

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Число 3375 раскладывается на множители как $5^3 \cdot 3^3$, 5 и 3 - простые числа $\Rightarrow$ наше восьмизначное число состоит из 3-ех 5, из 3-ех 3 и из 2-ух 1, потому что нельзя записать 2 нуля в числе кроме 1 нуля. Тогда возможных комбинаций

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 560$$

Ответ: 560

Задача №2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\cos 7x + \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\textcircled{1} \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi + 4\pi k}{28}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) - \sin 7x \right)$$

$$-2 \sin 4x = 2\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 \sin 4x = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2) KO = r; SO = 3r; \angle OKS = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arctg\left(\frac{KO}{SO}\right) = \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$3) KO = OM$$

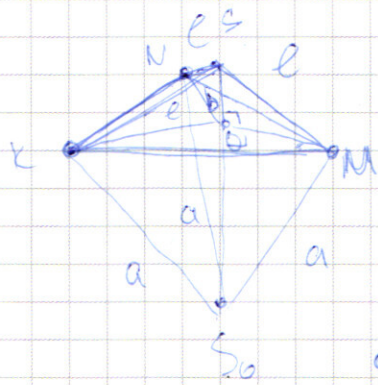
$$SO \perp KM$$

$$\angle OKS = \angle OMS = 90^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle SKO = \angle SMO \Rightarrow SK = SM, \text{ аналогично} \\ SK = SL \Rightarrow \end{array} \right\}$$

$$SK = SM = SL$$

4) Рассмотрим такую конструкцию.



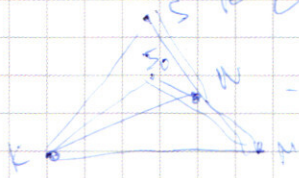
$$SN = SK = SM = e; SO \perp KM; SO \perp KM \Rightarrow$$

если опустить перпендикуляр из S на KM, то он попадет в центр описанной окружности.

$$SO = b; KO = MO = NO = \sqrt{e^2 - b^2}$$

Аналогично перпендикуляр из S попадает в O $\Rightarrow$

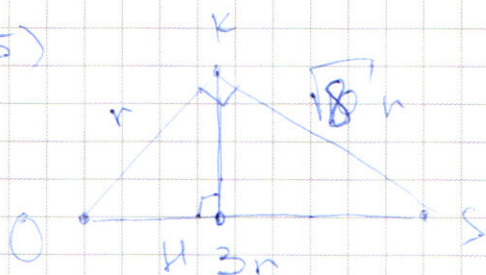
$$SO \perp KM$$



$$- \text{аналогично} \Rightarrow SO \perp KLM \Rightarrow$$

$$\triangle KLM \sim \triangle 1 \sim \triangle 2$$

5)



$$\frac{1}{2} \cdot KH \cdot OS = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot KS$$

$$KH = \frac{8}{9}r \Rightarrow OH = \sqrt{r^2 - \frac{8}{9}r^2} = \frac{1}{3}r$$

$$6) k = \frac{SH}{SA} = \frac{SO - OH}{SA} = \frac{\frac{2}{3}r}{\frac{2}{3}r} = \frac{4}{3}$$

$$7) S_{\triangle KLM} = S_{\triangle 1} \cdot k^2 = \frac{16}{9} = 1 \frac{7}{9}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle KLM} = 1 \frac{7}{9}; \angle KSO = \arctg\left(\frac{1}{3}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Соответственно, чтобы было всего два касания либо
должны касаться 1 и 2, а 3 и 4 нет, либо наоборот.

① 1 и 2 касаются а 3 и 4 нет.

3 и 4 касаются квадрата с $a = 10$,
касаясь точек $(-3; 0)$ и $(3; 0)$.

1 и 2 перестают касаться квадрата с $a = 58$,
касаясь всех его вершин: $(-3; 0), (-3; 6), (3; 6), (3; 0)$,
но 3 и 4 все еще будут касаться квадрата ~~касаются~~ для
~~касаются~~ $a > 58$ ~~касаются~~.

То есть в этом случае $a < 10$, тогда подходит
только $a = 1$, точки касания $(-3; 3); (3; 3)$.

② окружности 3 и 4 касаются квадрата в двух
точках когда $a = 10$ и $a = 130$, но при
 $a = 10$ окружности 1 и 2 тоже касаются, поэтому
10 не подходит.

$130 > 58 \Rightarrow$ 1 и 2 окружности уже не
касаются квадрата, тогда $a = 130$ тоже ответ,
точки касания $(-3; 6)$ и $(3; 6)$.

Ответ: $a_1 = 1$; $a_2 = 130$.

Задача № 6.

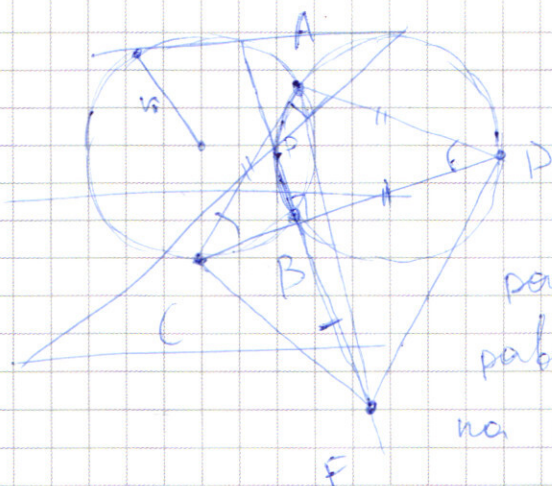
Дано: $\angle CAD = 90^\circ$; $FB \perp CD$;

$BF = BD$; $r_1 = r_2 = 5$; $B \in CD$; $CB = 6$;

Найти: CF , $S_{\triangle ACF}$

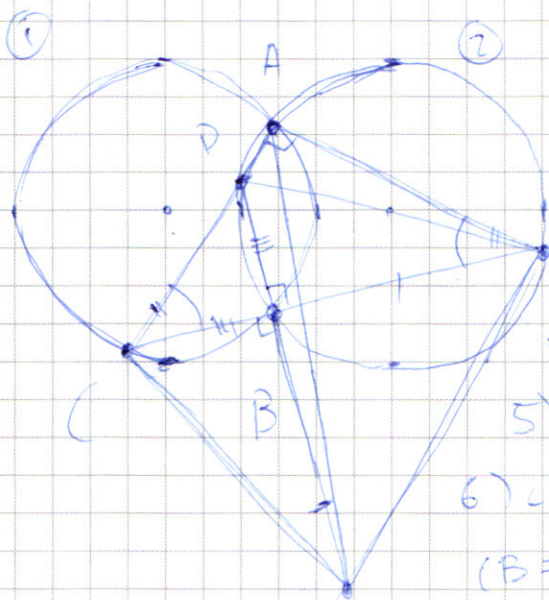
Решение: 1) т.к. окружности

равны, то $\angle ACB$ и $\angle ADB$ равны, потому что опираются на одинаковые дуги.



~~2) $\angle P$ - пересечение BF и второй окружности,~~

3) $\angle CAD$ - равност. $\Rightarrow AC = AD$



4) Рассмотрим точку P,

являющуюся пересечением

AC и (2) окружности.

$\angle PAD = 90^\circ \Rightarrow PD$ - диаметр.

$\Rightarrow \angle PBD = 90^\circ$

5) $AC = AD \Rightarrow \angle ACD = \angle CDA = 45^\circ$

6) $\angle PCB = 45^\circ$, $\angle CBP = 90^\circ \Rightarrow \angle CPB = 45^\circ \Rightarrow$

$CB = PB$

7) $\angle CBF = \angle PBD = 90^\circ$ т.к. они как смежные

8) $CB = PB$

$\angle CBF = \angle PBD$

$BF = BD$

$\triangle CBF = \triangle PBD \Rightarrow CF = PD = D = 2r = 10$

$$9) PB = CB = 6, PD = 10 \Rightarrow BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$$

$$10) CD = CB + BD = 8 + 6 = 14$$

$$11) CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC^2 \Rightarrow AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{14}{\sqrt{2}}$$

$$12) \sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{BD}{PD} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{CB}{CF} = \frac{CB}{PD} = \frac{3}{5}$$

$$\angle ACD = 45^\circ$$

$$13) \sin(\angle ACD + \angle BCF) = \sin \angle ACF = \sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \cdot \sin \angle BCF$$

$$= \sin \angle BCF = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$14) S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$$

$$\text{Отв: } CF = 10, S_{\triangle ACF} = 49$$

Задача № 4.

$$S_{2.62} \text{ Дано: } S_1 = 1, S_2 = 4;$$

$$SO \perp \Delta 1, SO \perp \Delta 2$$

$$\text{Найти: } \angle KSO, SKLM$$

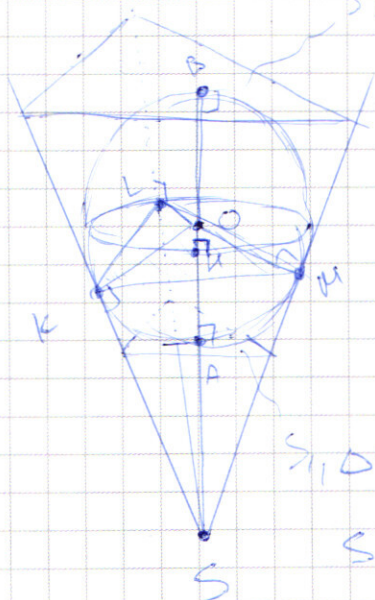
$$\text{Решение: } 1) SO \perp \Delta 1 \text{ и } SO \perp \Delta 2 \Rightarrow$$

плоскости $\Delta 1$ и $\Delta 2$ параллельны,

и отсекаются одним сечением

$$S_1, \Delta 1 \text{ углов} \Rightarrow \Delta 1 \sim \Delta 2; k = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$SA \cdot SB = 1:2 \Rightarrow SA = AB = 2r;$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\sin 4x = \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\sin 4x = \sin\left(7x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$7x + \frac{3\pi}{4} = -4x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{3\pi + 8\pi k}{44}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

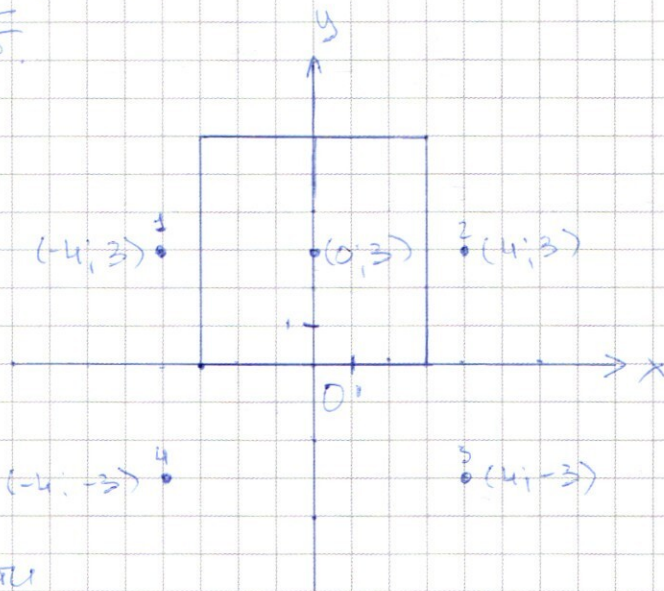
Ответ: $x_1 = \frac{3\pi + 4\pi k}{28}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x_2 = -\frac{3\pi + 8\pi k}{44}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Задача 15.

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad (1) \quad (2)$$

① график - это квадрат со стороной 6 с центром $(0, 3)$



② график - это 4 окружности радиусом $\sqrt{a}$ с центрами в

точках $(-4, 3), (4, 3), (4, -3)$ и $(-4, -3)$.

Заметим, что пары точек $(4, 3), (-4, 3)$ симметричны относительно Oy , которая делит квадрат на две симметричные части $\Rightarrow$ если касаются круги сверху, то касаются вторые, аналогично с третьей и четвертой.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = -2 \cos \frac{120}{2} \cos \frac{60}{2} = -1$$

$$\cos 90^\circ - \cos 30^\circ = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$-2 \sin 60^\circ \sin 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos 11x - \cos 3x + \sin 5x - \sin 11x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x \sin 7x + 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\textcircled{1} \sin 7x + \cos 7x = 0$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi + 4\pi k}{28} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$\textcircled{2} -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \cos 7x - \sin 7x$$

$$-\sqrt{2} \sin 4x = \sin(7x + \frac{\pi}{2}) - \sin 7x = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

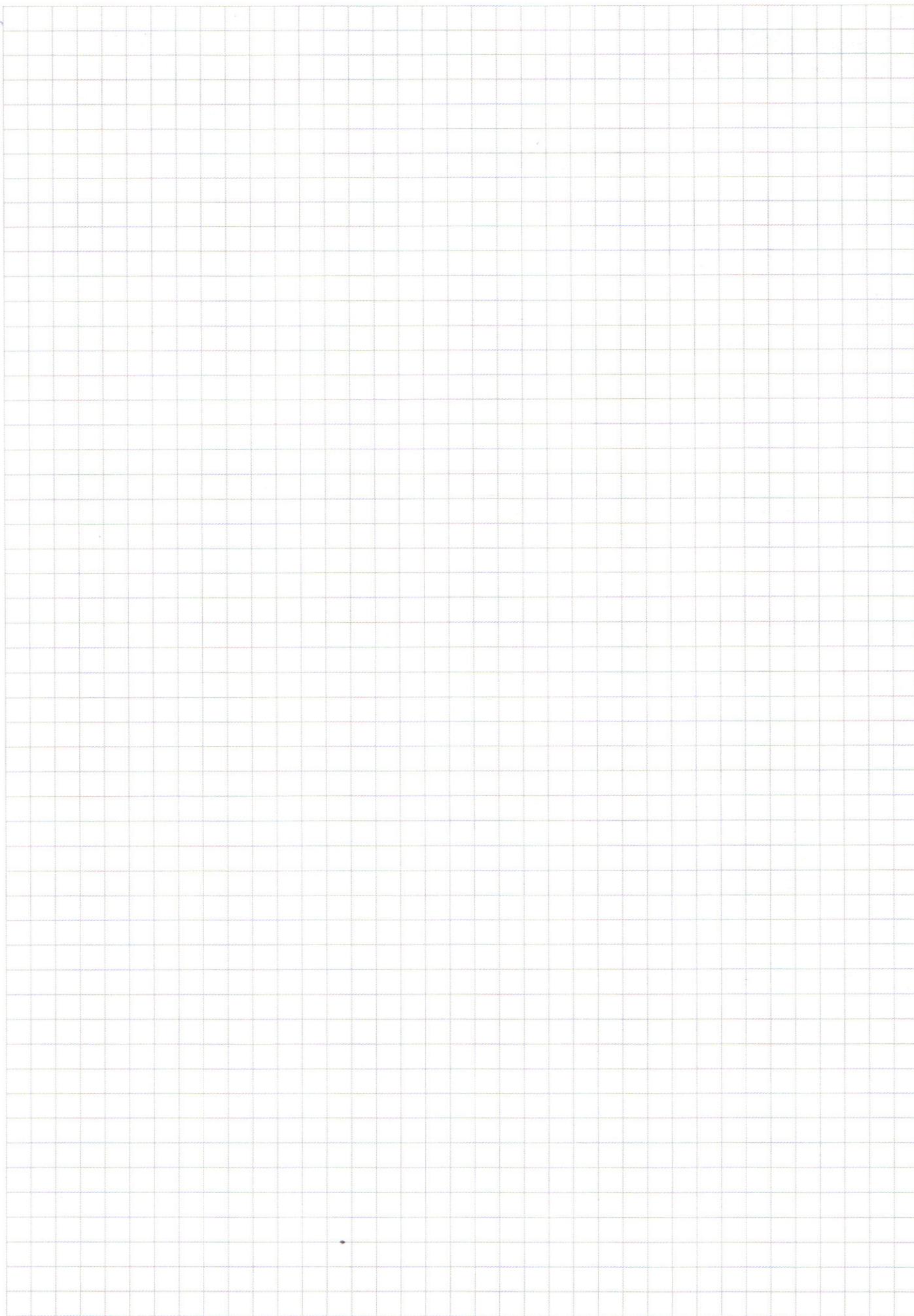
$$-\sin 4x = \cos(7x + \frac{\pi}{4})$$

$$7x + \frac{3\pi}{4} = -4x$$

$$-\sin 4x = \sin(7x + \frac{3\pi}{4})$$

$$11x = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x = -\frac{3\pi}{44} + 2\pi k$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$\sqrt{1} \cdot 135 \cdot 5 = 27 = 3^3$$

8

+3

$$5^2 \cdot 3$$

$$3 \text{ no } 5$$

$$3 \text{ no } 3$$

$$2 \text{ no } 1$$

$$\sqrt{49+9} =$$

$$> \sqrt{58}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 560$$

$$\sqrt{5}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$$

замена: $t = y - 3$

$$|t-x| + |t+x| = 6$$

① *и.и.и.*

$$x \geq 0$$

$$t \leq x$$

$$-x$$

$$t \leq x$$

$$y \leq 3+x$$

$$x-t-x-t=6$$

$$t=-3 \quad y=0$$

②

$$t \leq x$$

$$x \geq 0$$

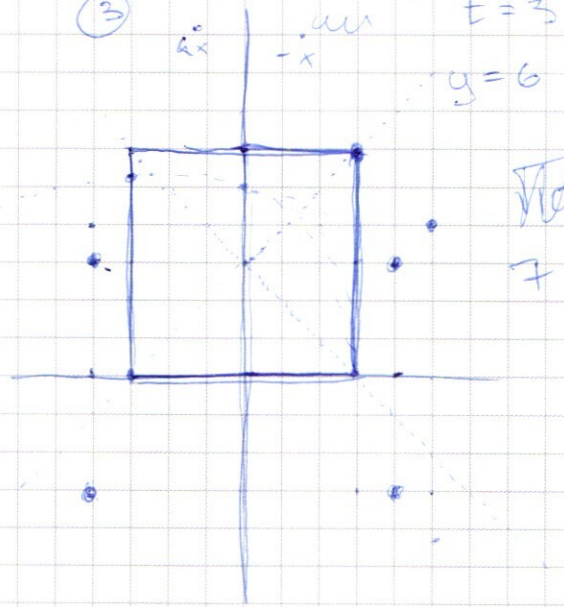
$$t \leq x$$

$$t-t-x-t-x=6$$

$$y \leq x+3$$

$$x=3$$

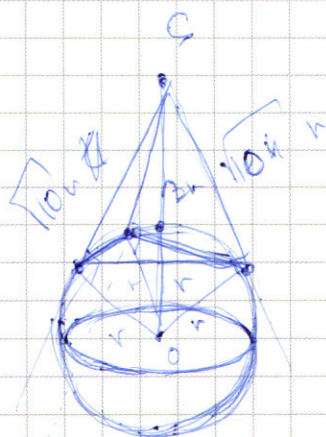
③



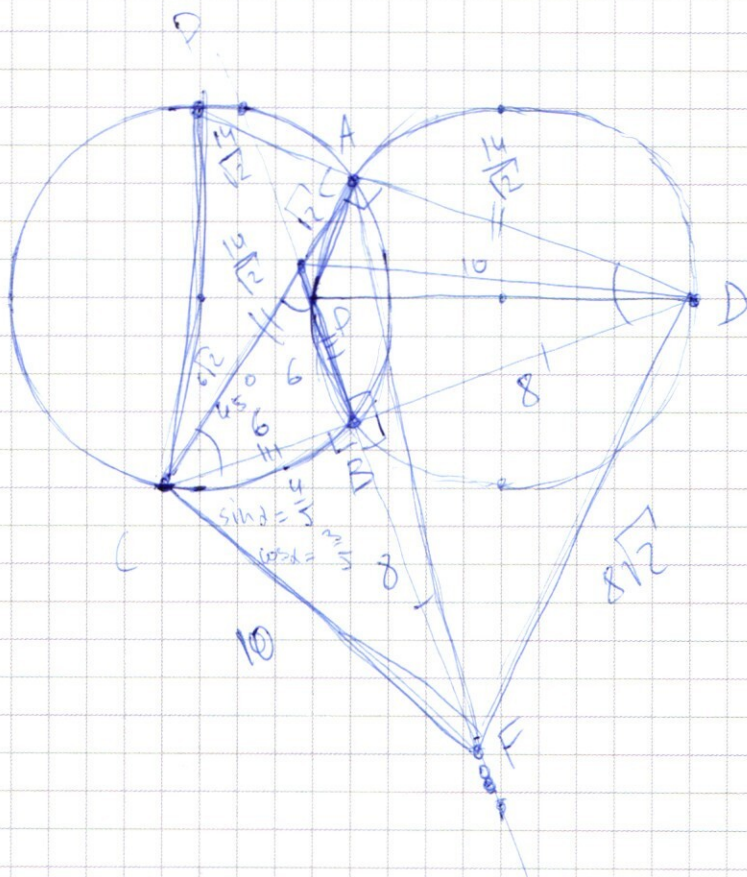
$$\sqrt{49+81} = \sqrt{130}$$

+5

$$130$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$r = 5$$

$$BC = 6$$

$$\frac{14}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

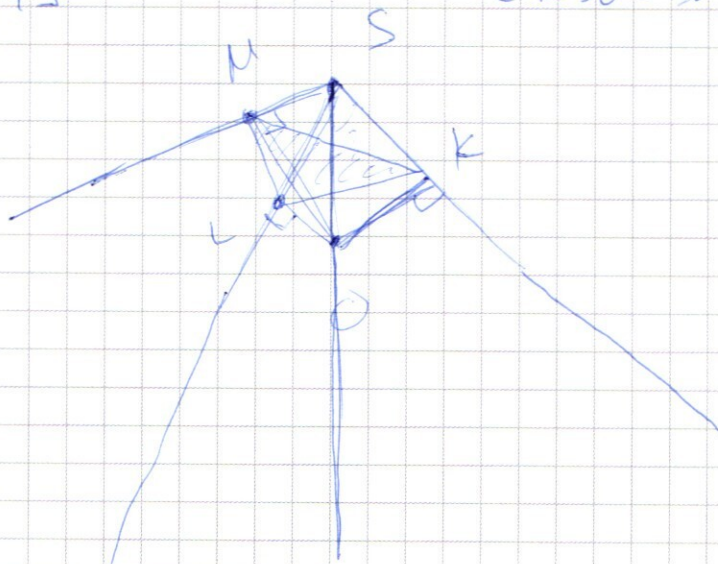
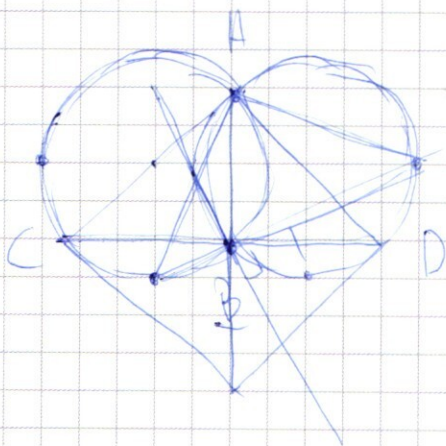
$$+6$$

$$2\sqrt{2} \quad 19$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 49$$

$$\angle KSO = 30^\circ$$



с/п/н

$$\frac{c}{a} = 2.25$$

$$\angle KSO = 23^\circ$$

