МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 4.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{65} \\ y \leqslant 70 + (2^{64}-1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

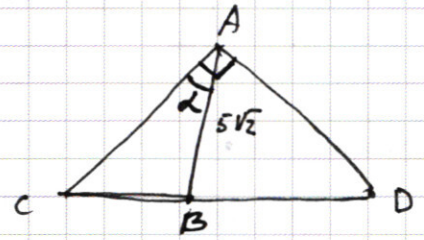
№7 $\begin{cases} y > 2^x + 3\cdot 2^{66} \\ y \le 70 + (2^{64}-1)x \end{cases}$

$\cancel{(1+nx)^x}\ (1+x)^n \ge 1+nx$

$2^x + 3\cdot 2^{66} = 70 + (2^{64}-1)x$

$2^x + 3\cdot 2^{66} = 70 - x + x2^{64}$

$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\,AB\cos\alpha$



$BD = CD - CB$

$CB^2 + (CD-CB)^2 =$

$= \cancel{2CB^2 + CD^2 - 2CDCB} =$

$= \cancel{2(AC^2 + AB^2 - 2ACAB\cos\alpha) + CD^2 - 2CD(\cancel{AC^2+AB^2})CB} =$

$= \cancel{2AC^2 + 2AB^2 - 4ACAB\cos\alpha + 2AC^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}AC^2}$

$FD^2 =$ $\quad CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\,AB\cos\alpha$

$BD^2 = AC^2 + AB^2 - 2ACAB\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$

$CB^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - 2ACAB[\cos\alpha + \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)]$.

$CB^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - 2ACAB(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$AC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2R^2 + 2R^2\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2})$

$CB^2 + BD^2 = 2\cancel{(4R^2}(1 + \sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}))$

$AC^2\ 4R^2(1 + \sin 2\alpha)$ $\quad \cancel{4R^2\sin 2\alpha + 2AB^2 - 4R^2 AB\sin 2\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}$

$2ACAB(\cos\alpha + \sin\alpha) =$ $\quad \cancel{8R^2\cos\alpha}\ 4R^2(1 + \sin 2\alpha) + 2AB^2 -$

$= 2\sqrt{2}R\sqrt{1+\sin 2\alpha}\,5\sqrt{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)$ $\quad - 2ACAB(\cos\alpha + \sin\alpha)$

$4R^2(1 + \sin 2\alpha) - 20R\sqrt{1+\sin 2\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha) = 4R^2 - 2\sqrt{2}ABR\sqrt{1+\sin 2\alpha}(\cos\alpha\ \sin\alpha)$

$= 100(1 + \sin 2\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha))$ $\quad 4R^2(1 + \sin 2\alpha) - 2\sqrt{2}R\ \cancel{\cos\alpha}$

$\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}(\cos\alpha + \sin\alpha)$

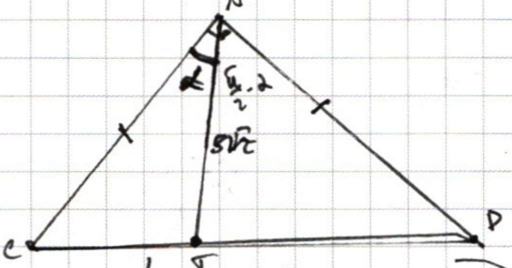
$\sqrt{1+\sin 2\alpha}\,(\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \cos\alpha\sin\alpha)$

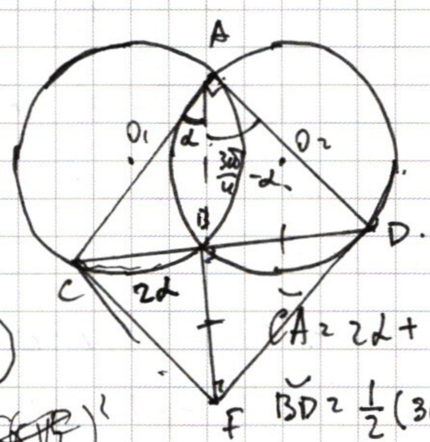
$\sqrt{1 + 2\cos\alpha\sin\alpha} - \cos\alpha - \sin\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$AC^2 + (6\sqrt{2})^2 - 2AC\,6\sqrt{2}\cos 2\alpha.$

$\breve{CA} = 2\alpha + 90^\circ.$

$\cancel{AD^2\ AD = AC^2 + (6\sqrt{2})^2}$

$\breve{BD} = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha - 90^\circ) = \frac{1}{2}(270^\circ - 2\alpha) = \frac{3\pi}{4} - \alpha$

$\cancel{\sqrt{2}AC = AC^2 (6\sqrt{2})^2}$

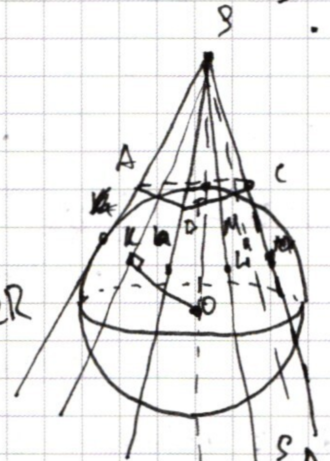
$\alpha + \frac{3\pi}{4} - \alpha = \frac{\pi}{2}$

$CF^2 = (CD - CT)^2 + CT^2 = CD^2 + 2CT\,CD + CT^2 + CT^2 =$

$= 2CT^2 + 2CT\,CD + CD^2 =$ $\cancel{2\alpha + 90^\circ}$

№4 $\angle KSO - ?$

$S_{KLM} - ?$



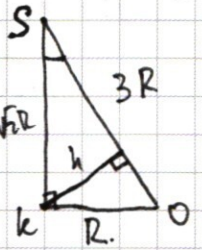
$\frac{ST_1}{ST_1 + 2R} = \frac{1}{2}$

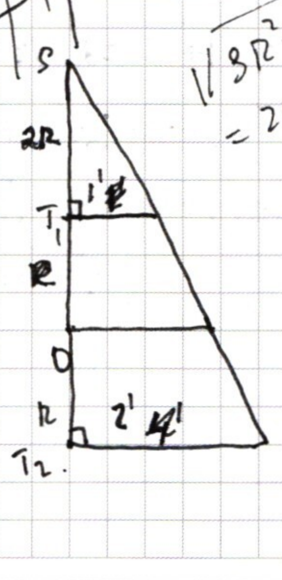
$2ST_1 = ST_1 + 2R$

$ST_1 = 2R$

$h = \frac{2\sqrt{2}R^2}{3R} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$

$\sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$

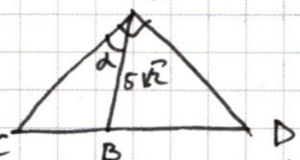




$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

Докажем, что $AF = \cancel{const}\ 10$ независимо от выбора тр-ка CAD (уд-го всем условиям)

Будем хар-ть тр-к $\angle CAB = \alpha$



тогда

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC\cdot AB\cos\alpha$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AD\cdot AB\sin\alpha. \quad (AD = AC)$$

Сложим: $CF^2 = BD^2 + CB^2 = 2AC^2 + 2AB^2 - 2AC\cdot AB(\cos\alpha + \sin\alpha)$

Выразим AC через α : $\angle CO_1A = 2\alpha + \frac{\pi}{2}$

~~После преобразований~~!, тогда у $\triangle CO_1A$: $AC^2 = 2R^2 + 2R^2\sin 2\alpha$.

Подставим и преобразовав получим:
(в черновике)

$$CF^2 = 2AB^2 + 100\left[1 + \sin 2\alpha - \sqrt{1+\sin 2\alpha}\,(\cos\alpha + \sin\alpha)\right]$$

$$CF^2 = 2AB^2 + 100\sqrt{1+\sin 2\alpha}\left(\sqrt{1+\sin 2\alpha} - \cos\alpha - \sin\alpha\right)$$

при этом $\sqrt{1+\sin 2\alpha} = \sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$

Получаем, что

$CF^2 = 2AB^2 + 0$, т.е. $CF = \sqrt{2\cdot 5^2\cdot 2} = 10$.

Отв: 10.

б) Пусть $BC = 6$

тогда $\triangle CBF$ – египетский, и $BF = 8$.

тогда $CD = 14$, тогда $AC = AD = \frac{14}{\sqrt{2}}$

тогда $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC\cdot CF\cdot \sin\angle ACF =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{14}{\sqrt{2}}\cdot 10\cdot\sin\left(\overset{\angle BCF}{\arcsin\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{70}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{70}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{4}{5\sqrt{2}} + \frac{3}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{70}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{5\sqrt{2}} =$

$= 49$

Отв: $S_{AEF} = 49$

$\cos(14x - 3x) - \cos 3x - \sin 11x + \sin(14x - 11x) =$

$= \cos 14x \cos 3x + \sin 14x \sin 3x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 14x \cos 11x - \sin 11x \cos 14x$

$\cos 3x (\cos 14x - 1) - \sin 11x (\cos 14x + 1) + \sin 14x (\sin 3x + \cos 11x)$

$\cancel{(\sin 3x + \cos 3x)(\cos 14x - 1 - \cos 14x - 1)} + \sin$

$\sin$

$\cancel{\cos 11x}$

$\sin(-4x) \sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \cos 14x$

$\sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$

$\cos 11x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 11x - \cos 3x$

$\sin 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x - \sin 11x$

$\cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \cos 3x$

$(\cancel{\cos 11x} - \cos 3x$

$(\cos 11x - 1)(\cos 3x$

$\sin 11x (\sqrt{2} \sin 3x + 1) + \sin 3x$

$-\cos 3x (\cancel{\cos}1 - \cos 14x) - \sin 11x (\cos 14x + 1) + \sin 14x (\sin 3x + \cos 11x)$

$-\cos 3x \frac{\sin 14x}{\sqrt{1 + \cos 14x}} - \sin 11x \frac{\sin 14x}{\sqrt{1 - \cos 14x}} + \sin 14x (\sin 3x + \cos 11x)$

$= \sin 14x \left(\sin 3x + \cos 11x - \frac{\cos 3x}{\sqrt{1 + \cos 14x}} - \frac{\sin 11x}{\sqrt{1 - \cos 14x}} \right).$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1:

$y-3-\cancel{x}+y-3+\cancel{x}=6$.

$2y-6=6$.

$y=6$.

2: $\cancel{y}-\cancel{3}-x-\cancel{y}+\cancel{3}-x=6$.

$x^2=-6$ - решений нет

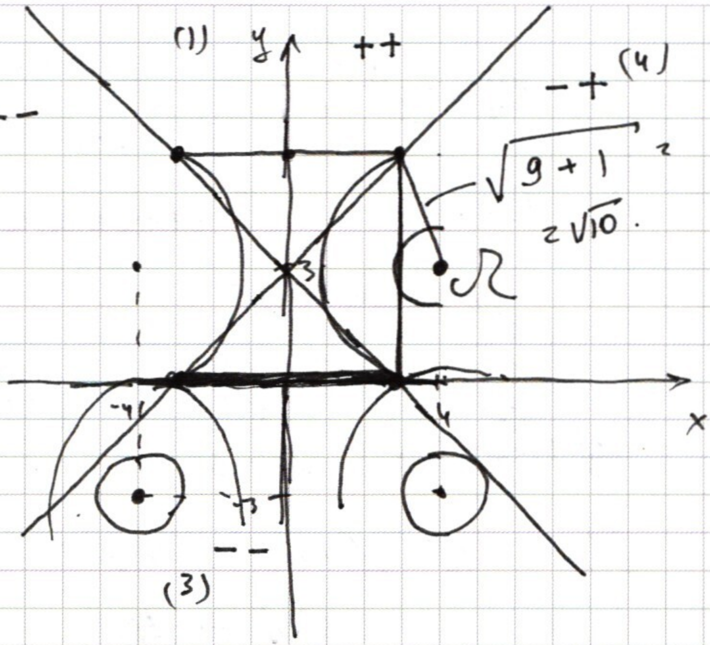
3: $-y+3+x-y+3-x=6$.

$-2y+6=6$.

$y=0$.

4: $\cancel{y-3-x}-\cancel{y}+\cancel{3}+x+\cancel{y}-\cancel{3}+x=6$.

$x=3$



При $a=10$ мы имеем уже 4 решения

до $a=10$, но при $a>1$ - мы имеем два.

решения от окр-ти Ω

Отв: $a\in(1;10)$

№1 $3375 \mid 5$, 675; $675 \mid 5$, 135; $135 \mid 5$, 27

$27\cdot126$; $126\cdot27=3375$

$3^3\cdot5^3\cdot1$

В числе присутствуют 3 пятерки.

556 .....   333.

39

Может присутствовать комбинация 333 или 39

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики) остальные места занимают единицы.

Будем считать так:

1) сначала мы расставим 6ки всеми возможными способами.

$$C_8^5 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{6} = 56$$ способов.

2) Далее, в оставшиеся слоты мы добавляем

а) 3 тройки: (т.к. 3 слота заняты)

а) $\cancel{C_6^3}$ $C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 1\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 10$.

б) Для 9 и 3:

$\frac{5\cdot 4}{2} = 10$. $C_5^2 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1} = 10$

Все эти варианты умножаем на 56! и складываем:

$$56\cdot 10 + 56\cdot 10 = 56\cdot 20 = 1120$$

Отв: 1120

$\sin 3x - \cos 3x = \cancel{2\sin}\ \sqrt{2}($

$\cos(14x-3x) = \cancel{\cos 14x}\ \cos 14x\cos 3x + \sin 14x\sin 3x$

$\sin(14x-3x) = \sin 14x\cos 3x - \cos 14x\sin 3x$

$\cos 14x\cos 3x + \sin 14x\sin 3x - \cos 3x + \sin 14x\cos 3x + \cos 14x\sin 3x + \sin 3x$

$\sin 3x(\sin 14x + \cos 14x + 1) + \cos 3x(\cos 14x - \sin 14x - 1)$

$\sin 3x(\cancel{\cos 14x}$.

$\sqrt{2}\cos 14x = \sqrt{2}(\cos(14x+\frac{\pi}{4}) - \sin(14x+\frac{\pi}{4}))$

$\sqrt{2}\cos 14x + \sqrt{2}\sin 14x - \sqrt{2}\sin 14x$

$\sqrt{2}[\cos(14x-\frac{\pi}{4})] - \sqrt{2}\sin 14x$

Тогда все высоты этих фигур попадут в одну точку O'. В таком случае $(KLM) \perp SO$, поэтому

площадь сечение S_{KLM} ~ данным в условии сечением.

пл-ю (KLM) Высота конуса для $S_{KLM} = SP = SK \cos \angle KSO = \frac{R^2\sqrt{2}}{3} \cdot \ldots =$

$= \frac{8}{3} R$

Таким образом

$$\frac{1}{S_{KLM}} = \frac{2R}{\frac{8}{3}R} \qquad S_{KLM} = \frac{\frac{8}{3}R}{2R} = \frac{4}{3}$$

Отв: $\arcsin(\frac{1}{3})$; $S_{KLM} = \frac{4}{3}$

№3 $\begin{cases} \left(\frac{y^6}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ \end{cases}$

$y^{6\lg x} = x^{\lg x} y^{2\lg xy}$.

$y^{6\lg x} = \cancel{10}$

$\cancel{y}$ $\cancel{x:10}^{\lg 10}$

$1 = \cdot$

$y^{6\lg x} = 10^{\lg^2 x} y^{2\lg xy}$

$y^{6\lg x - 2\lg xy} = 10^{\lg^2 x}$

y

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

либо (случай, когда $\breve{AC} = \breve{AD}$, но тот $\breve{AD}$, которая пересекает $\breve{AC}$ только в точке A.

$\angle BAD = \frac{1}{2}\left(2\omega - 2\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ $(= \breve{BD})$

$\angle BAD = \frac{3\pi}{4} - \alpha$ $\frac{1}{2}\left(2\omega - 2\alpha - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{8}\right) = \frac{1}{2}(\omega - 2\alpha) = \frac{\omega}{2} - \alpha.$

Но $\alpha + \frac{3\omega}{4} - \alpha \neq \frac{\omega}{2}$ $(\angle CAD = 90^\circ) \Rightarrow$

этот случай отбрасывается, когда

Отв: Ю.

№4

1) $\exists T$ - точка пер-я SO и сферы

пр-ков,

коэф. подобия для ~~конусов~~

образовывающих пер-ем

пл-тей пер-ных SO и плос-ей

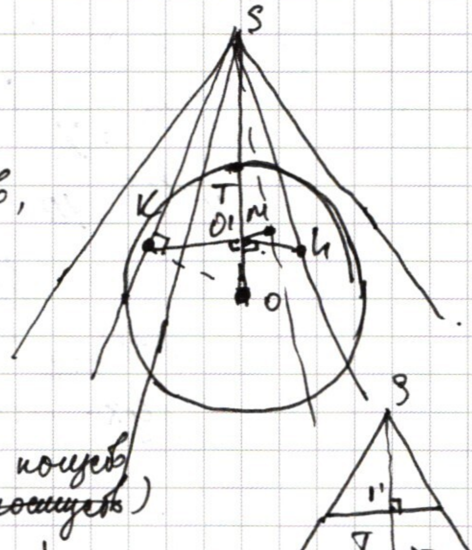
окр-ти равен 1×2 или 2

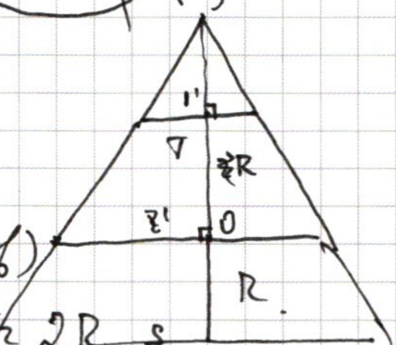
(они подобны, как основание ~~конусов~~ конусов)

таким образом $\frac{ST}{ST+2R} = \frac{1}{2}$

(отн-е высот конусов)

$2ST = ST + 2R$ или $ST = 2R$

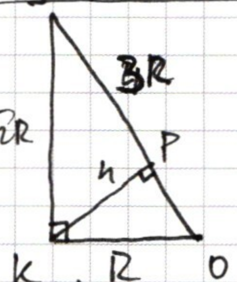




Внимаем тр-к $\triangle SKO$

$\angle SKO = 90^\circ$, т.к. SK касается сферы,

+ отсюда следует, что $KO = R$



из $\triangle SKO$ получаем: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$.

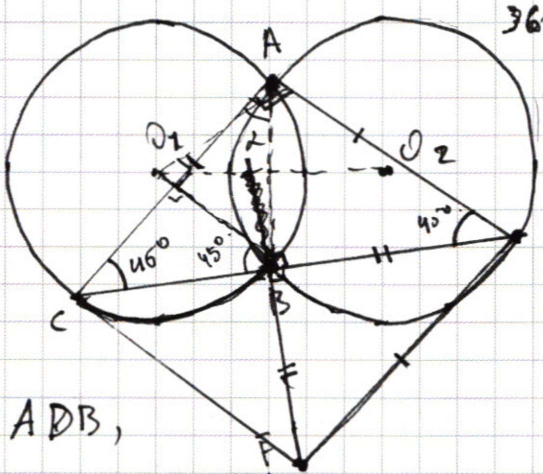
$\angle$ KP - высота $\triangle SKO$ $KP = SK \sin(\angle KSO) = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Понятно, что $\triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$ по двум ~~сторонам~~ сторонам углам

и ~~стороне~~ углу (90°) $(SO$ - одинаков$)$ $\angle SKO$ и т.д. $= 90^\circ$ $KO = OM = OL = R$

$R=5.$

$|CF|-?$



$\breve{AC}-45^\circ$

$360^\circ-\breve{AC}-45^\circ$

$\breve{AC}-45^\circ$

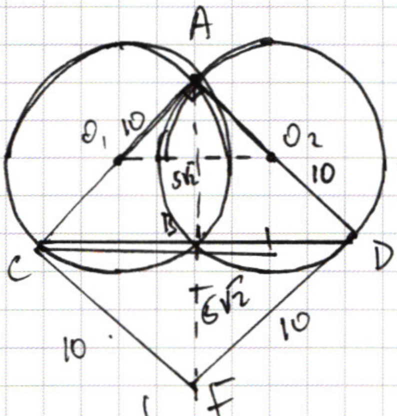
1) Дуги $\breve{AB}$ равны, т.к. радиусы окр-тей равны

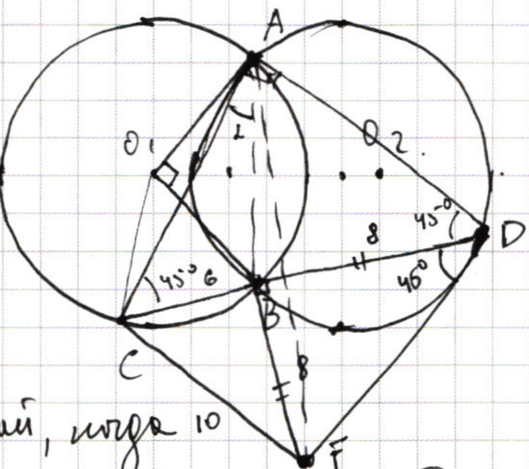
тогда, $\angle ACB=\angle ADB$,

как опирающиеся на равные дуги равных окр-тей

т.к. $\angle CAD=90^\circ$, то $\angle ACD=\angle ADC=\frac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$.

сл-но $\breve{AB}=90^\circ_{(2\cdot 45^\circ)}$, тогда $\angle AO_1B=\cancel{2\cdot 45^\circ}=90^\circ$, как центральный, тогда из Δ-ка AO_1B получаем, что $AB=5\sqrt{2}$ $(R\sqrt{2})$





Подходящий случай, когда 10

CA и AD совпадают с центрами окр-тей, тогда легко найти $CF=10$

~~Докажем, что это единственный возможный случай~~ ~~Пусть $\angle CAB=\alpha$, тогда $\breve{CB}=2\alpha$.~~

~~(ΔACD - р/б прямоуг.)~~

~~т.к. $AC=AD$, то $\breve{AC}=\breve{AD}$, тогда.~~ ~~легко~~

$\angle CAB=\angle BAD=\alpha=45^\circ$ – это есть наш случай

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\cos(14x-11x) = \cos 14x \cos 11x + \sin 14x \sin 11x}$

$\cancel{\cos(\sin(14x-11x) = \sin 14x \cos}$

$\cancel{\sin(14x+11x) = \sin 14x \cos 11x + \sin 11x \cos 14x}$

$\cancel{\cos 11x - \cos 11x \cos 14x \mp \sin 14x \sin 11x - \sin 11x + \sin 14x \cos 11x + \sin 11x \cos 14x}$

$\sin 11x(\cos 14x - \cancel{\sin 14x} - 1) + \cos 11x(\cos 14x + \sin 14x + 1) =$

$= \sqrt{2}\cos 14x$

№3 $\begin{cases} \left(\frac{y^6}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$

$D = (2y+4)^2 - 4(-3y^2+12y) =$

$= 4y^2 + 16y + 16 + 12y^2 - 48y = 16y^2 - 32y + 16 =$

$= 16(y^2 - 2y + 1) = 16(y-1)^2$

$D \geq 0$ только при $y = 1$

$x^2 - 2x - 4x - 3 + 12 = 0.$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$x = 3$

Под-ем в ур-е(1):

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = \cancel{y}\, 1^{2\lg 3}$ $\quad 3^{-\log_{10} 3} \neq 1$

Отв: $\varnothing$

№6

№3 $\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2\lg xy} \\ x^2-2xy-4x-3y^2+12y=0. \end{cases}$

$D = \cancel{4y}(2y+4)^2-4(-3y^2+12y) =$

$= 4y^2+16y+16+12y^2-48y =$

$= 16y^2-36y+16 = 16(y^2-2y+1) =$

$= 16(y-1)^2$

Единственное решение при $y=1$ иначе

$\cancel{x} = x^2-2x-4x-3+12=0.$ $9-6-12-3+12=0.$

$x^2-6x+9=0.$

$\cancel{x} = (x-3)^2=0.$

Единственное реш-е его ур-я: $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$

Под-ем: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\lg 3} = 1^{2\cdot\lg 3}.$

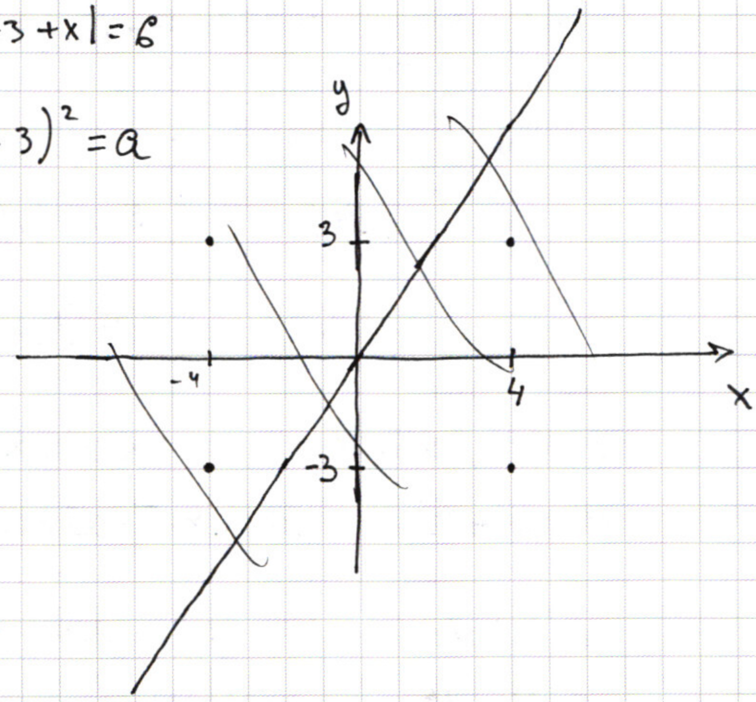
$3^{-\lg 3} \neq 1$

Ов: $\varnothing$

№5 $\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6 \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$

$y=\cancel{3x}$ $y=-x+3.$

$y=x+3.$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin\frac{3x-11x}{2}\sin\frac{11x+3x}{2} + 2\sin\frac{3x-11x}{2}\cos$

$\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x - \sin 11x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin\frac{3x-11x}{2}\sin\frac{3x+11x}{2} + 2\sin\frac{3x-11x}{2}\cos\frac{3x+11x}{2} = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin(-4x)\sin 7x + 2\sin(-4x)\cos(7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin(-4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin(-4x)[\sqrt{2}\cos(7x - \frac{\pi}{4})] = \sqrt{2}\cos 14x.$

$2\sin(-4x)\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = 2\cos 7x \sin 7x$

$\sqrt{2}\left(\frac{\cos 11x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 11x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(11x + \frac{\pi}{4})\right)$

$\sqrt{2}\left(\frac{\sin 3x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\left(\cancel{3x}\cos(3x + \frac{\pi}{4})\right)$

$\sqrt{2}\left(\cos(11x + \frac{\pi}{4}) - \cos(3x + \frac{\pi}{4})\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$\sqrt{2}\left(2\sin\frac{3x-11x}{2}\sin\left(\frac{14x + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\cos^2 7x - 1$

$2\sin(-4x)\sin(7x + \frac{\pi}{4}) = \cancel{\sin 7x \cos}$

$\cos 11x - \cos 14x = \cos 3x\cos 11x - \sin 3x \sin 11x$

$\cos 11x - \sqrt{2}\cos 3x\cos 11x - \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2}\sin 3x\sin 11x - \sin 11x = 0$

$2\sin(4x)\cos(7x - \frac{\pi}{4}) = \cancel{2\sin} - 2\cos 7x\sin 7x.$

$2\sin(11x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x + \frac{\pi}{4}) = -2\cos 7x \sin 7x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin(-4x)\sin(7x) + 2\sin(4x)\cos(7x) = \sqrt{2}\cos 14x$

$2\sin(-4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$.

$2\sin(-4x)(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

1) $\cos 7x + \sin 7x = 0$.

$\cancel{7x =}$ $\sin(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

$7x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}k, k \in \mathbb{Z}$

2) $2\sin(-4x) - \sqrt{2}\cos 7x + \sqrt{2}\sin 7x = 0$.

$\sqrt{2}\sin 4x + \cos 7x - \sin 7x = 0$.

$\sqrt{2}\sin 4x + \sqrt{2}\cos(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

$\sin 4x + \cos(7x + \frac{\pi}{4}) = 0$.

$\cancel{2\sin \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(7x + \frac{\pi}{4}) = 0}$.

$\cos(\cancel{\frac{\pi}{2} - 4x}) = \sin(-4x) = \cos(7x + \frac{\pi}{4})$

$\cos(\frac{\pi}{2} + 4x) = \cos(7x + \frac{\pi}{4})$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} + 4x + 2\pi k = 7x + \frac{\pi}{4}. \\ -\frac{\pi}{2} - 4x + 2\pi k = 7x + \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ 11x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отв: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}. \\ x = -\frac{3\pi}{44} + \frac{2}{11}\pi p, p \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)