

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

- ~ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1 2 3 4 5 6 7 8

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

Заметим, что цифрами могут быть
только 1, 3, 5, 9

Пусть в числе 0 цифр 9: Тогда 3 цифры 3,
4 цифры 5, 1 цифра 1. Количество таких

$$\text{чисел это } C_8^4 \cdot C_4^3 = 70 \cdot 4 = 280$$

(Кол-во способов пост. 5 это C_8^4 , 3 это C_4^3)

Пусть в числе 1 цифра 9: тогда 1 цифра 3,
1 цифра 9, 2 цифры 1, 4 цифры 5.

$$\text{Таких чисел } C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$$

(Кол-во способов выбор. 5 - C_8^4 , 1 - C_4^2 , 3 - C_2^1)
 $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120 чисел

№2

Заметим, что x - всегда не отрицат, иначе

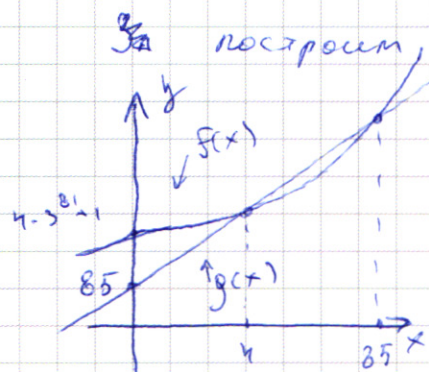
$$4 \cdot 3^{81} < 3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq x \cdot 3^{81} - x + 85, \text{ но при } (x < 0)$$

$$x \cdot 3^{81} - x + 85 < 0, \text{ а } 4 \cdot 3^{81} > 0, \text{ значит такого быть}$$

не может. Раз x - неотриц, то и $(y > 0)$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$f(x)$ $g(x)$



$$g(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

Значит $f(x) \leq g(x)$

на каком-то $[a; b]$, где a и b — точки пересечения функций. Они равны.

Заметим, что при $x=4$ и $x=85$ они равны.

$$1) x=4 \quad 85 + (3^{81} - 1)4 = 4 \cdot 3^{81} + 85 - 4 = 4 \cdot 3^{81} + 81 = 4 \cdot 3^{81} + 3^4$$

$$2) x=85 \quad 85 + (3^{81} - 1)85 = 3^{81} \cdot 85 = 4 \cdot 3^{81} + 81 \cdot 3^{81} = 4 \cdot 3^{81} + 3^4 \cdot 3^{81} = 4 \cdot 3^{81} + 3^{85}$$

Заметим, что если при x_0 верно, то кон. во $\rightarrow$ это $[85 + (3^{81} - 1)x_0] - [3^{x_0} + 4 \cdot 3^{81}]$

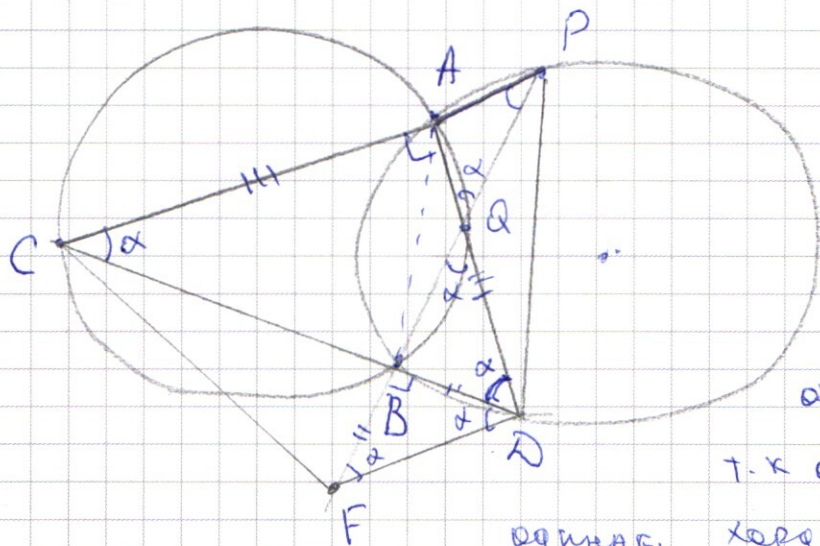
Тогда ответ это $\sum_{x=4}^{85} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}) =$

$$= 85 \cdot (85 - 4 + 1) + (3^{81} - 1) \left[\frac{85 \cdot 86}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} \right] - (85 - 4 + 1) \cdot 4 \cdot 3^{81} - \left[\frac{3^{86} - 1}{3 - 1} - \frac{3^4 - 1}{3 - 1} \right] = \cancel{85 \cdot 81} = 6970 + 3652(3^{81} - 1) - 328 \cdot 3^{81} - \frac{3^{86} - 1}{2} + 40 = 3358 + 3^{81} \cdot 3324 - \frac{3^{86} - 1}{2}$$

Ответ: $= 3358 + 3324 \cdot 3^{81} - \frac{3^{86} - 1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6



~~Abuse of Power~~

Warto: $dR = 13$ $dBC = 10$

Критері: а) CF-?

5) $\int_{A \cap E} - ?$

Reference:

$$a) \angle ACB = \angle AOB = \alpha$$

т.к они опер. на

одинак. хорду иная один. радиус.

Заметим, что $\alpha = 45^\circ$ и $AC = AD$.

Также $\angle BFD = \angle BDF = \alpha = 45^\circ$, т.к. $\triangle BFD$ — равнобедренный ($BF = BD$).

1) Заметим, что $P \in AC$, т.е. $\angle APB = 45^\circ = \alpha$

u $\angle AQP = \angle BQD = \alpha \Rightarrow \angle QAP = 90^\circ$

2) CP || FD, $\therefore \angle CPF = \angle PFD = \alpha$.

3 $\Rightarrow$ CFDP - трапеция. Но т.к. $\angle CPF = \angle CDF = \alpha$,
то она вписанная, и значит CF = PD

3) PO - это диаметр, т.к. $\angle PAO = 90^\circ$

$$\Rightarrow CF = 2R = 26$$

5) $BC = 10$ ~~$BA = 10$~~ ~~$BC = 5$~~

$$BD = BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$$

S_{ACF} S_{CFDP}

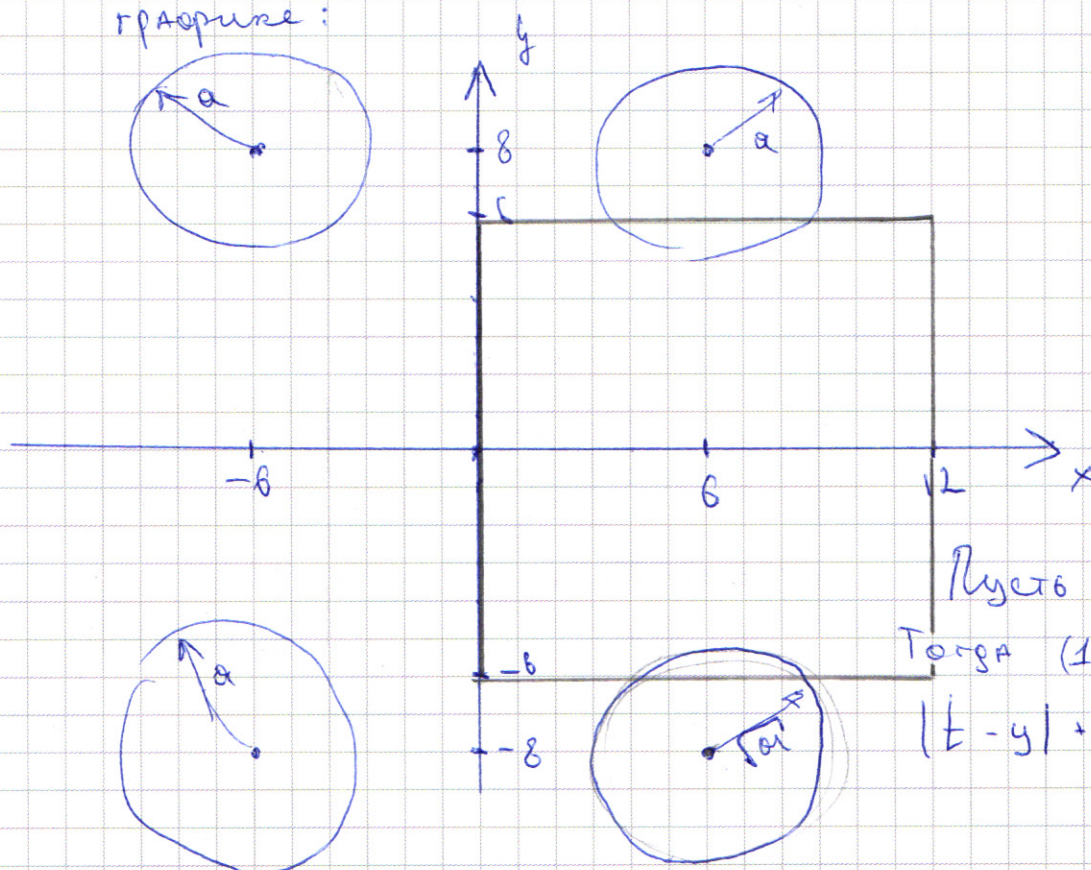
№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)^2 + (y-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Заметим как выпл. (2) ур-ние на

графике:



Пусть $t = x - 6$

Тогда (1) ур-ние:

$$|t-y| + |t+y| = 12$$

$$1) \quad t \geq y, \quad t+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -t \quad y \in [-6; 6] \quad t=6$$

$$t-y + t+y = 12 = 2t \Rightarrow t=6 \quad x = t+6 = 12$$

$$2) \quad t \geq y, \quad t+y \leq 0 \Rightarrow t \leq -y \quad t \in [-6; 6] \quad y = -6$$

$$t-y - t-y = -2y = 12 \Rightarrow y = -6 \quad x \in [0; 12]$$

$$3) \quad t \leq y, \quad t+y \geq 0 \Rightarrow t \geq -y \quad t \in [-6; 6] \quad y = 6$$

$$y-t + t+y = 2y = 12 \Rightarrow y = 6 \quad x \in [0; 12]$$

$$4) \quad t \leq y, \quad t+y \leq 0 \Rightarrow y \leq -t \quad y \in [-6; 6] \quad t = -6$$

$$y-t - t-y = -2t = 12 \Rightarrow t = -6 \quad x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что 2 решения только
когда верхняя правая и нижняя
правая касаются прямоугольника.

Это при $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$

Проверим: $(|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = 4$

при $(x; y) = \{6; -6\}$ и $\{6; 6\}$ это

работает.

Заметим, что левая верхняя и левая
нижняя окружности не касаются
прямоугольника, потому что нужно минимум
 $\sqrt{a} \neq 6$ чтобы коснулись оси y .

Ответ: $a = 4$

ККЗ N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = \cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos 7x = \sin 3x + \sin 7x - \sqrt{2} \sin 2x \sin 4x$$

$$(1) \begin{cases} \cos 7x = \sin 7x \\ \cos 3x = \sin 3x \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} 7x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{28} + 2\pi k$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{28} \cdot (\pm \pi) + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \begin{cases} \cos 7x = \sin 3x \\ \cos 3x = \sin 7x \end{cases}$$

$$(2) \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = \sin 3x$$

$$\frac{\pi}{2} - 7x = 3x \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{84} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi}{20} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y = (-x) \lg(-xy) & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим (2) отн. y :

$$2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$$

$$D = (x+8)^2 + 8(x^2+4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$$

$$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2 \geq 0$$

$$y_1 = \frac{x+8 + 3x+8}{4} = x+2$$

$$y_2 = \frac{x+8 - 3x-8}{4} = -\frac{x}{2}$$

$$1) y = -\frac{x}{2} \quad (4 \cdot x^2)^{\lg -\frac{x}{2}} = (-x)^{\lg \frac{x^2}{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x_2 \geq y$ $x_2 + y \geq 0 \rightarrow x_2 \geq -y$
 $x_2 \in [y; -y]$ $y \in [-x_2; x_2]$
 $x_2 - y + x_2 + y = 2x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = 6$
 $x_2 + 6 = 12 \Rightarrow y = 6$
 $y \in [0; 12]$

2) $x_2 \geq y$ $x_2 + y \leq 0 \rightarrow x_2 \leq -y$
 $x_2 \in [y; -y]$ $x_2 \in [-6; 6]$
 $x_2 - y + y - x_2 = -2y = 12 \Rightarrow y = -6$
 $x = x_2 + 6$
 $y \in [0; 12]$

3) $x_2 \leq y$ $x_2 + y \geq 0 \rightarrow x_2 \geq -y$
 $x_2 \in [-y; y]$ $y = 6$
 $y - x_2 + x_2 + y = 2y = 12$
 $y = 6$
 $x \in [0; 12]$

4) $x_2 \leq y$ $x_2 + y \leq 0 \rightarrow x_2 \leq -y$
 $x_2 \in [y; -y]$ $x_2 \leq -y$
 $y - x_2 - x_2 - y = -2x_2 = 12 \Rightarrow x_2 = -6$
 $y \in [x_2; -x_2]$ $y \in [-6; 6]$
 $x = 0$

1) $x = x_2 + 6$
 $x_2 = 6 \rightarrow x = 12$ $y \in [-6; 6]$

2) $y = -6$ $x_2 \in [-6; 6] \rightarrow x \in [0; 12]$

3) $y = 6$ $x_2 \in [0; 12]$

4) $x_2 = -6$ $x = 0$ $y \in [6; 6]$

$$\frac{\pi}{28}k < \frac{\pi}{12} \quad k = 3, 4, 7$$

$$21x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad 84$$

2

$$82 - 85 = 170$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ + 82 \\ \hline 170 \\ 080 \\ \hline 690 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 86 \\ + 85 \\ \hline 171 \\ 436 \\ \hline 688 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7316 \overline{) 2} \\ 6 \\ \hline 1316 \\ 12 \\ \hline 116 \\ 10 \\ \hline 16 \end{array}$$

82.4

= 328

3658 - 6

3652

$$\frac{81-1}{2} = 40$$

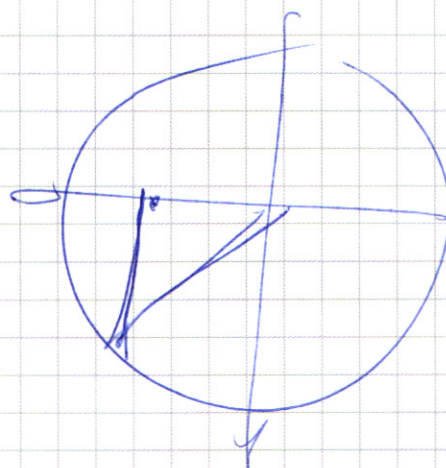
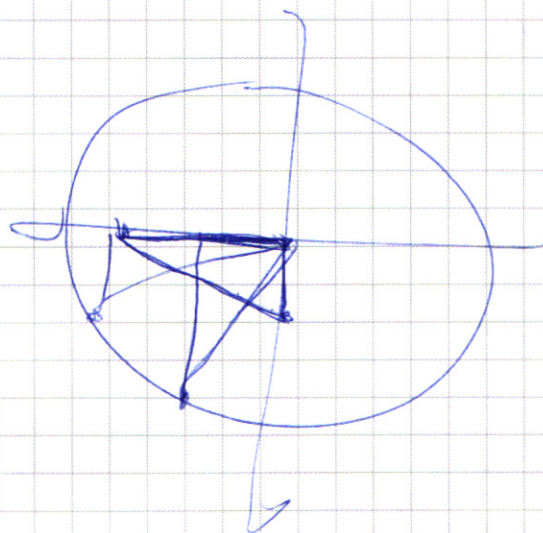
$$\begin{array}{r} 6940 \\ + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6940 \\ + 40 \\ \hline 7010 \end{array}$$

3358

$$\begin{array}{r} 7010 \\ - 3652 \\ \hline 3358 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3652 \\ - 328 \\ \hline 3324 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = -t + 4$

$t \lg \left(\frac{(t+4)^3}{t} \right) = (-t+4)^2 \lg(-t+4)$

$a^b = c^d$

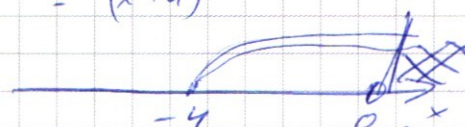
$\ln a^b = \ln c^d$

$b \ln a = d \ln c$

$y = x + 4$
 $(-x) \lg \frac{(x+4)^3}{-x} = (x+4)^2 \lg(x+4)$

$x \in$

$(a^x)' = a^x \ln a$



$x \lg x = t$
 $\lg x \cdot \lg x = \lg t$
 $\lg x = \pm \sqrt{\lg t}$
 $x = 10^{\pm \sqrt{\lg t}}$

$\lg(-x) \cdot \lg \left(\frac{(x+4)^3}{-x} \right) =$
 $\lg(x+4) 2 \lg(x+4) =$
 $= 2 \lg^2(x+4)$

$3 \lg(-x) \lg(x+4) - \lg^2(-x) - 2 \lg^2(x+4)$
 $(3 \lg(-x) - 2) \lg(x+4) = \lg^2(-x)$

$18^5 \cdot 4 \leq (x-58) + 18^5 \cdot x$
 $18^5 \cdot 4 \leq 4 \cdot 18^5$
 $85 + (3^8 - 1)x - 3^8 x$

$0 \leq x$
 $0 \leq x(1 - 3^8)$

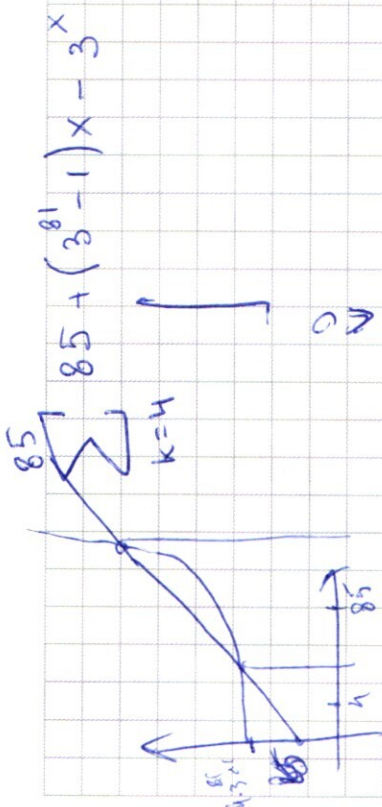
$85 - 6 \leq 0$
 $a < b$
 $a + b \leq 0$

$58 \rightarrow 1 + 8 \cdot 4$
 $18^5 \cdot 4 \leq 18^5 \cdot 4$

$x(1 - 3^8) + 58 \rightarrow 58 \leq$

$18^5 \cdot x =$
 $= x - 18^5 \cdot x + 58 = x(1 - 3^8) + 58 > 58$

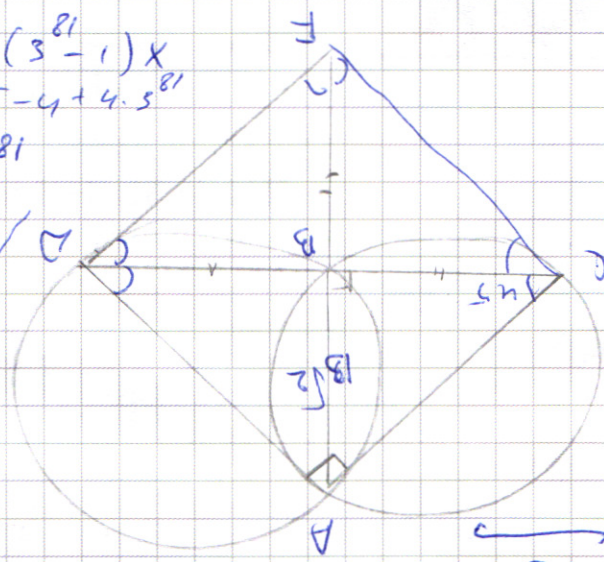
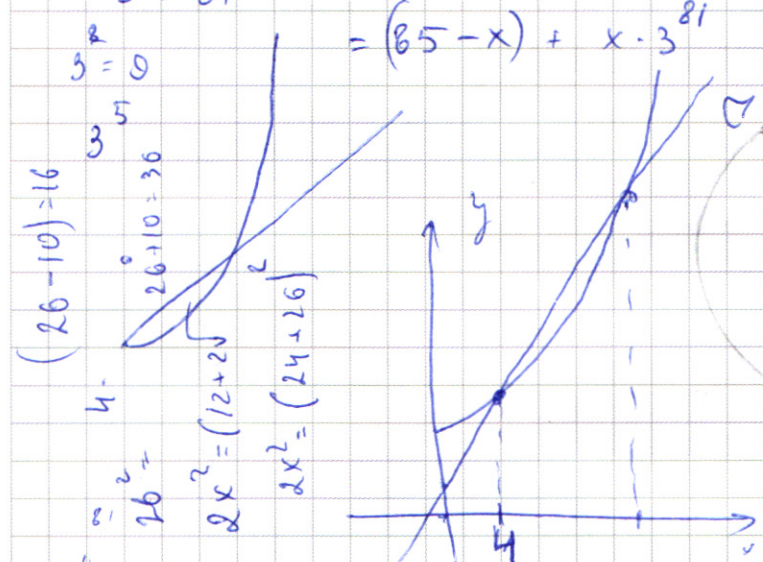
$5 \cdot 4 + 5 \leq 5$
 18^5



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 - 4 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$= (85 - x) + x \cdot 3^{81}$$



$$\frac{124}{18} = \frac{62}{9}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

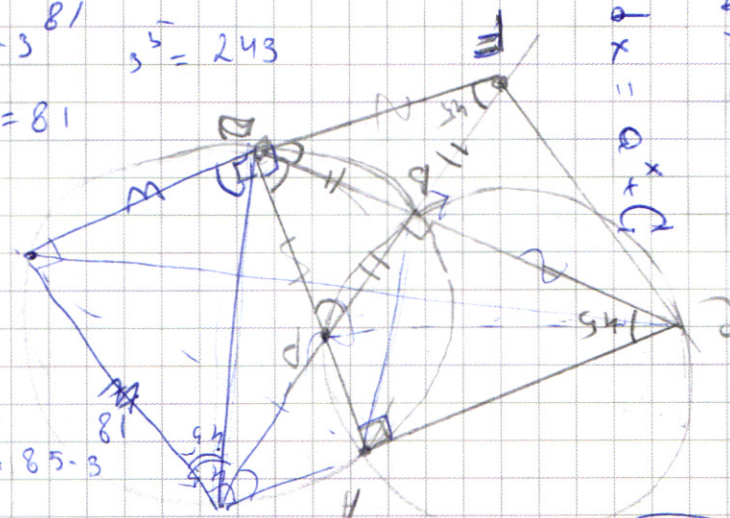
2C

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = (85 - x) + x \cdot 3^{81}$$

$$3^x \ln 3 = \dots$$

$$3^{81} - 1 = 3^x \cdot \ln 3$$

$$3^{81}(x - 4) + (85 - x - 3^x)$$



$$3^{81} \cdot 81 \geq 3^{85}$$

$$= 3^{81}(81 - 3^4) = 0 = 0 + 85 \cdot 3$$

$$3^{81}(4 + 3^4) =$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = a^x \ln a$$

$$\left(\frac{a^x}{\ln a} \right)' = \frac{a^x \ln a}{\ln a} = \frac{a^x \ln a}{\ln a}$$

AC || FD

$$\angle APR = 45^\circ \Rightarrow \angle QPR = 90^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 3x + \cos 7x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 7x = \sin 3x + \sin 7x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$a - \sqrt{2}ab + b = (a+b) - \sqrt{2}ab$$

$$(a+b)^2 - 2ab^2 = (a+b - \sqrt{2}ab)(a+b + \sqrt{2}ab)$$

$$\cos 3x(1 - \sqrt{2} \cos 7x) + \cos 7x$$

$$\begin{cases} \cos 3x = \sin 3x \\ \cos 7x = \sin 7x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \cos 3x = \sin 7x \\ \cos 7x = \sin 3x \end{cases} \quad (2)$$

$$\cos(7x) = \cos(5x + 2x) = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x$$

$$\cos(3x) = \cos(5x - 2x) = \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$$

$$\cos(10x) = \cos(5x + 5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x = 2\cos^2 5x - 1 = 1 - 2\sin^2 5x$$

$$\sin 7x = \sin(5x + 2x) = \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x$$

$$\sin(3x) = \sin(5x - 2x) = \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} (2\cos^2 5x - 1)$$

$$\sqrt{2} \cos 5x (\cos 2x - \sin 5x) = \sqrt{2} (2\cos^2 5x - 1)$$

$$\overline{12345678} \quad \sqrt{1}$$

$$3^3 \cdot 5^4$$

$$\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$1280, 1, 3, 5, 9$$

$$1, 3, 5, 9$$

$$P_{\text{уст}} K(9) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

$$\frac{12}{84}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^3 = 70 \cdot 4 = 280$$

$$K(9) = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -4 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 = 70 \cdot 6 \cdot 2 = 840$$

$$\frac{840}{1120}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$\frac{16875}{5} = 3375$$

$$\frac{3375}{5} = 675$$

$$\frac{675}{5} = 135$$

$$\frac{135}{5} = 27$$

$$\frac{27}{3} = 9$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{3}{3} = 1$$

$$\frac{135}{5} = 27$$

$$\frac{5^2}{5} = 25$$

$$\frac{625}{5} = 125$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 70$$

$$C_4^3 = \frac{4}{1} = 4$$

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$C_2^1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{140}{6} = 840$$

$$\frac{x}{x} = \frac{4}{x^2} = \frac{4}{8-x^2} = \frac{4}{8+x} = 2x$$

$$\frac{4}{8+x} = \frac{4}{9+x^2} = \frac{4}{8+x} = 1x$$

$$0 \in (8+x^2) = 49+x^2+4x^2 = x^2+2x+9$$

$$49+x^2+4x^2 = (x^2+2x)8 + (8+x) = 0$$

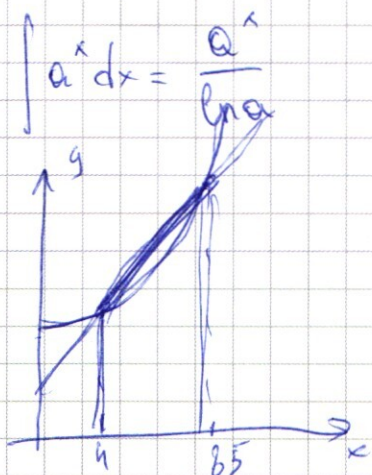
$$0 = (x^2+2x) - (8+x) = 2x - 8$$

$$0 = 2x - 8 - x - 2x - 8 - 2x - 8$$

$$(8x-1) \left(\frac{2x}{x} \right) = \left(\frac{2x}{x} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\int (3^x + 4 \cdot 3^{81}) dx = \frac{3^x}{\ln 3} + 4 \cdot 3^{81} x + C$$



$$\int (85 + (3^{81} - 1)x) dx =$$

$$\sum_{k=4}^{85} 85 + (3^{81} - 1)x =$$

$$= (85 - 4 + 1) \cdot 85 + (3^{81} - 1) \sum_{k=4}^n k = \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^{x-1} k =$$

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{x(x+1)}{2}$$

$$x=2$$

$$n=4$$

$$= \sum_{k=1}^n k + \frac{x(x-1)}{2}$$

$$2 \cdot 5 - 1 = 9$$

$$2 \cdot 5 - 3 = 7$$

$$1234 \quad 3456$$

$$\frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{3 \cdot 4}{2} = 21 - 6 =$$

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{x-1} k + S_n^x$$

$$S_n^x = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(x-1)x}{2} = 15$$

$$x=3 \quad n=6$$

$$x=2 \quad n=4$$

$$(234)$$

$$\frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

$$\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$28 = 1 + 4 + 59$$

$$\sum_{x=4}^{85} 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$\left(\frac{85 \cdot 86}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} \right) (3^{81} - 1) = \cancel{3645} \cdot 8 = 3645 (3^{81} - 1)$$

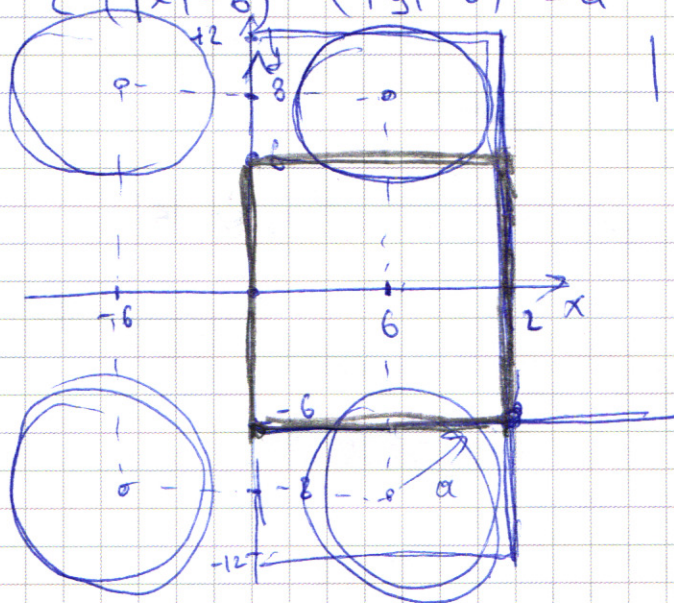
$$\begin{array}{r} 85 \cdot 43 \\ 85 \cdot 85 \\ \hline 255 \\ 340 \\ \hline 3655 \\ 3^n = 81 \end{array}$$

$$-3655 - 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n = \frac{9^{n+1} - 9}{9 - 1}$$

$$\sum_{k=4}^{85} 3^k = \frac{3^{86} - 1}{2} - \frac{3^4 - 1}{2} = \frac{3^{86} - 1}{2} - 40$$

$$= 82 \cdot 85 + 3645 (3^{81} - 1) - \frac{3^{86} - 1}{2} + 40 - 82 \cdot 4 \cdot 3^{81} =$$

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12 \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$



$$x_2 = x - 6$$

$$|(x-6)-y| + |x_2+y| = 12$$

$$1) x_2 \geq y$$

$$x_2 - y + x_2 + y = 12$$

$$2x_2 = 12$$

$$x_2 = 6$$

$$2) x_2 \leq y, x_2 + y \geq 0 \rightarrow x_2 \geq -y$$

$$x_2 \in [-y; y]$$

$$y - x_2 + x_2 - y = 2y = 12$$

$$y = 6$$

$$3) x_2 \leq y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$1) \quad y = x+4 \quad \left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$(x^4)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-xy^2)^{\lg y}$$

$$(-x^3)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (y^2)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad t = -x \quad y_1 = -t+4$$

$$y_2 = \frac{t}{2}$$

$$\left(\frac{t^4}{y^2}\right)^{\lg y} = t^{\lg(y+t)} = t^{\lg y} \cdot t^{\lg t}$$

$$t^4 \lg y \cdot y^{-2 \lg y} = t^{\lg y} \cdot t^{\lg t}$$

$$t^{3 \lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = t^{\lg t}$$

$$t^{3 \lg y} \cdot y^{-2 \lg y} - t^{\lg t} = 0$$

$$t^{\lg t} (t^{3 \lg y - \lg t} \cdot y^{-2 \lg y} - 1) = 0$$

$$t^{3 \lg y - \lg t} \cdot y^{-2 \lg y} = 1$$

$$t^{\lg y^3 - \lg t} \cdot y^{-2 \lg y} = y^{2 \lg y}$$

$$t^{\lg \frac{y^3}{t}} = y^{2 \lg y}$$

$$(-x)^{\lg(-x)}$$

$t \neq 0$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x - \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$\begin{aligned} & \left| \sin 3x \sin 7x \right. \\ & \cancel{\sin 3x} \frac{\operatorname{ctg} 7x}{\sin 3x} + \frac{\operatorname{ctg} 3x}{\sin 7x} - \sqrt{2} \operatorname{ctg} 7x \operatorname{ctg} 3x = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\sin 7x} - \sqrt{2}$$

$$\frac{\operatorname{ctg} 7x - 1}{\sin 3x} + \frac{\operatorname{ctg} 3x - 1}{\sin 7x} = \sqrt{2} (\operatorname{ctg} 7x \operatorname{ctg} 3x + 1)$$

$$\frac{\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x}{\sin 3x \sin 7x} = \sqrt{2} \left(\frac{\cos 7x \cos 3x}{\sin 7x \sin 3x} - 1 \right)$$

-2

$$\begin{cases} \cos 7x = \sin 7x \\ \cos 3x = \sin 3x \end{cases}$$

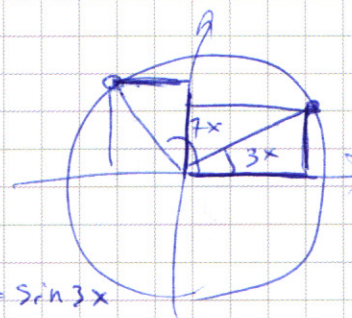
$$\begin{cases} 7x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi l \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{28} + 2\pi k$$

$$x = \pm \frac{\pi}{12} + 2\pi k$$



$$\begin{cases} \cos 7x = \sin 3x \\ \cos 3x = \sin 7x \end{cases}$$



$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = \sin 3x$$

$$\frac{\pi}{2} - 7x = 3x$$

$$\frac{\pi}{2} = 10x \quad x = \frac{\pi}{20}$$

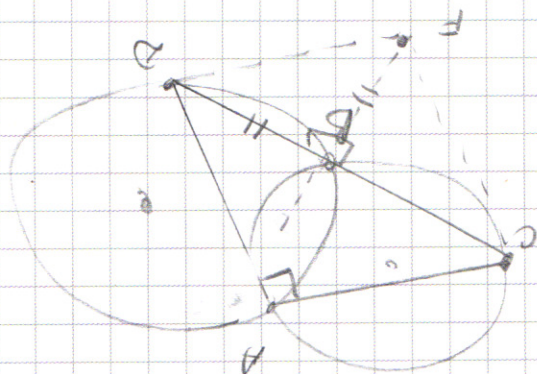
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \sin 7x$$

$$\frac{\pi}{2} - 3x = 7x$$

$$x = \frac{\pi}{20}$$

$$\frac{\pi}{2} - 7x = \pi - 3x$$

$$x = -\frac{\pi}{8}$$



и-е