

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.
1) Разложим число 3375 на множители.
 $3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2) Возможные варианты цифр
в числе:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$
(единицы не влияют на представление)

б) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
8.

N_1 - кол-во чисел из первого набора

N_2 - кол-во чисел из второго набора

$$N_1 = \overline{P}_1(\underbrace{3; 3; 2}_8) = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560.$$

$$N_2 = \overline{P}(3; 1; 1; 3) = \frac{8!}{3! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3!} = 1120$$

$$N_0 = N_1 + N_2 = 560 + 1120 = 1680.$$

Ответ: 1680 чисел.

I

№5.
рассмотрим II уравнение:

$$(111 - 4)^2 + (111 - 3)^2 = a$$

чтобы построить этот график необходимо:
построить график уравнения

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a \quad \text{в I четверти,}$$

а затем отобразить симметрично
Оси Ox ; Oy ; и точки O .

Это график окружности;

$O_1(4; 3) \Rightarrow$ будут центры $O_2(-4; 3)$
 $R = \sqrt{a}$. $O_3(-4; -3)$
 $O_4(4; -3)$.

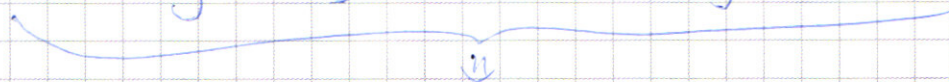
II. Рассмотрим первое уравнение
 $|y-3-x| + |y-3+x| = 6$.

$$1) y-3-x=0$$

$$y = x+3$$

$$2) y-3+x=0$$

$$y = 3-x$$



Выражения под модулем меняют
знак при прохождении чрез

$$y = x+3$$

$$y = 3-x$$

Рассмотрим случаи.

$$1) \begin{cases} y \geq x+3 \\ y \geq x-3 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y \leq x+3 \\ y \leq x-3 \end{cases}$$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $y > x + 3$

$y < x - 3$

$y - 3 - x - y + 3 - x = 6$

$-2x = 6$

$x = -3$

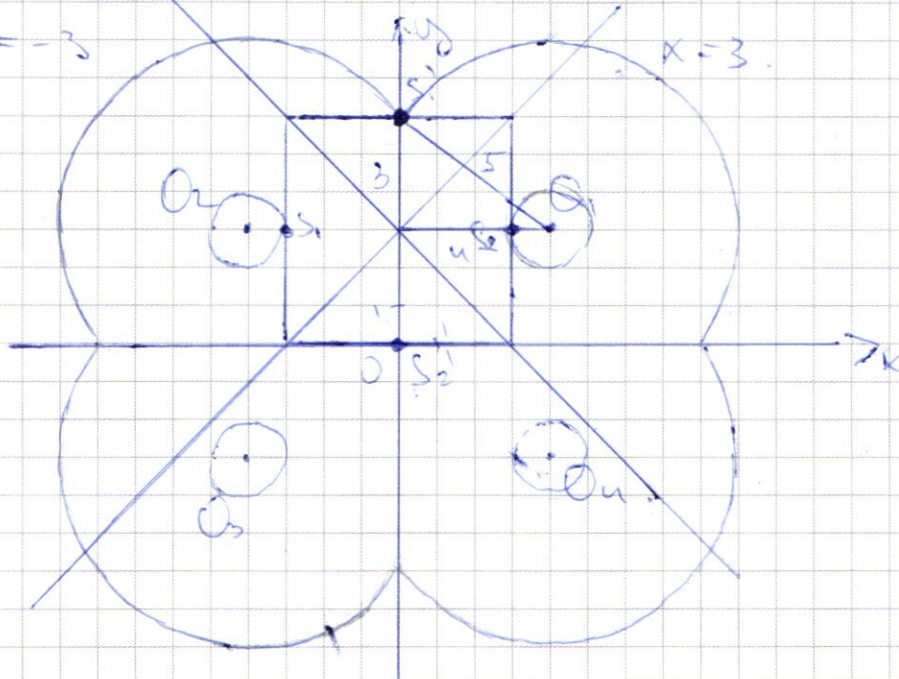
4) $y < 3 + x$

$y > 3 - x$

$-y + 3 + x + y - 3 + x = 6$

$2x = 6$

$x = 3$



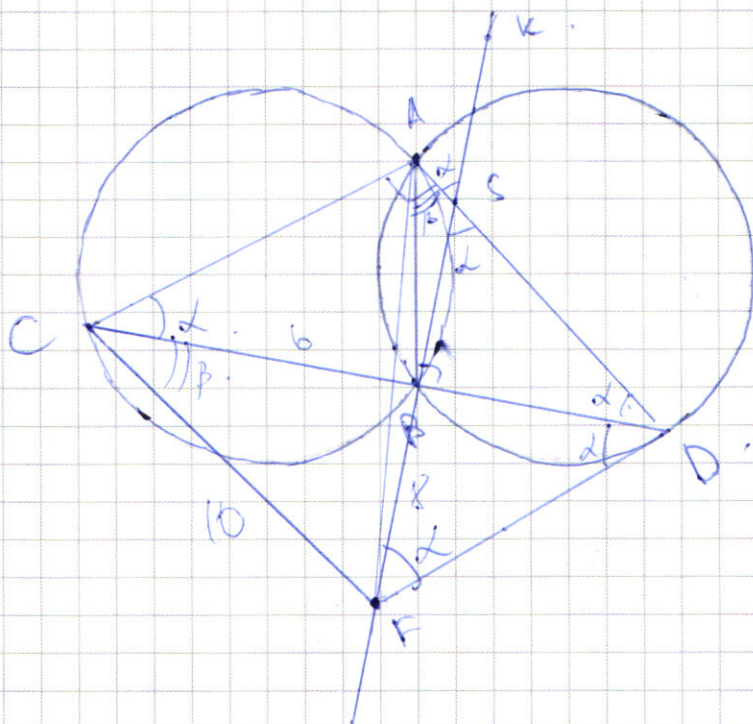
чтобы было 2 решения подходят варианты:

1) $a = 1$ S_1 и S_2 — точки касания.

2) $a = \sqrt{5}$ S_1' и S_2' — решение.

Ответ: $\begin{cases} a = 1 \\ a = \sqrt{5} \end{cases}$

и 6.



Пусть:
 $\angle ACB = \alpha$.

1) заметим: $KS \perp CD$ | $\angle ACB = \alpha$
 $AS \perp CA$ | $\Rightarrow \angle ASK$
 как углы со взаимно перп. сторонами. $\Rightarrow$
 $= \angle ASK = \alpha$

2) $\angle BSD = \angle ASK = (\text{верт})$
 $= \alpha$.

3) $\angle ACB = \angle ADB$ (углы опираются на равные дуги в равных окр.)
 $\angle ADB = \alpha$.

4) $\triangle CAD$ - тупоугольн.; $\angle ACB = \angle ADB \Rightarrow$
 $\Rightarrow \triangle CAD$ - равнобедр. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle \alpha = 45^\circ$.

5) рассмотрим $\triangle FBD$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{l} FB = BD \\ FB \perp BD \end{array} \quad (\text{по усл.})$$

$\triangle FBD$ — прямоугольный, равнобедренный $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = \alpha$

б) в $\triangle CAB$ по Т. синусов.

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R = 2.5.$$

$$\frac{2AB}{2} = 2.5.$$

$$AB = 5\sqrt{2}.$$

з) Пусть $\angle BAD = \beta$.

в $\triangle ACB$ пользуемся Т. синусов.

$$\angle CAB + \angle B = 90^\circ$$

$$\sin \angle CAB = \cos \beta.$$

$$\frac{CB}{\cos \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha}.$$

$$CB = \frac{2.5\sqrt{2} \cdot \cos \beta}{1} = 10 \cos \beta.$$

г) Т. синусов для $\triangle ABD$.

$$\frac{BD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha} \Rightarrow BD = \frac{2.5\sqrt{2} \cdot \sin \beta}{1} = 10 \sin \beta.$$

$$BD = BF \text{ (погл)} \Rightarrow BF = 10 \sin \beta.$$

9) $\triangle CBF$ - прямоугольный.

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} \text{ (по Т. Пиф.)}$$

$$CF = \sqrt{10^2 \cdot \sin^2 \beta + 10^2 \cdot \cos^2 \beta} = \sqrt{10^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)} =$$

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ по соотн. триг. тождеств.

$$= 10.$$

II

1) $BC = 6.$

$$BC = 10 \cos \beta = 6$$

$$\cos \beta = \frac{3}{5}.$$

$$\beta < \alpha \Rightarrow \beta < 45^\circ.$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

$$BF = 10 \cdot \sin \beta = \frac{40}{5} = 8.$$

$$\sin(\angle CBF) = \sin \frac{4}{5} \Rightarrow \angle CBF = \beta$$

2) $\angle ABC = \alpha + \beta$ (внеш. угол $\triangle ADB$)

$$\sin \angle ABC = \sin 180^\circ \sin(180^\circ - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta).$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

$$AC = \frac{AB \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} = \frac{25 \sin(\alpha + \beta)}{\frac{4}{5}} = 10 \sin(\alpha + \beta).$$

$$S_{\triangle CBF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(\alpha + \beta) = 5 \sin^2(\alpha + \beta) \cdot 10 =$$

$$= 50 \sin^2(\alpha + \beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{4\sqrt{2}}{10} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

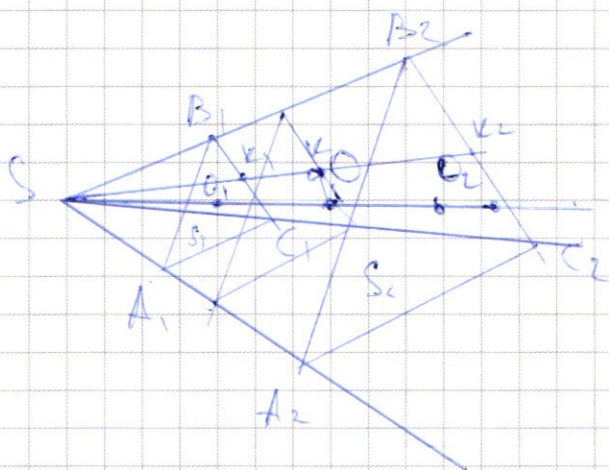
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{ACE} = 50 \cdot \left(\frac{252}{10}\right)^2 = \frac{50 \cdot 49 \cdot 2}{100} = 49 \text{ см}^2.$$

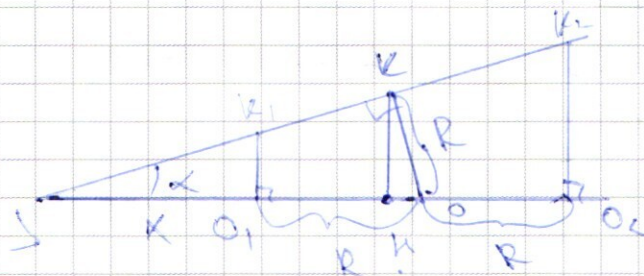
Ответ: $CF = 10 \text{ см}$

$$S_{ACE} = 49 \text{ см}^2.$$

и.ч.



рассмотрим также KSO .



$$K_1O_1 \perp SO \quad (\text{т.к. } K_1O_1 \text{ лежит в п. перп. } SO)$$

$$K_2O_2 \perp SO \quad (\text{аналогично}).$$

пусть $SO_1 = x$; $KO = R$ - радиус шара.

$O_1 O_2 = O O_2 = R$. т.к. O_2 и O_1 точки касания
плоскости и шара.

т.к. $S_2 / S_1 = 4$; $\triangle A_2 B_2 C_2$ подобен $\triangle A_1 B_1 C_1$

$$k = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = 2.$$

$$\frac{R_1 O_1}{R_2 O_2} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{2R + x}{R + x} = \frac{2}{1}$$

$$2x = 2R + x.$$

$$x = 2R.$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{x + R} = \frac{R}{3R} = \frac{1}{3}.$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

II плоскость ABC - проходит через

т. K ; M ; L

аналогично пункту I $\angle MSO = \arcsin \frac{1}{3} =$
 $= \angle LSO.$

↓

если опустить перп. KH_1 ; LM_2 ;
 MN_3 на SO

точки H_1 ; M_2 ; N_3 - совм. в т. H .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\text{нх}} = S_{\text{вс}}$$

$$\Delta S_{\text{ABC}} \text{ состоит из } \Delta S_{\text{ABC}_1}$$

↓

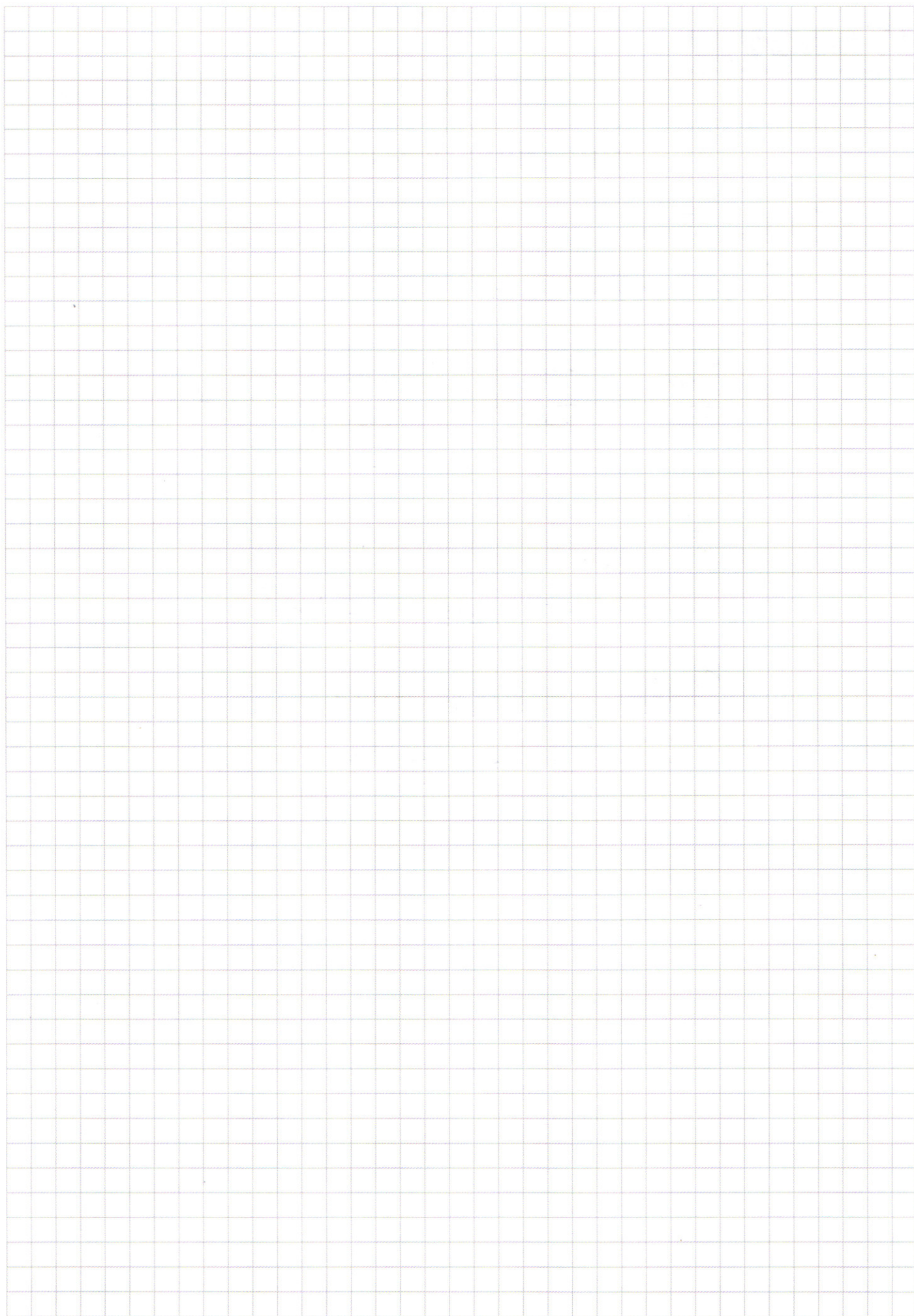
$$\frac{S_{\text{ABC}}}{S_{\text{ABC}_1}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{(R \cdot \cos \alpha \sin \frac{1}{3})^2}{\left(\frac{2R}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{16}{9}$$

$$S_{\text{ABC}_1} = 1 \Rightarrow S_{\text{ABC}} = \frac{16}{9} \text{ кг}^2$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$S_{\text{ABC}} = \frac{16}{9} \text{ кг}^2$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 15} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 675 \overline{) 15} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array} \quad 27 = 3^3$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

возможные наборы цифр.

$$(5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1)$$

количество вариантов можно посчитать как количество перестановок с повторениями.

$$N_1 = \overline{P}(3, 3, 2) =$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6 \cdot 2} =$$

$$= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{6} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

для 2 комплекта.

$$N_2 = \overline{P}(3, 1, 1, 3) =$$

$$= \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 6} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 =$$

$$= 56 \cdot 20 =$$

$$= 1120$$

$$N_0 = N_1 + N_2 = 560 + 560 = 1120$$

Задание: 1680 вариант 2 и 2111.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} = y^{2(\lg x + \lg y)} \quad \begin{matrix} x > 0 & xy > 0 \\ y > 0 & y^5 > 0 \end{matrix}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 4y^2 + 12y = 0$$

$$x(x-4) - 3y(y-4) - 2xy = 0$$

$$a^{\log b} = a^{\frac{\log b}{\log a}} = b^{\frac{1}{\log a}} = b^{\log a}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} &= x^{\lg \frac{y^5}{x}} = x^{5 \lg y - \lg x} = \\ &= \frac{x^{5 \lg y}}{x^{\lg x}} \end{aligned}$$

$$y^{\lg x^2 y^2} = x^2 y^2 \lg y$$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = a$$

$$(y-3-x+1) + (y-3+x) = 6$$

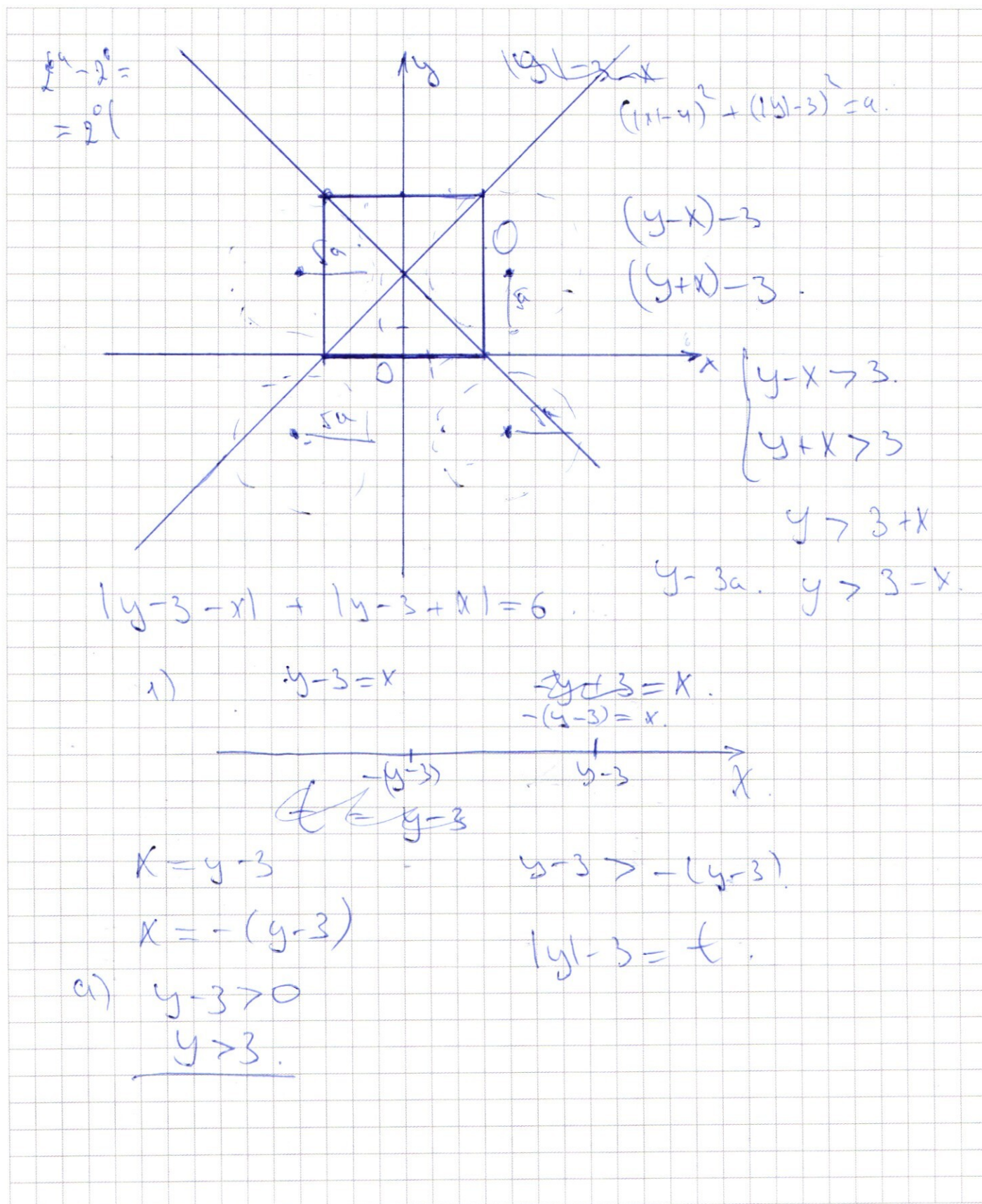
решим уравнение

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

окр.

$$y = O(4; 3) \quad R = \sqrt{a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6.$$

$$2y - 6 = 6$$

$$2y = 12$$

$$y = 6.$$

$$2) \begin{cases} y > 3 + x \\ y < 3 - x \end{cases}$$

$$y - 3 - x - y + 3 - x = 6.$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3.$$

$$3) \begin{cases} y < 3 + x \\ y > 3 - x \end{cases}$$

$$y > 3 - x.$$

$$-y + 3 + x + y - 3 - x = 6.$$

$$2x = 6$$

$$x = 3.$$

$$4) \begin{cases} y < 3 + x \\ y < 3 - x \end{cases}$$

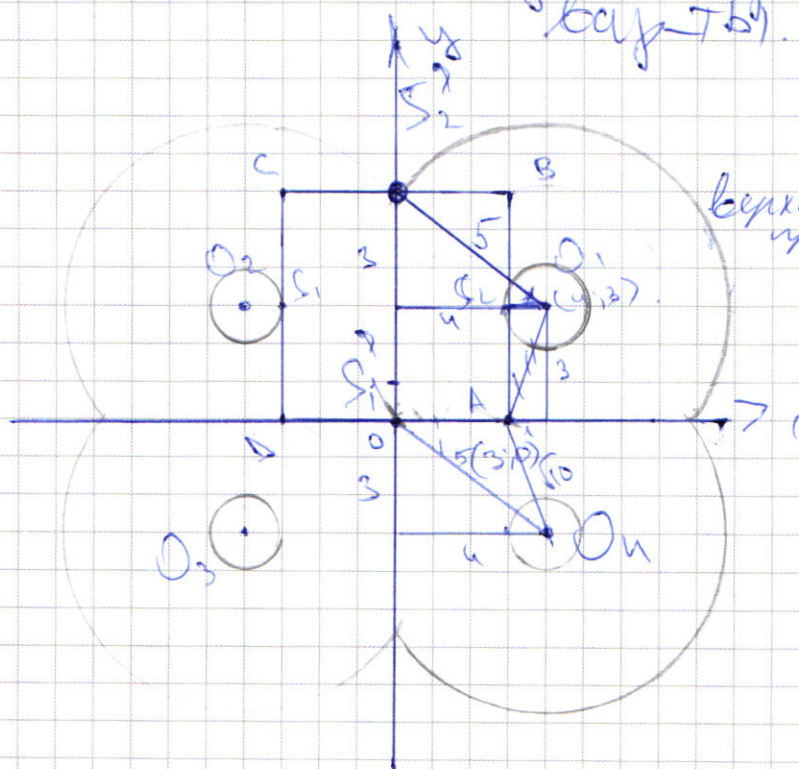
$$y < 3 - x.$$

$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6.$$

$$-2y = 0$$

$$y = 0$$

Пере строим картинку
и найдем походящие
варианты.



дл ко-во решений
в зависимости от
верхней границы
траектории.

$$AO_1 = \sqrt{(4-3)^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

$$0 \leq a \leq 1$$

0 решений

$a = 1$ - 1 решение

$a \in (1, \sqrt{10}]$ - 2 решения

$a \in (\sqrt{10}, 5]$ - 3 решения

$a > 5$ - 0 реш.

аналогично для
верхней левой.

есть особый случай при $a = \sqrt{5}$.
решения для обеих верхних окружностей совпадают.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(y) = 2^x - 3 \cdot 2^{65}$$

$$y \leq 2^6 + 3 \cdot 2 + 2^{64} \cdot x - k.$$

$$5 \leq 2^x \left(\frac{6}{2} + x \cdot 2^{4-x} \right) - x$$

$$f(1) = 1$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{25}$$

$$y \leq 70 + 2 \cdot x - x$$

$$f(y) \leq 2^{64} x + (20 - x)$$

$$2y > 2^{64} \cdot 6 + 2^x$$

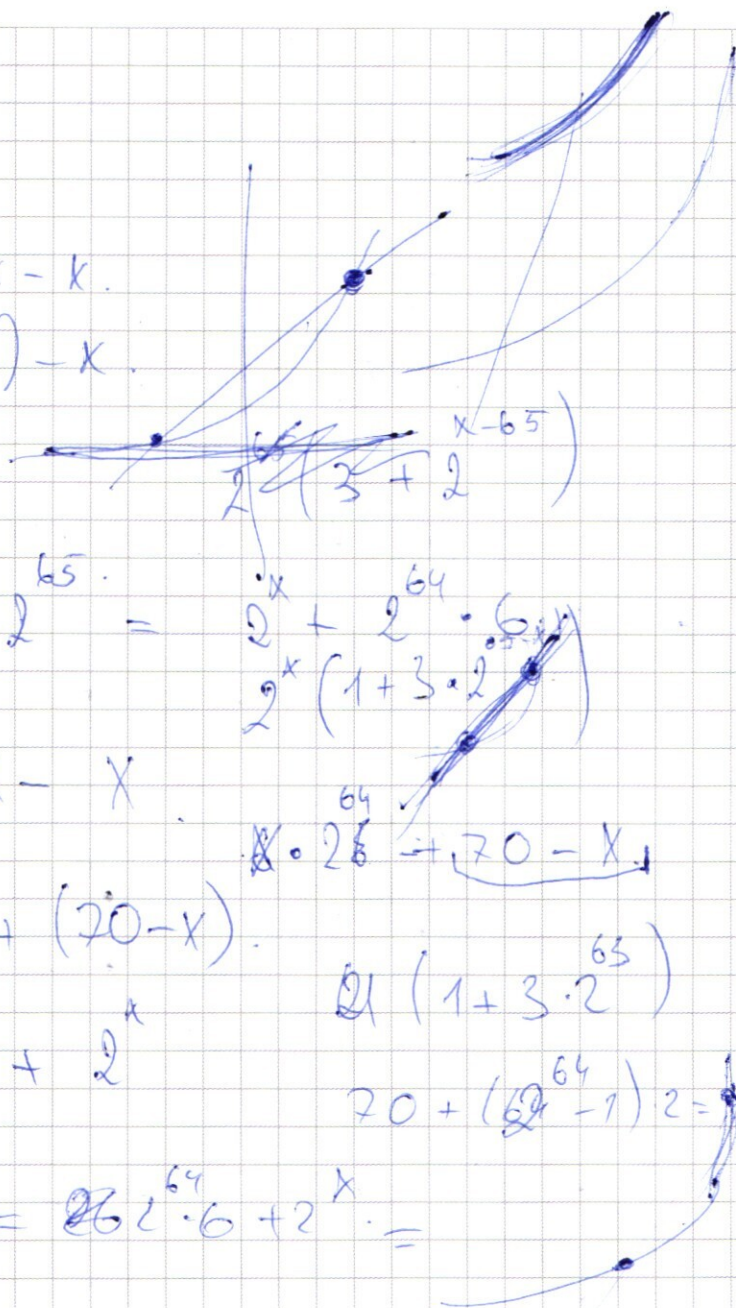
$$2^{64}x + (20-x) = 26 \cdot 2^{64} + 2^x$$

$$2 \cdot x + 70 - x - 2 \cdot 6 - 2^x = 0$$

$$2^{64}(x-6) + 70 - x - 2^x = 0.$$

$$2^x = 64 \quad \log_2 64 = x \quad \log_2 2^x = \log_2 64$$

$$X = \log_2 2^{64} \cdot X = \log_2 + 64.$$



$$\sin 3x - \cos 3x = C \sin(3x + \varphi)$$

$$C_1 = \sqrt{2}$$

$$\sin \varphi = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\begin{aligned} 9\cos^2 x &= \cos^2 3x - 1 = -\frac{\cos^2 3x - 1}{2} = \\ &= \frac{1 - \sin^2 3x}{2} \end{aligned}$$

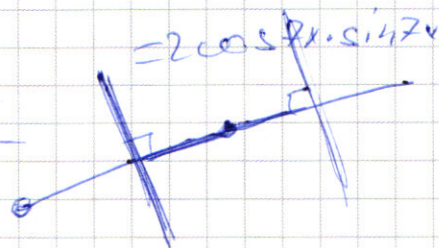
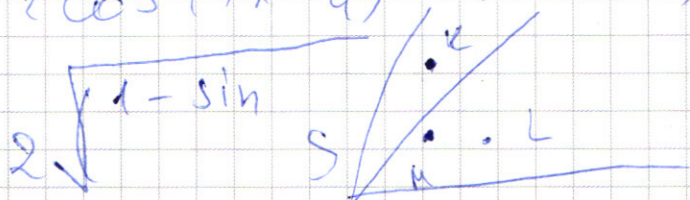
$$\sin 11x - \cos 11x = \sqrt{2} \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$2 \cos\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \cos 4x$$

$$2 \cos\left(\frac{14x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{-8x}{2}\right) = \cos 4x$$

$$2 \cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin(-4x) = \cos 4x$$



$$= 2 \cos$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x = (2 \cos 7x \cdot \sin 4x) = 2 \sin 7x \cdot \cos 4x$$

$$-2(\sin 4x \cdot \sin 7x + \cos 4x \cdot \sin 7x) = 2 \sin 7x \cdot \cos 4x$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$(\sin 7x + \cos 7x) = a$$

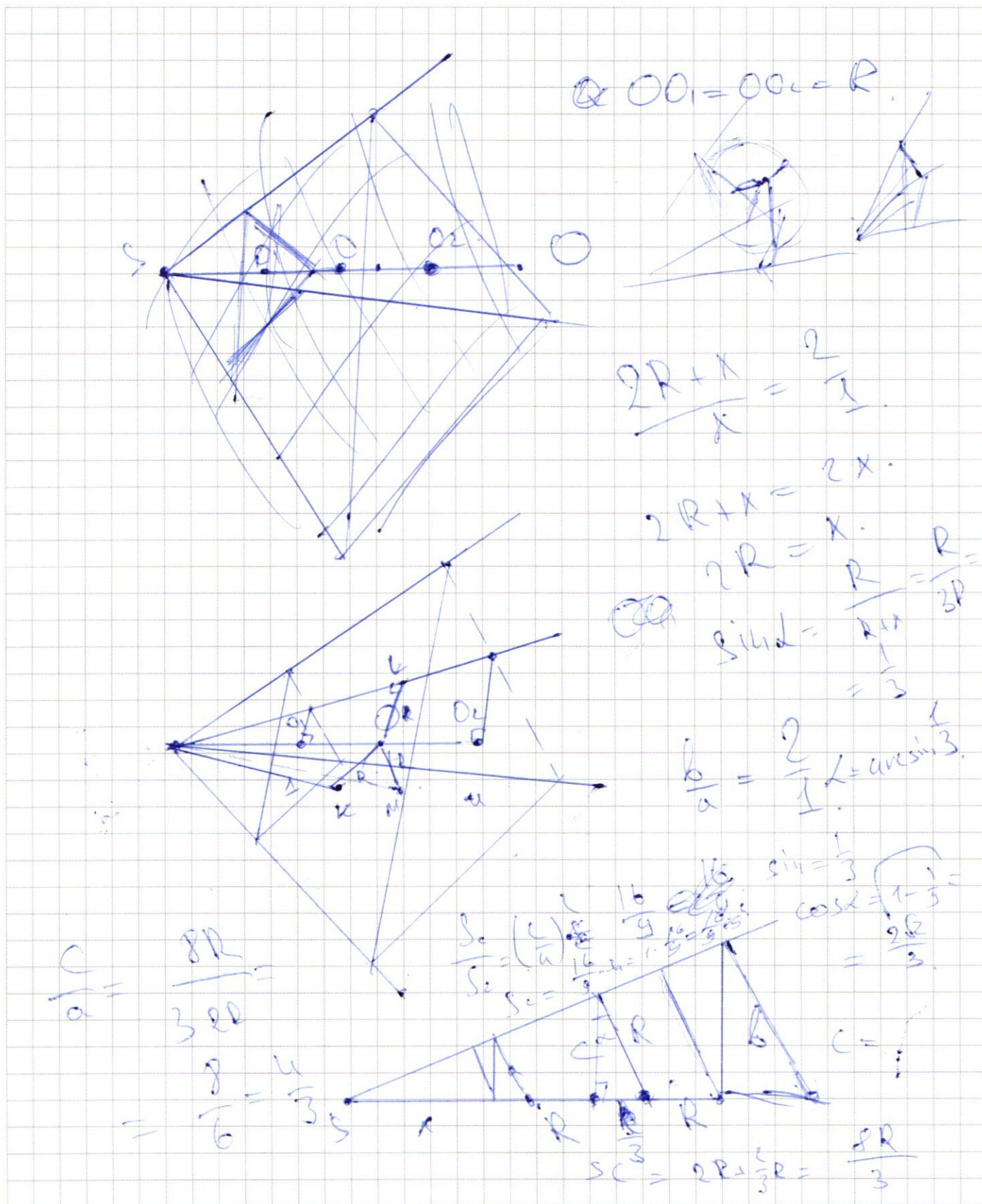
$$-\sin 4x \cdot a = (a^2 - 1) \sqrt{2} = \sqrt{2} a^2 - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} a^2 + a \sin 4x - \sqrt{2} = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-\sin 4x \pm \sqrt{\sin^2 4x + 8}}{2\sqrt{2}}$$

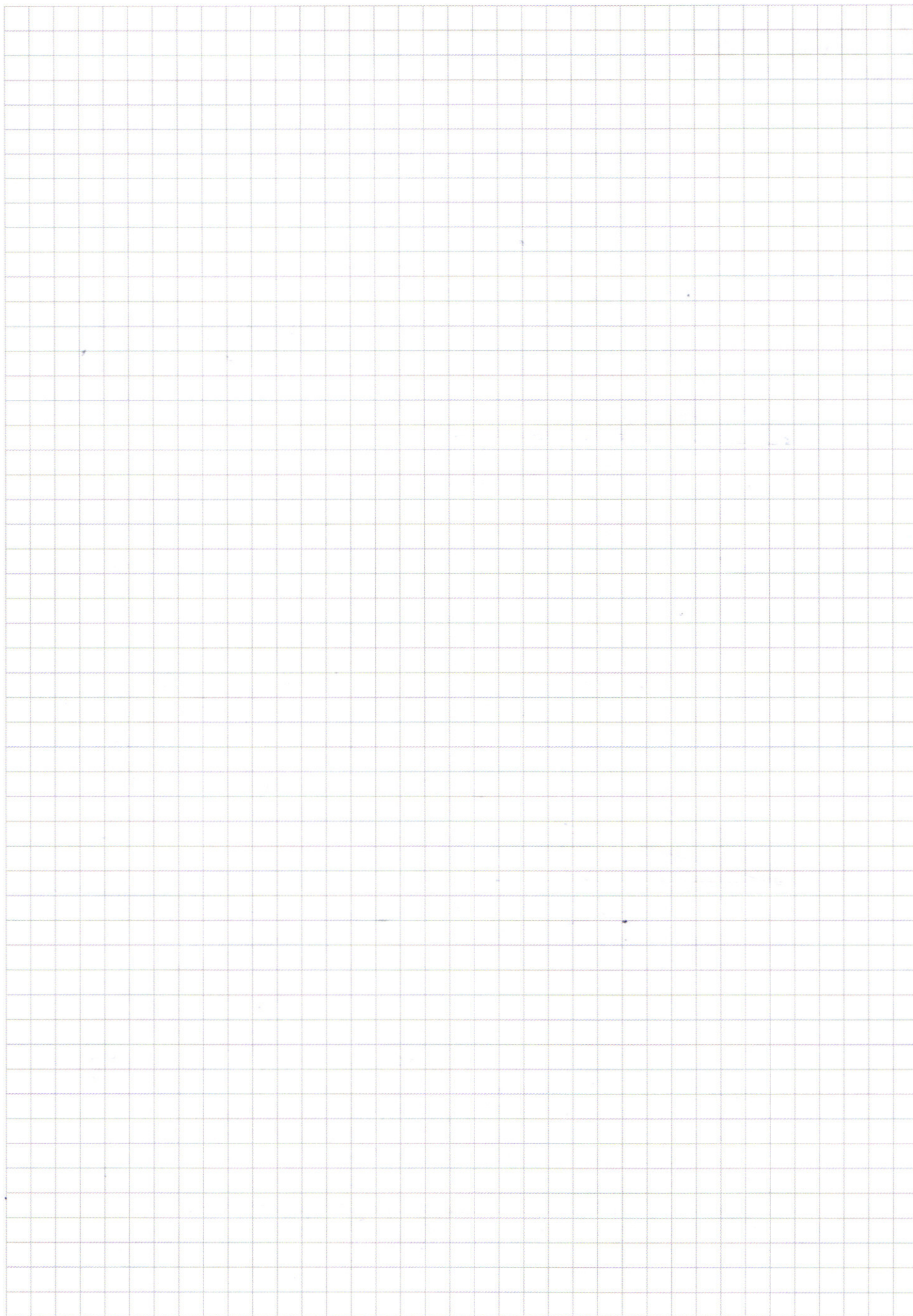
$$a = \sin^2 4x + 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Handwritten notes and calculations:

- $OO_1 = OO_2 = R$
- $\frac{2R+x}{x} = 2$
- $2R+x = 2x$
- $2R = x$
- $\sin \alpha = \frac{R}{x} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$
- $\frac{b}{a} = \frac{2}{1} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{2}$
- $\sin \alpha = \frac{1}{2}$
- $\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{c}{a} = \frac{8R}{3 \cdot 2R} = \frac{4}{3}$
- $\frac{c}{b} = \frac{4}{3}$
- $SC = 2R + \frac{c}{3}R = \frac{8R}{3}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

для ^{правой} ~~нижней~~ окружностей

$$a < \sqrt{10}$$

$$a \geq 0.$$

нет кор. решений.

$$a = \sqrt{10} - 1 \text{ решение}$$

$$a \in [\sqrt{10}; \sqrt{5}] - 1 \text{ решение.}$$

так же левой ~~нижней~~ окружностей

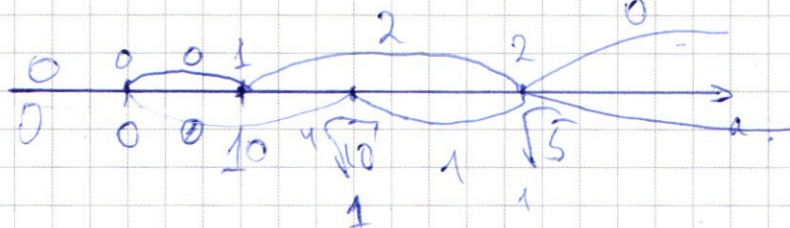
! частный случай.

$$a = \sqrt{5}.$$

решения левой и правой совпадают;
и совпадают с решением для верхней
окр.

для
верх.

для
нижних



подходит.

$$a = 1. - \text{ у верхних границ. решения}$$

у нижних 0.

$$a = \sqrt{5}$$

у верхних границ. решения.

всего
2.

у нижних.
1 решение, совпадающее
с решением для
верхних.

$$\text{Ответ: } a = 1.; a = \sqrt{5}.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 14x.$$

$$\cos 11x - \sin 11x - (\sin 11x + \cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x.$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 14x.$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{14x}{2} \cdot \sin \frac{8x}{2} - \left(2 \cos \frac{14x}{2} \cdot \sin \frac{8x}{2} \right) =$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= -2 (\sin 7x \cdot \sin 4x + \cos 7x \cdot \sin 4x)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x)$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} = 2$$

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ$$

$$+ 2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x -$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$+ 2 (2 \sin 7x \cdot \cos 7x) = 0.$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 =$$

$$\sin 7x (2 \sin 4x + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \cos 7x (2 \sin 4x - \sqrt{2}) = \frac{2 + 1 + \sqrt{3}}{2} - 1 =$$

$$= 3 + 2\sqrt{3}$$

$$A \sin \alpha + B \cos \beta = C \sin(\alpha + \beta)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\sin \beta = \frac{B}{C}$$

$$\cos \beta = \frac{A}{C}$$

$$\frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \cos 15^\circ$$

$$\sin 3x - \cos 3x + (-\sin 11x + \cos 3x) = \sqrt{2} \sin 14x$$

$$C \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2}$$

$$\sin \beta = \frac{B}{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin 3x - \cos 3x = C_1 (\sin(3x + \varphi_1))$$

$$C_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} = 2(\sin)$$

$$\sin 30 \cdot \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$- \sin 11x + \cos 11x = C_2 (\sin(11x + \varphi_2))$$

$$C_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \varphi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos(x+\alpha) - \cos(x+\beta) =$$

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sqrt{2} \sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \sin(11x + \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos \frac{1}{4}x$$

$$\sin(3x - \frac{\pi}{4}) + \sin(11x + \frac{3\pi}{4}) = \cos \frac{1}{4}x$$

$$2 \sin \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} + 11x + \frac{3\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{3x - \frac{\pi}{4} - 11x - \frac{3\pi}{4}}{2} \right) = \cos \frac{1}{4}x$$

$$2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(4x + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{1}{4}x$$

$$-2 \sin \left(7x + \frac{\pi}{2} \right) \sin 4x = \cos \frac{1}{4}x$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$-2 = \frac{1}{2} (\cos(7x + \frac{\pi}{2} - 4x) - \cos(11x))$$

$$2^{64} - 2 =$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$$

$$y > 2^x (1 + 2^{65-x}) = 2(2^{65} - 1)$$

$$y \leq 70 + (2^{67} - 1)x$$

$$2y \leq 140 + 2(2^{67} - 1)x$$

$$2y \leq 140 + 2^{68} - 2$$

$$70 = 2^6 \times 2^5 = 2^6 \times 2^5$$