.

$$N2 \quad \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sin \left(11x + \frac{3\pi}{4} \right) + \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$2 \sin \left(\frac{14x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos 14x$$

$$-2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \sin 4x = \cos 14x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$I) \cos \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0, \frac{\pi}{4} - 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{1}{7} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$II) \cos \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right)$$

$$\frac{\pi}{2} + 4x = \pm \left(\frac{\pi}{4} + 7x \right) + 2\pi n \quad \begin{cases} x = \frac{1}{9} \left(+\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right) \\ x = \frac{1}{13} \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right) = \frac{1}{13} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right), \pi \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:

$$x = \frac{1}{7} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right)$$

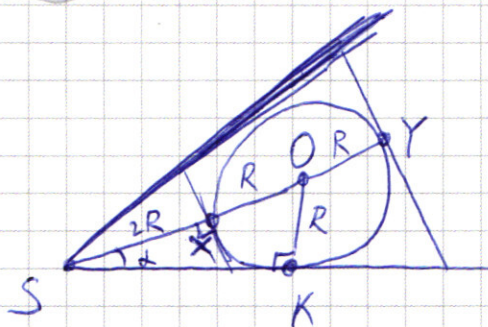
$$x = \frac{1}{11} \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right)$$

$$x = \frac{1}{13} \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right)$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right)$$

14)



сечение 1, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow SX = 2R$ (м.к. $K=2$)
 $\Rightarrow \angle OSK = \arcsin \frac{1}{3}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$

X и Y - точки касания плоскостей, выше нарисован разрез в плоскости искомого угла, т.е. плоскости стали прямыми, но остались касательными к сфере (которая стала окружностью). Верхнее ребро, противоположное SK.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Возьмем за основу число 111111. Чтобы получить искомое число, нужно:

- 1) разместить 3 5ки ($\frac{8!}{3!5!}$ вариантов)
- 2) а) разместить на оставшихся 5 мест 3 тройки ($\frac{5!}{2!3!}$ вариантов)
- б) разместить 9 и 3 ($\frac{5!}{3!1!1!}$ вариантов)

$$\text{Итого, } I \cdot (II_a + II_b) \text{ вариантов} = 8 \cdot 7 \cdot (5 \cdot 2 + 5 \cdot 4) = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680 чисел.

№3 $\begin{cases} (y^5/x)^{\lg x} = y^{2 \lg x \cdot 4} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y \end{cases}$

$$(x-y-2)^2 - 4(y-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x-y-2 = 2y-2 \\ x-y-2 = 2-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-2 = 2y-2 \\ x-y-2 = 2-2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4-y \end{cases}$$

$x = 4-y$ не подходит (см. схему)

$x = 3y$ подходит

$$\lg x \cdot \lg 3x = 1$$

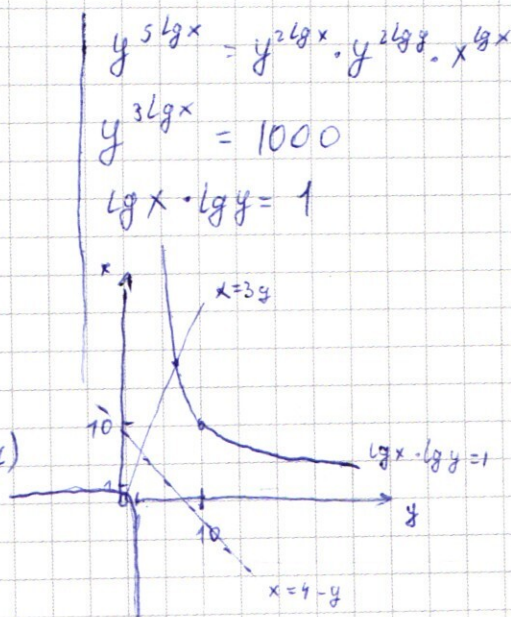
$$\lg x = t, t^2 + t \lg 3 - 1 = 0$$

$$D = \lg^2 3 + 4$$

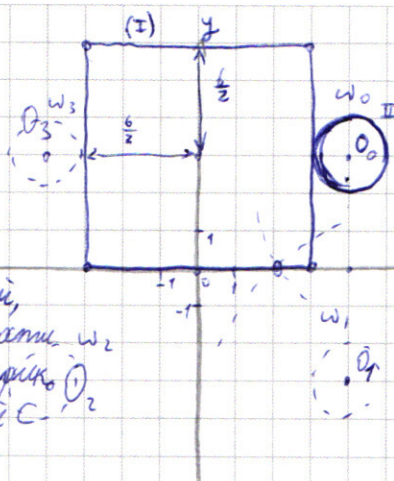
$$t = \frac{-\lg 3 \pm \sqrt{\lg^2 3 + 4}}{2}$$

$$x = 10^{\frac{\pm \sqrt{\lg^2 3 + 4} - \lg 3}{2}}$$

Ответ: $x = 10$



№5
$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (I) \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a & (II) \end{cases}$$



Если бы в (II) не было модулей, то это был бы график окружности ω_2 из-за них он превращается в график ω_1 4х "эллиптических" окружностей с центрами в $(\pm 4; \pm 3)$.

Очевидно, $1 \leq a \leq 25$, т.к. иначе $n=0$.

$a=1$ - ω_0 и ω_3 касаются (I) ($n=2$)

$1 < a < 10$ - ω_0 и ω_3 пересекают (I) ($n=4$)

$10 < a < 25$ - $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ пересекают I, но 2 точки совпадают ($n=4$)

$a=25$ - 2 группы по 3 пересечения совпали ($n=2$)

Ответ: $a=1; a=25$.

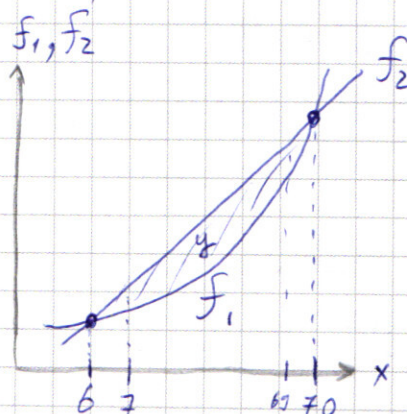
№7
$$f_1 = 2^x + 3 \cdot 2^{65} < y \leq f_2 = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$f_1 = f_2$ при $x=6$ и $x=70 \Rightarrow$ при $x=7, 8, \dots, 69$ есть решения для y , их ровно по $f_2 - f_1$.

$$f_2 - f_1 = 70 + (2^{64} - 1)x - 3 \cdot 2^{65} - 2^x$$

$$\begin{aligned} \sum_{7 \leq x \leq 69} (f_2 - f_1) &= \underbrace{63}_{1+1+...} \cdot (70 - 3 \cdot 2^{65}) + (2^{64} - 1) \left(\underbrace{\frac{69 \cdot 70 - 6 \cdot 7}{2}}_{\substack{\text{Ф-Аз} \\ 1+2+3+...}} \right) - \underbrace{(2^{70} - 2^7)}_{\substack{\text{Ф-Аз} \\ 1+2+4+8+16+...}} = \\ &= 4410 - 189 \cdot 2^{65} + 2^{64} \cdot 2397 - 2397 - 2^{64} \cdot 64 + 128 = 2^{64} (2415 - 378 - 14) + 441 \\ &= 2415 + 128 = 2^{64} \cdot 2047 + 1846 \end{aligned}$$

Ответ: $2^{64} \cdot 2047 + 1846$ 2144 + 2708 $\cdot 2^{64}$ корней.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. a b c d e f g h

$$3375 = 5 \cdot 675 = 5^2 \cdot 135 = 5^3 \cdot 27 =$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} &= y^{2 \lg xy} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

$$\frac{5^3 \cdot 3^3}{8 \cdot 7 \cdot 6} \text{ 5 оставшихся}$$

$$3! \quad \text{I) } 5 \cdot 4 \cdot 3 / 3!$$

$$\text{II) } 5 \cdot 4 / 1! 1!$$

$$\frac{x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y}{x \cdot x \quad 2 \cdot x \cdot y \quad 2 \cdot 2 \cdot x \quad 2 \cdot 6 \cdot y \quad 2 \cdot 6 \cdot y} = x^2 + \dots + 46 + 2 + 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot (10 + 20) =$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} y^{2 \lg y}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{10} = y^{2 \lg x} 100$$

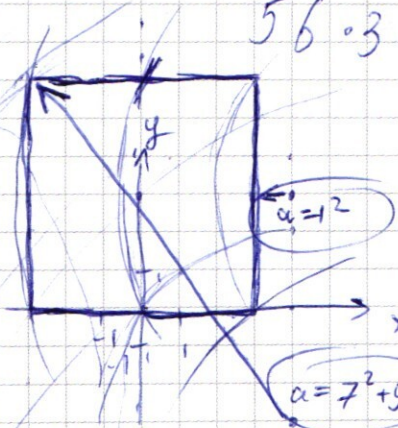
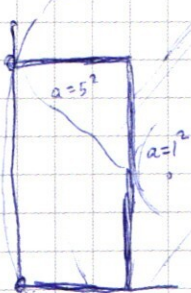
2) 5 N5

$$56 \cdot 30 = 1680$$

$$y^{\lg x} = t$$

$$t^5 = t^2 \cdot 1000$$

$$t^3 = 1000, t = 10$$



$$\begin{aligned} x &\rightarrow x+1 \\ \Delta &= 2^x \\ x &\rightarrow x+1 \\ \Delta &= 2^{64} - 1 \\ x &< 64 \end{aligned}$$

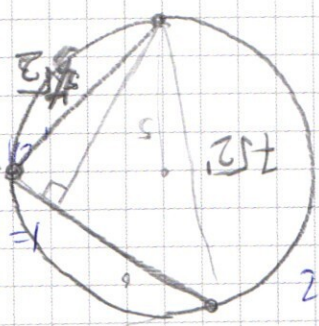
$$y^{\lg x} = 10$$

$$10 \lg x \cdot \lg y = 0$$

$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$$\lg x = \frac{1}{\lg y}$$

$$x = 10^{\frac{1}{\lg y}}$$



$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1) \cdot x$$

$$2^x \cdot 2^{64} < 70 + (2^{64} - 1) \cdot x$$

$$\frac{0.6}{51} \quad x=0$$

$$\begin{aligned} x=1: & 2 + 6 \cdot 2^{64} \sqrt{70 + 2^{64} - 1} \\ & 2 + 5 \cdot 2^{64} \sqrt{69} \end{aligned}$$

$$x=2: 4 + 6 \cdot 2^{64} \sqrt{70 + 2 \cdot 2^{64} - 2}$$

$$x=6: \dots$$

$$x=63: 2^{63} + 3 \cdot 2^{65} \sqrt{70 + (2^{64} - 1) \cdot 63}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + (6-x)2^{64} = 70 - x$$

$$\boxed{x=66}$$

$$x=5: 32 + 2^{64} \neq 65$$

$$L_1^2 \quad x=64$$

$$2^{64} + (6-64) \cdot 2^{64} = 70 - 64$$

$$2 \cdot 2^{64}$$

$$2^{64} + (6-65) \cdot 2^{64}$$

$$x=70$$

$$64 \cdot 2^{64} + (6-70) \cdot 2^{64} = 70 - 70$$

$$7 \leq x \leq 69$$

$$6 < x < 70$$

$$\Delta f = 70 + (2^{64} - 1)x - 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$\sum \Delta f = (3 \cdot 2^{65})(63) - (2^{70} - 2^7) + (2^{64} - 1) \left(\frac{69 \cdot 70 - 6 \cdot 7}{2} \right)$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{\cos 11x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 11x}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 11x$$

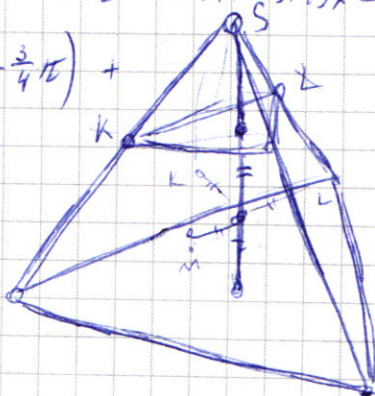


$$\cos 11x = 0$$

$$\frac{0 \cdot 24}{12}$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x - \sin 11x)$$

$$\sin(x + \frac{3}{4}\pi) +$$



$$420$$

$$21$$

$$441$$

$$69.$$

$$80 \pm 2$$

$$19$$

$$2 \pm 2$$

$$4 \pm 4$$

$$8 \pm 8$$

$$+ 19 \cdot 2 \cdot 8 \pm 8 - 0 \pm 0 \cdot 89$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

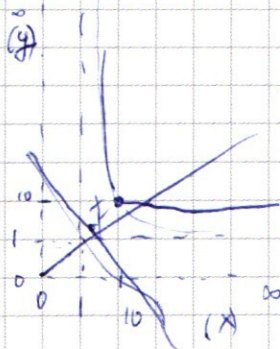
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \checkmark$$

~~cos 2 cos~~

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{3 \lg x} \cdot x^{\lg x}$$

$$(y^{\lg x})^3 = 10^3$$

$$y^{\lg x} = 10$$



$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$$x = 10^0$$

$$x = 10^a$$

$$y = 10^{\frac{1}{a}}$$

$$100 - 200 - 40 - 300 + 120$$

$$10^{2a} - 2 \cdot 10^{a+\frac{1}{a}} - 4 \cdot 10^a - 3 \cdot 10^{\frac{2}{a}} + 12 \cdot 10^{\frac{1}{a}} = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\lg x \cdot \lg 3x = 1$$

$$\lg 3 \cdot \lg^2 x = 1$$

$$\lg^2 x = \log_3 10$$

$$\lg x = \sqrt{\log_3 10}$$

$$x = 10^{\sqrt{\log_3 10}}$$

~~(x-y-2)^2~~

$$(x-y-2)^2 = x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4y - 4x$$

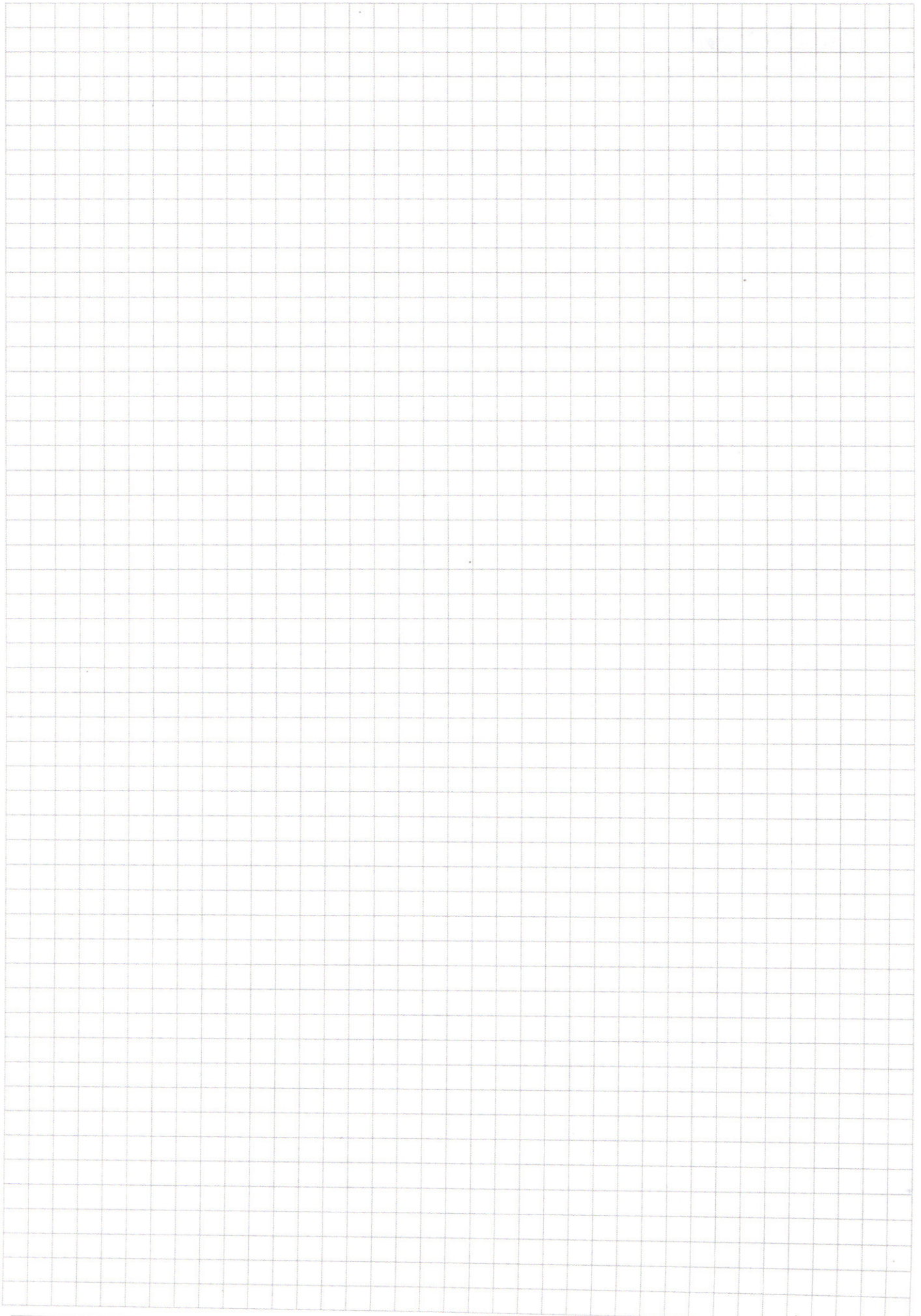
$$(x-y-2)^2 - 4y^2 + 8y - 4 = 0$$

$$(x-y-2)^2 - 4(y-1)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 2y - 2 \\ x - y - 2 = 2 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 2y - 2 \\ x - y - 2 = 2 - 2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \cos 7x \cos 4x = 2 \cos 3x$$

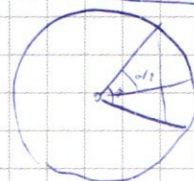
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \cos 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 3x = \cos 14x$$

$$R \sin \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} ?$$



R

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$= \left(\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) (\cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}) + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) (\sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}) + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} (\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}) = \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$BC^2 + DB^2 =$$

$$CD^2 + 2AB(AB - AC - AD) = BC^2 + DB^2$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} + \frac{e^{i\beta} - e^{-i\beta}}{2i} =$$

$$= \frac{(e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}})(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}})}{2i} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{-i\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos \left(90 - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - 90 \right)$$

$$= -2 \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) =$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{2 \lg x} = 1000$$

$$y^{\lg x} = 10$$

$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$$\sin\left(\frac{90+\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{90+\beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\cos\left(\frac{90-\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{90-\beta}{2}\right)$$

$$45 - \frac{\alpha}{2} = 45 + \frac{\beta}{2}$$

$$90 = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}y\right)^2 - 4x + 12y + \frac{8}{3}x^2 = 0$$

$$2 \cdot \frac{x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \sqrt{3}y \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}y - 1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2 = 1$$

$$\beta + \alpha = 180$$

$$\left(\sin^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2}\right) 5^2 = 5^2 = 5$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow$$

$$(x-y)^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$(x-2)^2 - 3(y-2)^2 - 2xy + 8 = 0$$

$$10^{2 \lg x} - 2 \cdot 10^{\lg x + \lg y} - 4 \cdot 10^{\lg x} - 3 = 10^{2 \lg y} + 12 \cdot 10^{\lg y} = 0$$

$$\cos 11x + \cos 3x = \cos 14x - \cos 3x$$

$$2 \cdot \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(e^{i\beta} - e^{-i\beta})}{4} =$$

$$\sin\left(2 + \arctg \frac{5}{8}\right)$$

$$\frac{e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)}}{2} + \frac{e^{i(\beta-\alpha)} - e^{-i(\beta-\alpha)}}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right)$$

$$2 \left(\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right)$$