

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

Разложим 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3$;
нам нужно чтобы число было восьмизначным и пр-е его
цифр равное 3375 , тогда составим из множителей 3375 такой
набор чисел A , что $|A| = 8$, а для каждого эл-та A_i выполнено
 $A_i \in [1, 9]$. Т.к. A_i - цифра и она не равна 0 , число пр-е
будет равно 0 , составим очевидный набор $A = \{5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1\}$,
после и другой набор $B = \{5, 5, 5, 9, 3, 1, 1, 1\}$, для него также
выполняется то что пр-е его цифр равно 3375 - это очевидно,
т.к. A и B упорядочены, мы не можем найти еще какие-либо
новые наборы, удовлетворяющие условию по ограничению $A_i \in [1, 9]$,
($5 \cdot 3 > 9$; $3 \cdot 9 > 9$; $5 \cdot 5 > 9$). Посчитаем кол-во чисел которые
можно составить из этих наборов: по комбинаторной
формуле кол-во таких чисел - факториал кол-ва символов,
деленная на пр-е факториалов кол-ва повторяющихся символов;
тогда если S - кол-во чисел, удовл. усл., то
$$S = \frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{3!3!} - \frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3!2!2!} = \frac{8!}{4 \cdot 3!}$$

здесь не будем подставлять его.
Ответ: $\frac{8!}{4 \cdot 3!}$

N2.

~~the~~ $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$, ~~the~~ ~~попробуем~~ ~~применим~~.

$$\frac{1}{2} (\cos 7x \cos 4x + \sin 7x \sin 4x) + \frac{1}{2} (\sin 7x \cos 4x + \cos 7x \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 4x + \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\frac{1}{2} (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\frac{\cos 7x \cdot \sin 45^\circ + \sin 7x \cdot \cos 45^\circ}{\sqrt{2}} \cdot (\cos 4x + \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

Проверим реш:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

N6.

a) Дано:

$$O_{кр1}(O, 5); O_{кр2}(O_2, 5);$$

$$O_{кр1} \cap O_{кр2} = \{A, B\};$$

$$C \in O_{кр1}; D \in O_{кр2};$$

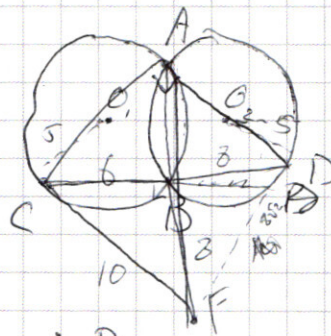
$$B \in CD; \angle CAD = 90^\circ;$$

$$FB \perp CD; BF = BD;$$

$$\text{Найти: } a) CF.$$

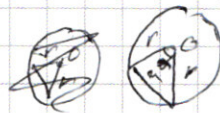
$$b) BC = 6;$$

$$S_{ACF} = ?$$



а) Решение:

1) ~~исх~~ выводим формулу длины хорды:



Для окр с рад. r и хорды, которая отсекает угол α в $\angle$, ~~то~~ длины хорды, (a):

$$a^2 = 2r^2(1 - \cos \alpha)$$

2) $\angle CAD = 90^\circ = \angle CAB + \angle BAD$, они в свою очередь, как вписанные углы в $O_{кр1}$ и $O_{кр2}$ соотв равны:

$$\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CB; \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BD$$

Проведем диаметр, пусть $\angle CB = \alpha$; Тогда $\angle CAB = \frac{1}{2} \alpha$; $\angle CAD = 90^\circ = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \angle BD$
 $180^\circ = \alpha + \angle BD$; $\angle BD = 180^\circ - \alpha$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Идущая из того, что $\angle B = \alpha$, $\angle B'D = 180^\circ - \alpha$ из вышесказанного формулы для длины хорды. (радиус окр. = 5)

$$CB^2 = 50(1 - \cos \alpha) \quad BD^2 = 50(1 + \cos \alpha),$$

4) из т. Пифагора для $\triangle CBF$, так FB -перп.:

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 50 + 50 = 100$$

$$CF = 10$$

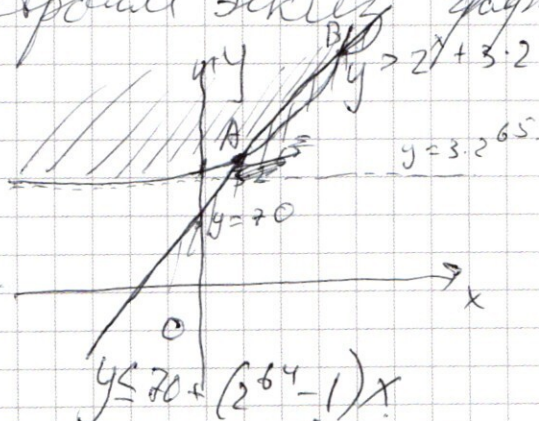
а) Ответ: 10

Решение:

№ 7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{64} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Найдем (x, y) ; построим эскиз графика:



Нужно найти точки A и B, затем посмотреть как
вопрос в целых числах; т.к. $3 \cdot 2^{65} = 6 \cdot 2^{64}$,
выберем т. ф. A: $(6, 64 + 3 \cdot 2^{65})$ и точку B исходя из того;
что при $2^{64} \cdot 6 + 2^{64} \cdot 64 = 3 \cdot 2^{65} + 2^{70}$, тогда B $(70, 2^{70} + 3 \cdot 2^{65})$

Посчитаем кол-во целых пар чисел:
 для каждого $x \in [7; 69]$ количество таких пар
 очевидно $70-x + 2^{64}(x-6) - 2^x$; ~~ответно~~ тогда
 если n -элементов таких пар, то $n = \sum_{x=7}^{69} 70-x + 2^{64}(x-6) - 2^x$;

ответно посчитаем сумму:

$$\sum_{x=7}^{69} 70-x = \frac{63+1}{2} \cdot (63-7+1) = 32 \cdot 63 = 2016;$$

$\sum_{x=7}^{69} 2^x$; мы знаем, что $\sum_{x=0}^n 2^x = 2^{n+1} - 1$; из представлений

шла в двойном виде это очевидно, тогда:

$$\sum_{x=7}^{69} 2^x = 2^{70} - 1 - 2^7 + 1 = 2^{70} - 2^7 = 2^{70} - 128;$$

$$\sum_{x=7}^{69} 2^{64}(x-6) = \sum_{x=1}^{63} 2^{64}x = 2^{64} \sum_{x=1}^{63} x = 2^{64} \cdot \frac{63+1}{2} \cdot 63 = 2^{64} \cdot 2^5 \cdot 63 = 2^{69} \cdot 63;$$

тогда можем посчитать общую сумму:

$$n = \sum_{x=7}^{69} 70-x + 2^{64}(x-6) - 2^x = 2016 + 2^{69} \cdot 63 - 2^{70} + 128 = 2144 + 2^{69} \cdot 63 -$$

$2 \cdot 2^{69} = 2144 + 2^{69} \cdot 61$; т.к точки А и В не включены из-за
 среза первого пер-та в системе, то это число
 и является ответом

Ответ: $2144 + 2^{69} \cdot 61$

NS

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ ((x-4)^2 + (y-3)^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Построим график (1) для
 того чтобы понимать как
 он себя ведет: (раскрываю по модулю)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

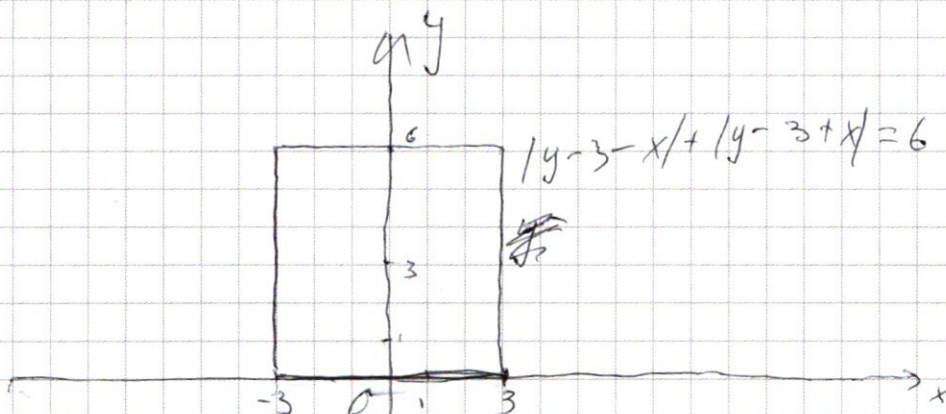


График - квадрат с центром

в $(0, 3)$ с ребрами 6, 6 и $y \in [0, 6]$, $x \in [-3, 3]$

Реш. Для (2) рассмотрим случаи а:

$a < 0$ - нет р., т.к. $(|x|-4)^2 \geq 0$ и $(|y|-3)^2 \geq 0$.

$$a = 0 \quad (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |y|-3=0 \\ |x|-4=0 \end{cases} \begin{cases} y=3 \\ x=\pm 4 \end{cases}$$

~~нет~~ ~~иср.~~

2 р-а, а=0
иср.
нет р-а.

$a \in (0, 25)$: решений будет больше 2:

для $(|y|-3)^2 \in (0, 9]$ всегда будет 2 р-а, т.к. $y \in [0, 6]$ - считим 3 - при $y=3$, $(|y|-3)^2=0$; в остальных случаях подберут 2 значения y , (так-иср. максимум)

для $(|x|-4)^2 \in [1, 16)$ всегда будет 2 р-а т.к. $x \in [-3, 3]$ - считим 0; а при $x=0$, $(|x|-4)^2=16$ - максимум достигается только при $x=0$, в ост. случаях 2 значения x подберут.

Решим на примере 2 переменных
всегда когда $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ у нас есть 1 аи для α и β : $\alpha=0$; $\beta=0$ -

для наших ф-ций мы уже рассм. такой исход и он нам

не получится, $x^2 + y^2 = \max$ только при $|x| = \max$ и $|y| = \max$,
 осталось решить этот случай, т.к. для получения $\max$
 $(|x|-4)^2$ есть только 1 знак x ;

решим это для $x^2 + y^2 = a$, где $a \in (0; \max x^2 + \max y^2)$
 мы можем разложить a несколькими способами,
 тогда решений будет точно больше 2.
 $a = 25$.

достигается только при $(y-3)^2 = 9$; $(|x|-4)^2 = 16$ — максимум,
 $(y-3)^2 + (|x|-4)^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} |y-3| = 3 \\ |x-4| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

2 реш.:
 $(0; -3)$ и $(0; 3)$

$a > 25$ ~~также~~ $a = 25$ было $\max$ этих a -ов, тогда
 при $a > 25$ реш. не будет.
 Ответ: $a = 25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{1/9} = y^2 / y^{x/9} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим (2) отн. x :

$$D = 16(y-1)^2$$

$$x_{1,2} = \{3y, 4-y\}$$

Решим систему x_1, x_2 в (1):

$$\text{ОДЗ: } y \in (0; 4)$$

$$\begin{cases} y^4 / y^{3y} = y^2 / y^{3y^2} & (3) \\ \left(\frac{y^5}{4-y}\right)^{1/9} = y^2 / y^{4y-y^2} & (4) \end{cases}$$

Сведем: $y=4$

$$(3) y^4 / y^{3y} = y^2 / y^{3y^2}$$

$$y^1 \frac{\log y^4}{\log y^2} = y^2 \frac{\log y^3}{\log y^2}$$

$$\sqrt[10]{3y} = \sqrt[10]{3y^2}$$

только $y=0$, но y не входит в ОДЗ

$$\sqrt[10]{4-y} = \sqrt[10]{4y-y^2}$$

$$4-y = 4y-y^2$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \{1, 4\}; 4 \text{ не входит в ОДЗ;}$$

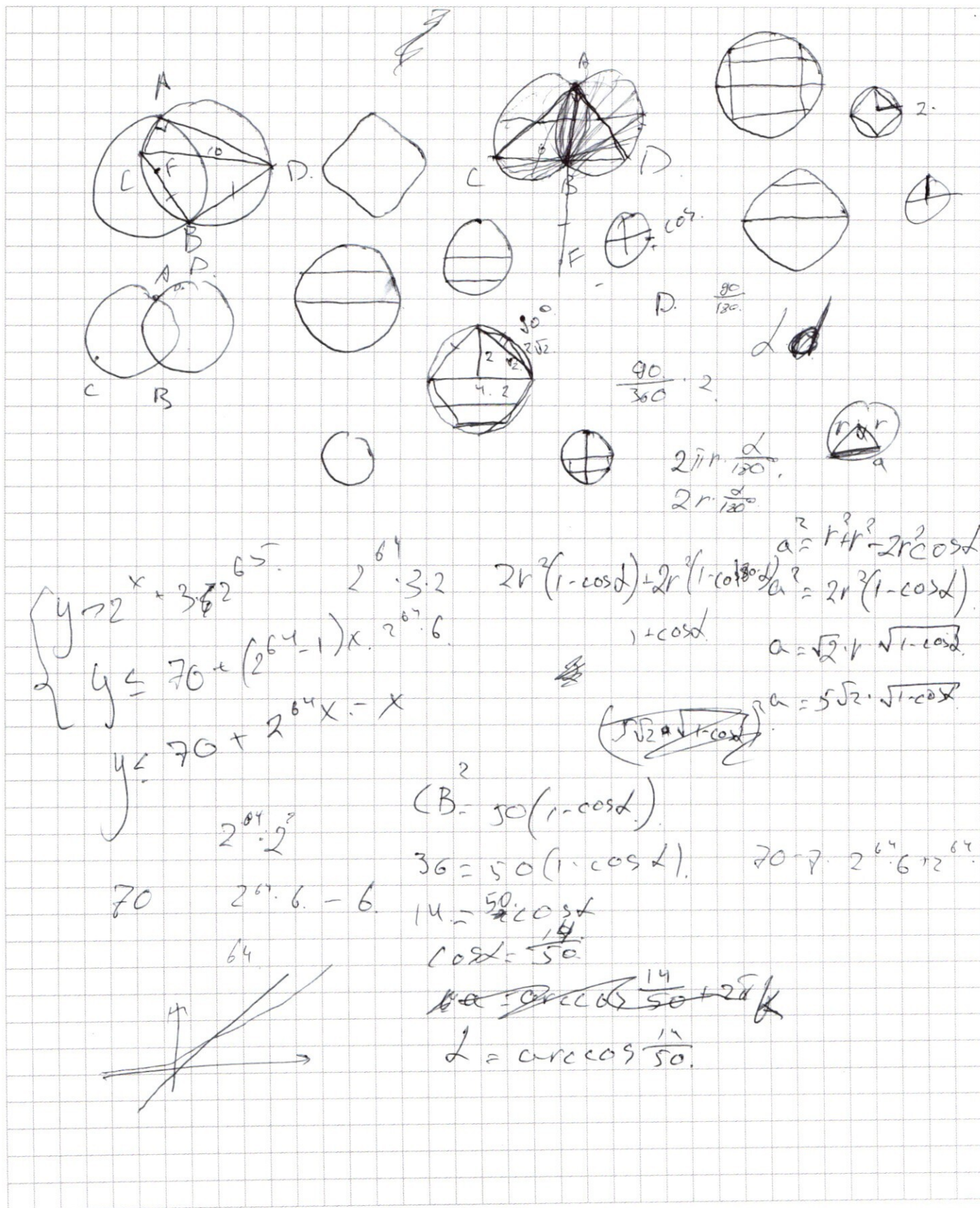
тогда $y=1$; $x=3$; и при $x, 4x$

Ответ: $(3; 1)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$y \leq 70 - x + 2^{64} \cdot 6.$$

$$j \leq \cancel{70} 63 + 2^{64} \cdot 6 + 2^{64}$$

$$2^{64} \cdot 3 \cdot 2^{64}$$

$$2^{64} \cdot 6$$

$$2^{64} + 2^{64} + 2^{64} + 2^{64} + 2^{64} + 2^{64}$$

2

$$\begin{array}{r} 32 \\ \times 63 \\ \hline 192 \\ + 1920 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ + 63 \\ \hline 95 \\ + 135 \\ \hline 2016 \end{array}$$

$\sum$

2^x

$$\sqrt{2^{64} \cdot 6 + 2^{64} \cdot (x-6)}$$

$$70$$

$$2^{64} \cdot 2^6$$

$$2^{64} \cdot 24$$

$$2^{70}$$

$$63 \ 62 \ 61. \quad \frac{63+61}{2}$$

$$62.4$$

$$7 \quad 9$$

$$\sum_3^5 = 2^3 + 2^4 + 2^5 = 111111$$

$$= 8 \cdot 716132 = 56 =$$

$$2^6 - 1 \cdot 2^4 + 1$$

$$64 - 8 = 128$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, showing various derivations and calculations.

Top section:

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\sin d \cos \beta = 2 \cos \beta \sin d$$

$$\sin d \cos \beta = 2 \cos \beta \sin d$$

$$\cos 14x \cos 8x + \sin 14x \sin 8x + \cos 14x \sin 8x$$

$$D = (2y + 4)^2 + 12y^2 - 48y = 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 = 16(y - 1)^2$$

$$\sqrt{D} = 4(y - 1)$$

$$x_1 = \frac{2y + 4 - 4(y - 1)}{2} = \frac{2y + 4 - 4y + 4}{2} = \frac{-2y + 8}{2} = -y + 4$$

$$x_2 = \frac{2y + 4 + 4(y - 1)}{2} = \frac{2y + 4 + 4y - 4}{2} = \frac{6y}{2} = 3y$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$\left(\frac{y^5}{3y}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

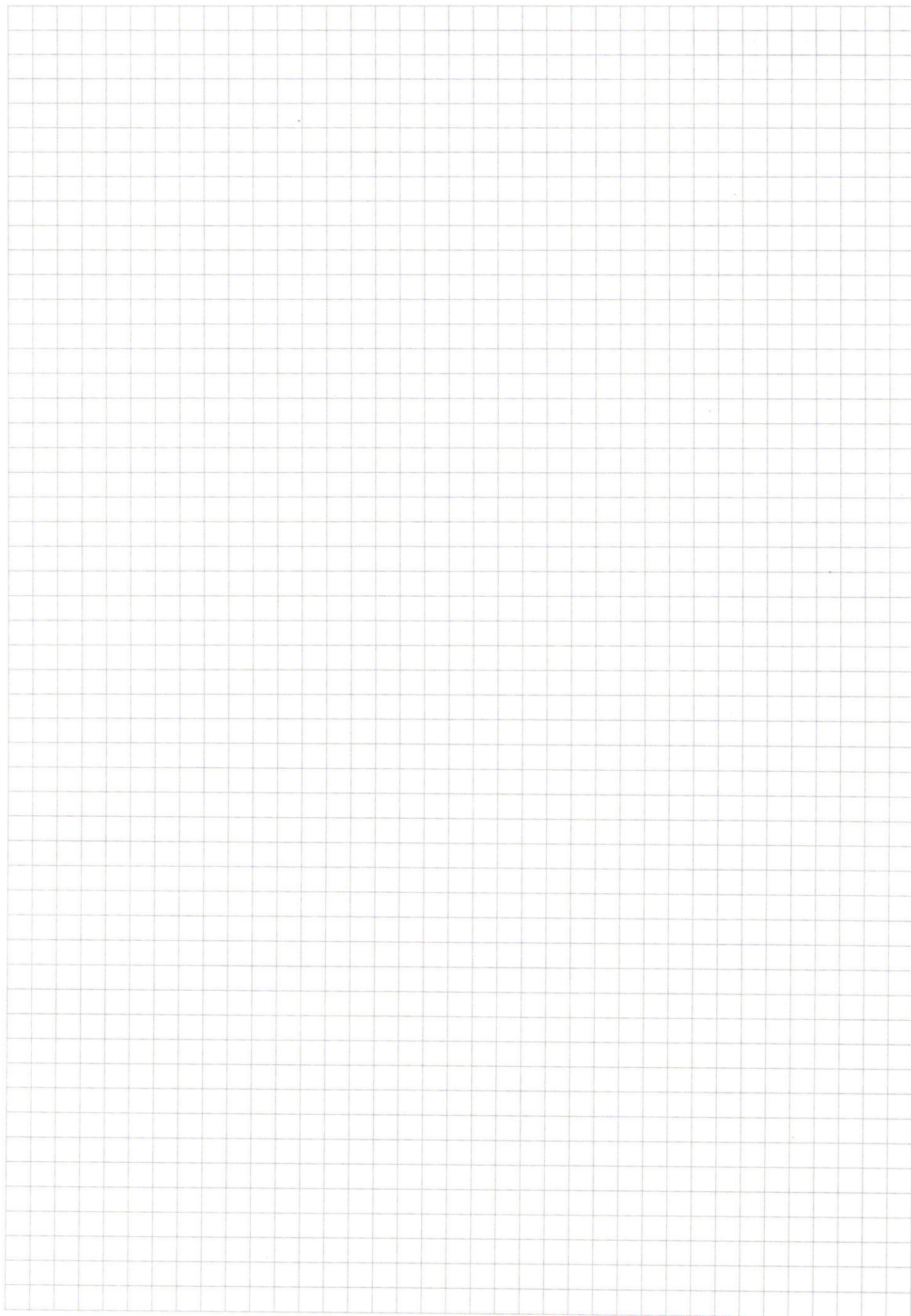
$$\left(\frac{y^4}{3}\right) \lg 3y = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{y^4}{3} = y^2 \lg 3y^2$$

$$\frac{1}{3} = \lg 3y^2$$

Bottom left: A geometric diagram showing a cube with a sphere inside, and a smaller cube inside the sphere.

Bottom right: A diagram showing a sphere with a smaller sphere inside, and a line segment passing through the center of the larger sphere.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ -5 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ -10 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 675 \\ 135 \\ 27 \\ 9 \\ 3 \\ 1 \end{array}$$

$$\cos \alpha - \sin \alpha =$$

$$= \cos(2 -$$

$$5.5533311$$

$$55.593111$$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 22 \\ \hline 275 \\ + 54 \\ \hline 135 \\ \hline 3375 \end{array}$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6.$$

$$(|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 4.$$

$$y \geq 3+x \quad | \quad y \geq 3-x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$1 + (|y|-3)^2 = 4.$$

$$1 + (|y|-3)^2 = 4.$$

$$y \leq 3-x.$$

$$y \leq 3+x$$

$$x=3, y=2.$$

$$1 + (|y|-3)^2 = 4.$$

$$y^2$$

$$|g| = \sqrt{a^2(x-4)^2} + 3$$

$$y-6=6$$

$$y=12.$$

$$-y+6=6.$$

$$y=0.$$

$$-y+3+x+|y-3+x|=6.$$

$$2x=6.$$

$$x=3.$$

$$y-3-x-|y+3-x|=6.$$

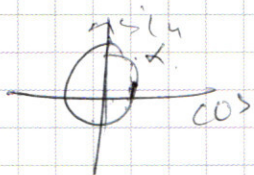
$$x=-3$$

$$|2-6| + |2|=6$$

$$\cos 11x - \cos 3x = \cos 4x \cdot \cos 8x + \sin 4x \cdot \sin 8x$$

$$\sin 3x - \sin 11x = \sin 4x \cdot \cos 8x - \cos 4x \cdot \sin 8x$$

$$= \sin 4x \cdot \cos 8x + \sin 8x \cdot \cos 4x$$



$$\cos 4x \cdot \cos 8x + \sin 4x \cdot \sin 8x + \sin 4x \cdot \cos 8x + \sin 8x \cdot \cos 4x$$

$$\cos 60^\circ - \cos 30^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 4x (\cos 8x + \sin 8x) +$$

$$\frac{1}{2} \cos 7x \cdot \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\alpha + \beta = 14x$$

$$\alpha - \beta = 90^\circ$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta + \alpha - \beta}{2} = 7x + 45^\circ$$

$$\cos 90^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 90^\circ \cdot \sin 30^\circ =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ - \sin 30^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ - \sin 10^\circ$$

$$\sin 20^\circ$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 7x$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 45^\circ$$

$$\sin 60^\circ \quad 120^\circ \quad 30^\circ, 60^\circ$$

$$\sin 90^\circ + \sin 0^\circ = \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 45^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (\cos 7x \cdot \cos 4x + \sin 7x \cdot \sin 4x + \sin 7x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \right.$$

$$\frac{1}{2} (\cos 7x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin 7x (\sin 4x + \cos 4x)) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 4x + \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$



$$\frac{(\sin 7x + 45^\circ + \cos 7x - 45^\circ) (\sin 4x + 45^\circ + \cos 4x - 45^\circ)}{\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}}$$