

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим на простые множители 3375:

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \quad \leftarrow \text{Во этих 6 числах десятки}$$

присутствуют в данном числе. Оставшиеся два места займем единицами, тогда произведение не изменится.

Всего расположений в данных единицы: $7+6+5+4+3+2+1=28$.

Точно единиц в данных уже есть, тогда расположений «5»: $4+3+2+1+3+2+1+2+1+1=20$.

Для «3» осталось только 3 места, значит они распределятся однозначно.

$$\text{Всего комбинаций } 20 \cdot 28 = 560$$

Ответ: 560 чисел.

№3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y; \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2(\lg x + \lg y)}$$

$$y^{5 \lg x} = x^{\lg x} y^{2 \lg x} y^{2 \lg y}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{y^2 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^2 \lg y$$

$$y^3 \lg x = x^{\lg x} \cdot y^2 \lg y$$

Прологарифмируем по основанию 10

$$\lg y^3 \lg x = \lg x^{\lg x} \cdot y^2 \lg y$$

$$3 \lg x \lg y = \lg x^{\lg x} + \lg y^2 \lg y$$

$$3 \lg x \lg y = \lg^2 x + 2 \lg^2 y$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$\lg^2 y - 2 \lg x \lg y + \lg^2 x = \lg x \lg y - \lg^2 y$$

$$(\lg y - \lg x)^2 = \lg y (\lg x - \lg y)$$

$$(\lg y - \lg x)^2 + \lg y (\lg y - \lg x) = 0$$

$$(\lg y - \lg x) (\lg y - \lg x + \lg y) = 0$$

$$\lg y = \lg x \quad \text{или} \quad 2 \lg y = \lg x$$

$$x = y$$

$$y^2 = x$$

(т.к. по лог. ар-фм. с осн 10 возр.-
стационале)

Вернемся к системе

$$\begin{cases} \begin{cases} x = y \\ y^2 = x \end{cases} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; \end{cases}$$

$$\text{Т.к. } x = y: x^2 - 2x^2 - 4x - 3x^2 + 12x = 0$$

$$\text{т.к. } x > 0 \text{ поделим на } x: x - 2x - 4 - 3x + 12 = 0$$

$$-4x + 8 = 0$$

$$x = 2, \text{ значит } y = 2. \Rightarrow (2; 2)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $x = y^2$: $y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$.

П.и. $y \neq 0$, то поделим на y :

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0.$$

Пусть $y = 3$: $27 - 18 - 21 + 12 = 0$, значит $y = 3$ — корень ур-ния.

$$\begin{array}{r|l} y^3 - 2y^2 - 7y + 12 & y - 3 \\ - y^3 + 3y^2 & \\ \hline y^2 - 7y + 12 & \\ - y^2 + 3y & \\ \hline -4y + 12 & \\ - (-4y + 12) & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} y^2 + y - 4 \\ y^2 + y - 4 = 0 \\ D = 1 + 4 \cdot 4 = 17 \\ y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ \text{П.и. } y \neq 0, \text{ то } y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 3 \end{cases};$$

или

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17}) \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \\ &= \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{1}{2}(9 - \sqrt{17}) \end{aligned}$$

Ответ: $(2; 2); (9; 3); \left(\frac{1}{2}(9 - \sqrt{17}); \frac{\sqrt{17} - 1}{2}\right)$.

р.б.

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6 & (1) \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Расс-реш (1)

$$1) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y-3-x + y-3+x=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq -x+3 \\ y=6; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \\ y-3-x + y+3-x=6; \end{cases}$$

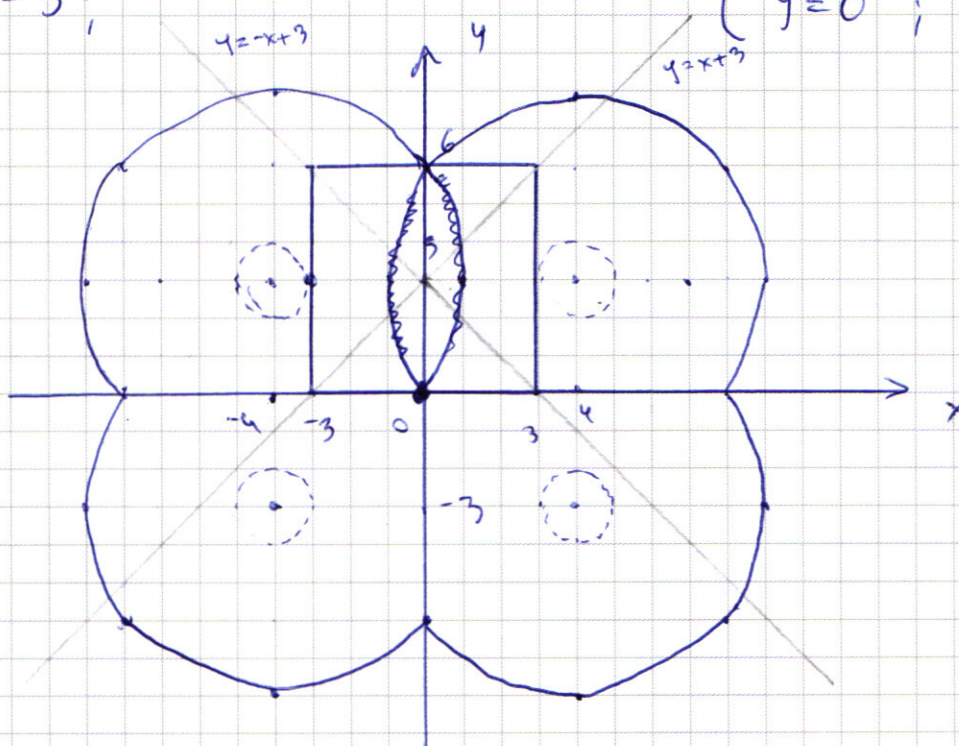
$$\begin{cases} y \geq x+3 \\ y < -x+3 \\ x=-3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ -y+3+x + y-3+x=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y \geq -x+3 \\ x=3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ -y+3+x - y+3-x=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < x+3 \\ y < -x+3 \\ y=0; \end{cases}$$



Расс-рши (2)

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = a; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = a; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = a; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В системах (1), (2), (3), (4) окружности с $r = \sqrt{a}/a \neq 0$ и квадраты в $(4; 3); (4; -3); (-4; 3); (-4; -3)$ соответственно.

1) При $a = 0$ решений нет

2) При $r < 1$ решений нет

3) При $r = 1$

4) При $1 < r < 5$ решений больше 2, т.е. «узелки» на окружности каждая из двух «вершин» будет пересекаться с квадратом в двух местах.

5) При $r = 5$ окружности пересекаться с квадратом в двух местах $(0; 6)$ и $(0; 0)$.

Увеличивая r дальше окружности не пересекут квадрат, значит $\begin{cases} r=1 \\ r=5 \end{cases}$!

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 1 \\ \sqrt{a} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 25 \end{cases}$$

Ответ: 1; 25

~ 2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) + (\sin 3x - \cos 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x \right) + \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 14x - \cos \left(11x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{25 + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{25 + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) + \sin\left(\frac{25 + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \cos\left(25 + \frac{\pi}{4}\right)}{2}}$$

$$3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(25 + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \cos 14x \cos\left(-11x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \cos 14x = 0 \\ \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 11x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{1}{14}\pi n, \\ 11x = \frac{\pi}{4} + \pi n; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{1}{14}\pi n, \\ x = \frac{\pi}{44} + \frac{1}{11}\pi n; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n; \frac{\pi}{28} + \frac{1}{14}\pi n; \frac{\pi}{44} + \frac{1}{11}\pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + x \cdot 2^{64} - x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} = 70 + x \cdot 2^{64} - x$$

$$2^x - (x - 6) \cdot 2^{64} = 70 - x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} - x \cdot 2^{64} = 70 - x$$

$$2^x + (x - 6) \cdot 2^{64} = 70 - x$$

$$128 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$63 + 7 \cdot 2^{64}$$

$$70 + (2^{64}x - x) = 2^x + 6 \cdot 2^{64}$$

$$2^{64} \cdot 7$$

$$7 \cdot 2^{64}$$

$$7 \cdot 2^{64}$$

$$5 + 2^{64} \cdot 65$$

$$5 \cdot 2^{65} = 2^{65} \cdot 32$$

$$2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{65} \cdot 96$$

$$2^{69} + 3 \cdot 2^{65} = 19 \cdot 2^{65}$$

$$70 \cdot 2^{64}$$

$$32 + 3 - 35 \cdot 2^{65} = 70 \cdot 2^{64}$$

$$35 \cdot 2^{60}$$

$$70 \cdot 2^{64}$$

Тасс-расс ар-чир ар-чир $f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{65}$ и

$$g(x) = 70 + (2^{64} - 1)x$$

Они обе возрастающие ~~и имеют~~ на всей области ар. и имеют только две общие точки. Найдём их.

Пусть $x=6$, тогда $f(6) = 2^6 + 3 \cdot 2^{65} = 64 + 6 \cdot 2^{64}$

$$g(6) = 70 - 6 + 6 \cdot 2^{64} = 64 + 6 \cdot 2^{64}$$

В т. с абсциссой 6 функции пересекаются

Пусть $x=70$, $f(70) = 2^{70} + 3 \cdot 2^{65} = 2^{65}(32+3) = 70 \cdot 2^{64}$

$$g(70) = 70 \cdot 2^{64}$$

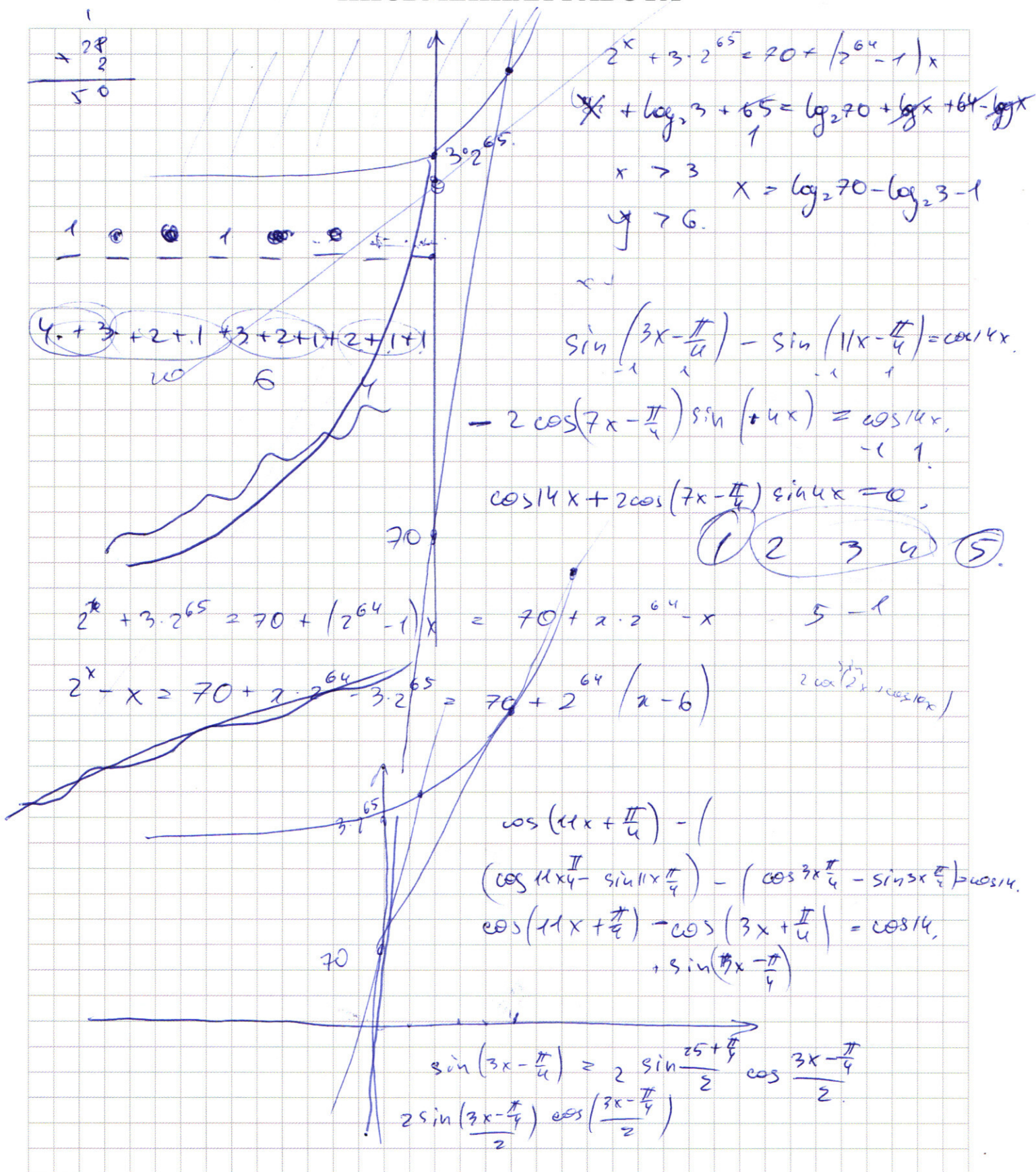
В т. с абсциссой 70 ар-чир пересекаются.

П.и. степень двойки очень большая, но для каждого целого x из промежутка $[6; 70]$ найдётся целое y . П.и. одно из неравенств строгое по всей паре: $70 - 6 - 1 = 63$.

Ответ: 63.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 0 - \cos \pi = 2$$

$$-2 \sin \frac{\pi}{2} \sin -\frac{\pi}{2} = 2$$

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 1$$

$$+ 2 \sin \frac{3\pi}{4} \sin -\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \cos 7x \sin 4x$$

$$\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\sin 0 - \sin \pi = 2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\sin 0 - \sin \frac{3\pi}{2} = 1 = 2 \cos \frac{3\pi}{4} \sin -\frac{3\pi}{4} = 2 \cdot -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\cos 11x - \cos 3x) - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$\cos 10x \cos 4x + \sin$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 10x \cos 4x - \sin 10x \sin 4x)$$

$$(\cos 11x - \sin 11x) - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \sin 11x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos 3x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 3x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos 4x$$

$$\sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(11x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$2 \cos \frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2} = \cos 4x$$

$$2 \cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) \sin (-4x) = \cos 4x$$

$$(\sin 3x - \cos 3x) - (\sin 11x - \cos 11x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \cos 3x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x - \cos 11x \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$

$$\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \geq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x + y-3+x = 6; \\ y = 6. \end{cases} \quad \begin{cases} 2y = 12 \\ y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 3+x \\ y \leq -x+3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x - y+3-x = 6 \\ x = -3, \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = 6. \\ x = -3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 3+x \\ y \geq -x+3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y+3+x + y-3+x = 6 \\ x = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq 3+x \\ y \leq -x+3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y+3+x - y+3-x = 6 \\ y = 0, \end{cases}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a.$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 = a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ (x-4)^2 + (y+3)^2 = a \end{cases}$$

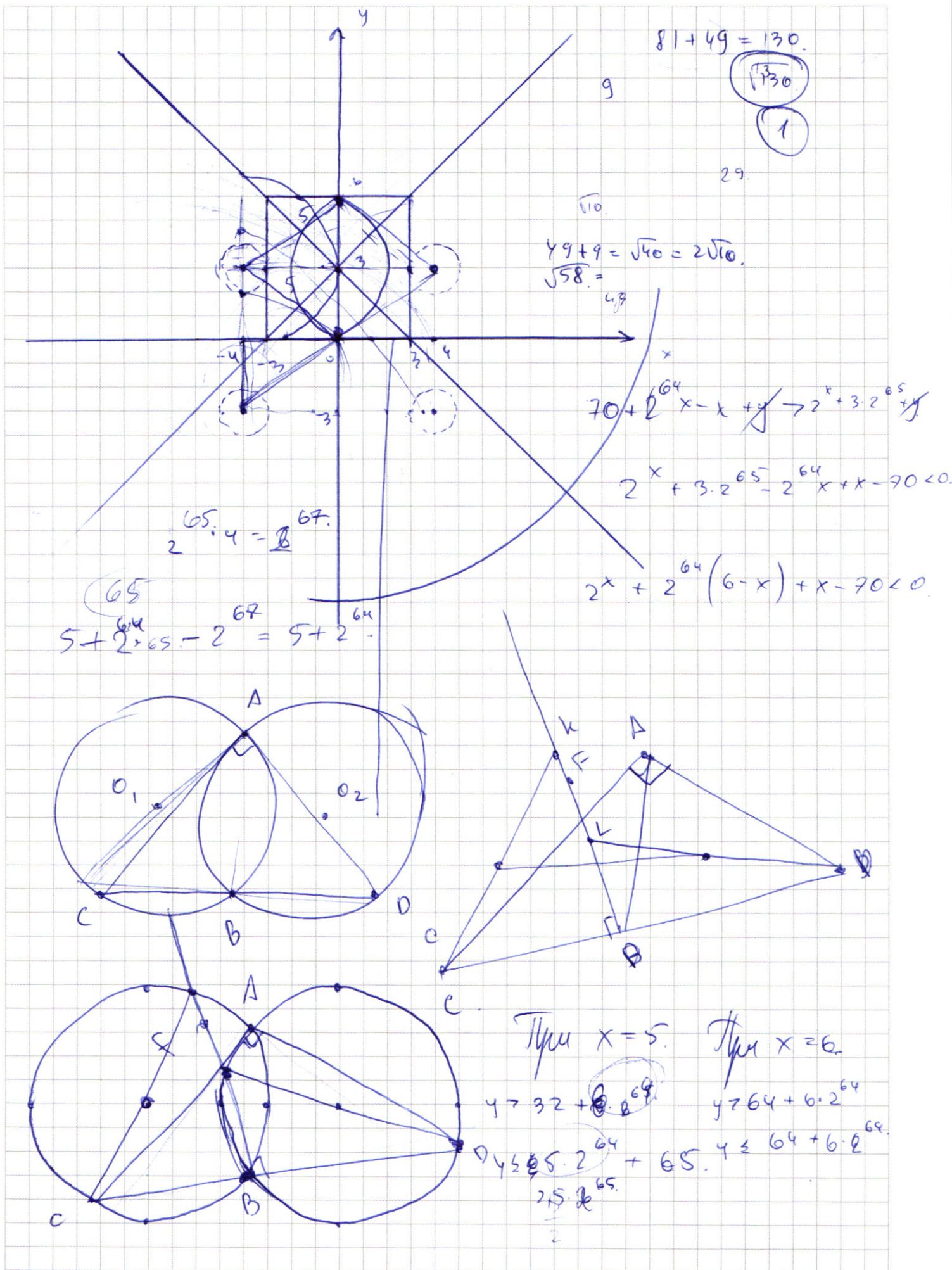
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ (x+4)^2 + (y-3)^2 = a. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ (x+4)^2 + (y+3)^2 = a. \end{cases}$$

$$2 \cos \frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} & (\cos 11x - \sin 11x) \\ & - \sin\left(11x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \\ & \approx \sin\left(3 - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \\ & \approx 2 \cos\left(\frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \sin\left(-\frac{4x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1 + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \mid 5 \\ - 30 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \\ - 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ - 125 \\ - 27 \\ \hline 875 \\ + 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$7! \cdot 5!$$

$$+ 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4! + 3! + 2! + 1$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$5 \cdot 5 \cdot 3$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$6$$

$$5 \cdot 5$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 5 \cdot 5 \end{array}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$3!$$

$$7! (4! + 3! + 2!)$$

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

$$4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 =$$

$$= 19$$

$$\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ 28 \\ - 19 \\ \hline 252 \\ + 28 \\ \hline 532 \end{array}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 3y^2 - 12y + 12 + 4$$

$$(x-2)^2 + 12 - (\sqrt{3}y - 2\sqrt{3})^2 + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 + 3(y-2)^2 = -8$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = y^2 \cdot y \lg y \cdot y \lg y$$

$$y^3 \cdot y^5 \cdot y \lg x = y^2 \cdot y \lg y \cdot x \lg x \cdot y \lg x$$

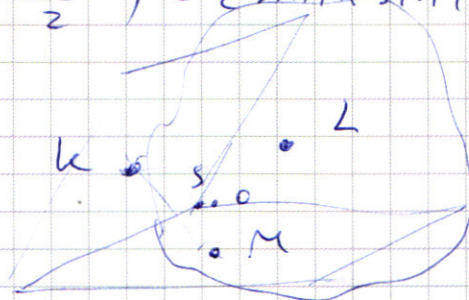
$$x > 0$$

$$y^{\lg y} \cdot x^{\lg x} = y^3$$

$$\cos 11x - \cos 3x = 2 \left(\sin \frac{11x+3x}{2} \right) \sin \left(\frac{11x-3x}{2} \right) = 2 \sin 7x \sin 4x$$

$$\cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$2 \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}}{2} = 2$$



$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy}$$

$$\cos(2 \sin 4x) \quad \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x} \quad \cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$\log_2 8 + \log_2 4$$

$$\lg y^{3 \lg x} = \lg (y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x})$$

$$3 \lg x \lg y = \lg y^{2 \lg y} + \lg x^{\lg x}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

$$3 \lg x \lg y = 2 \lg y \lg y + \lg^2 x$$

$$2 \lg^2 y - 3 \lg x \lg y + \lg^2 x = 0$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg xy} = y^{2(\lg x + \lg y)} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{5 \lg x} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x} \quad (\lg y - \lg x)^2 = \lg x \lg y - \lg^2 y$$

$$y^{3 \lg x} = y^{2 \lg y} \cdot x^{\lg x}$$

$$(\lg y - \lg x)^2 = \lg y (\lg x - \lg y)$$

$$3 \lg y \lg x = \lg y 2 \lg y + \lg^2 x$$

$$(\lg y - \lg x)(2 \lg y - \lg x) = 0$$

$$\lg y = \lg x$$

$$2 \lg y = \lg x$$

$$y = x$$

$$y^2 = x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\cos 11x - \sin 11x) + (\sin 3x - \cos 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 11x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 11x\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x\right) = \cos 14x$$

$$\cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 14x - \cos\left(11x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{14x + 11x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) + 2 \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} + \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} + \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{\pi}{8} + \sin \frac{25x}{2} \cos \frac{\pi}{8} + \cos \frac{25x}{2} \sin \frac{\pi}{8} = 0$$

$$x = y$$

$$y^2 = x$$

$$y^2 - 2y^2 - 4y - 3y^2 + 12y = 0$$

$$-6y^2 + 8y = 0$$

$$y = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$y^4 - 2y^3 - 4y^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$y^3 - 2y^2 - 7y + 12 = 0$$

$$8 - 8 - 14 + 12$$

$$-8 - 8 + 14 + 12$$

$$27 - 18 - 21 + 12$$

$$39$$

$$\cos \frac{23x - \frac{\pi}{4}}{2} = \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\frac{1 + \cos(3x - \frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1 - \cos(25x + \frac{\pi}{4})}{2}$$

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(25x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos \frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2} + \sin \frac{25x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0.$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x.$$

$$-2 \sqrt{2} \sin 4x \left(\sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 14x + 2 \sin 4x \sin \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

