

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 1. \quad 3345 \overline{) 5} \\
 \underline{30} \\
 34 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 675 \overline{) 5} \\
 \underline{5} \\
 17 \\
 \underline{15} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 135 \overline{) 5} \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}$$

$$3345 = 675 \cdot 5 = 135 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = \\
 = 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} + \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680

$$3. \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy$$

$$(y^5) \lg x \cdot x^{-\lg x} = y^2 \lg x \cdot y^2 \lg y$$

$$\lg xy = \lg x + \lg y$$

$$\lg x = \frac{\log_x x}{\log_x 10} = \frac{1}{\log_x 10}$$

$$\lg y = \frac{1}{\log_y 10}$$

$$\left\{ \left(\frac{y^5}{x}\right) \lg x = y^2 \lg xy \right.$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + xy + 4x - 3y^2 - 3xy + 12y = 0$$

$$x(x+y-4) - 3y(y+x-4) = 0$$

$$(x-3y)(x+y-4) = 0$$

$$y^3 \lg x \cdot x^{-\lg x} = y^2 \lg y$$

$$y^3 \lg x \cdot (10^{\lg x})^{-\lg x} = y^2 \lg y$$

$$(10^{\lg y})^3 \lg x \cdot (10^{\lg x})^{-\lg x} = (10^{\lg y})^2 \lg y$$

$$10^{3 \lg y \cdot \lg x - \lg^2 x} = 10^{2 \lg^2 y}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{17-2\sqrt{17}+1}{4} = 4,5 - \frac{\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$y^2 = x$$

$$x = 4 - y$$

$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-4) = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} \lg x = \lg y^2 \\ 2 \lg y = \lg x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=y & x=0 \\ x=3y & y=0, \text{ не } \\ \text{удб. 22.3.} \end{cases}$$

$$\lg x (3 \lg y - \lg x) = 2 \lg^2 y \quad \begin{matrix} x=y & x>0 \\ x=4-y & y>0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \quad y^2 = x$$

$$\lg 3y (3 \lg y - \lg 3y) = 2 \lg^2 y$$

$$\begin{cases} x=9 \\ y=3 \end{cases} \quad x=3y$$

$$2 \lg y \cdot \lg x - 2 \lg^2 y + \lg y \cdot \lg x - \lg^2 x = 0$$

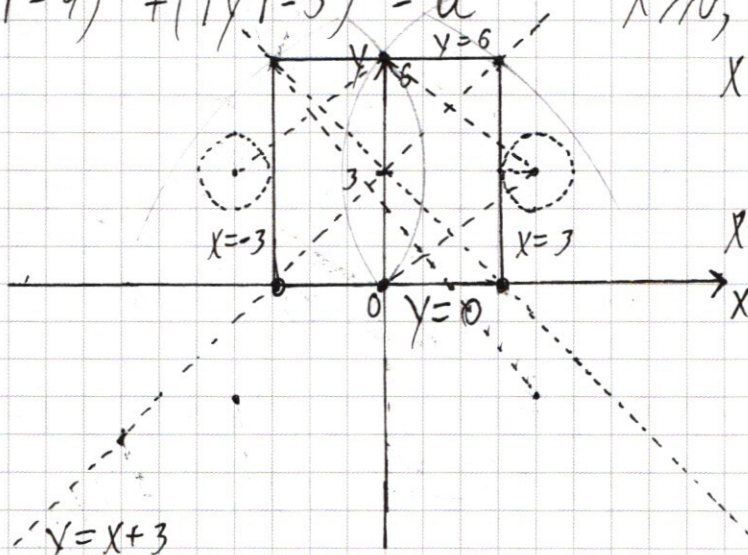
$$2 \lg y (\lg x - \lg y) + \lg x (\lg y - \lg x) = 0$$

$$(2 \lg y - \lg x) (\lg x - \lg y) = 0$$

$$\text{Ответ: } x_1=9, y_1=3; x_2=2, y_2=2; x_3=4,5 - \frac{\sqrt{17}}{2}, y_3=\frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.
$$\begin{cases} |y-x-3| + |y+x-3| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$



$x > 0, y > 0$: центр $(4; 3)$

$x > 0, y < 0$: центр $(4; -3)$

$x < 0, y > 0$: центр $(-4; 3)$

~~$x < 0, y < 0$: центр $(-4; -3)$~~

$x < 0, y < 0$: центр $(-4; -3)$

$y > x+3; y > -x+3$:

$y-x-3 + y+x-3 = 6$

$2y-6 = 6$

$y = 6$

$y > x+3; y < -x+3$

~~$y-x-3 - y-x+3 = 6$~~

$x = -3$

$R_1 = 1$

$a = 1$

$y < x+3, y < -x+3$:

$3-y+x+3-y-x = 6$

$6-2y = 6$

$y = 0$

$y < x+3; y > -x+3$

~~$x+3-y + y+x-3 = 6$~~

$x = 3$

$a = R^2$

$R_2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$a = 25$

Ответ: $a = 1, a = 25$

$$2. \cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$\cos 14x = \cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 11x$$

$$\sin 11x = \sin(7x + 4x) = \sin 7x \cdot \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$\sin 3x = \sin(7x - 4x) = \sin 7x \cdot \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$\cos 11x = \cos(7x + 4x) = \cos 7x \cdot \cos 4x - \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$\cos 3x = \cos(7x - 4x) = \cos 7x \cdot \cos 4x + \sin 7x \cdot \sin 4x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - (2 \cdot \sin 4x \cdot \cos 7x) = \sqrt{2} \cdot \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$$

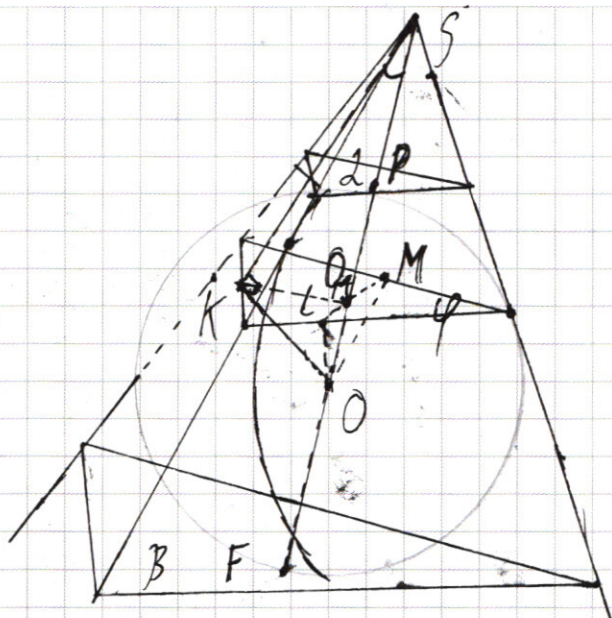
$$-\sqrt{2} \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = (\cos 7x - \sin 7x) \cdot (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\cos 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \sin 4x - \sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 4x + \sqrt{2} \sin 4x) \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\cos 4x (\cos 3x - \sin 3x) + \sin 4x (\sqrt{2} - \sin 3x - \cos 3x)) \cdot (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

4.



$$S_L = 1$$

$$S_B = 4$$

R - радиус
сферы

Сечение плоскостью $L \sim$ сечению плоскостью B

$$\left(\frac{SP}{SF}\right)^2 = \frac{S_L}{S_B} = \frac{1}{4} \quad SF = SP + 2R \quad Q_1 \in \varphi$$

$$SP = 2R \quad SO = SP + R = 3R$$

$$KO \perp SK \quad KO = R$$

$$\sin KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{3} \quad KSO = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$SK = SO \cdot \cos KSO$$

$$SO_1 = SK \cdot \cos KSO =$$

$$= SO \cdot \cos^2 KSO = 3R \cdot \frac{8}{9} = \frac{8}{3}R$$

$$\cos KSO = \sqrt{1 - \sin^2 KSO} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

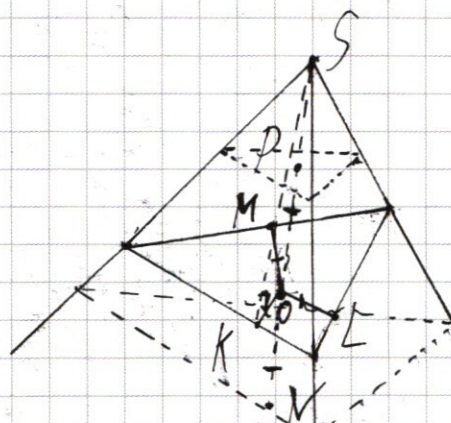
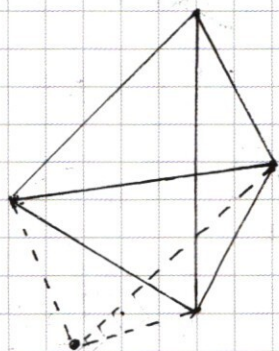
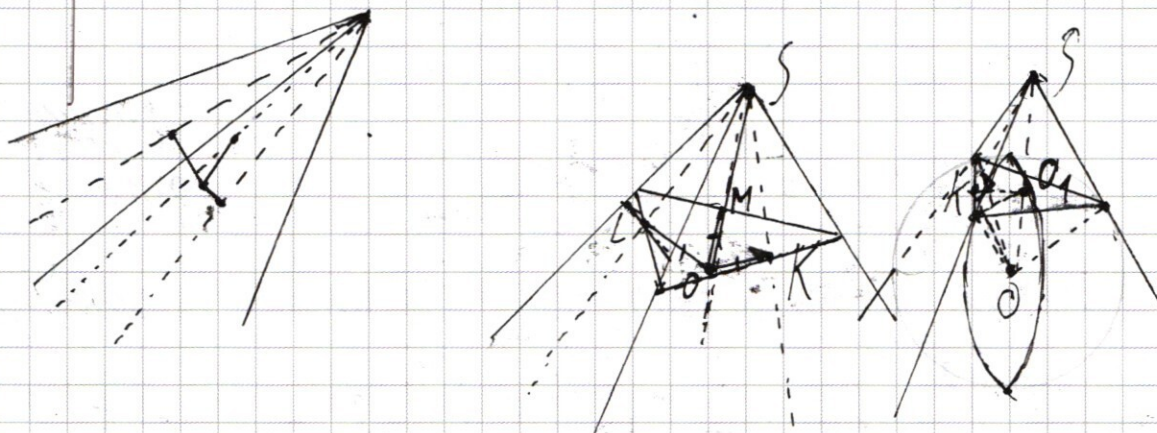
Сечение плоскостью $\varphi \sim$ сечению плоскостью L

$$\left(\frac{SO}{SP}\right)^2 = \frac{S_\varphi}{S_{L2}} \quad S_\varphi = S_L \cdot \left(\frac{SO}{SP}\right)^2 = 1 \cdot \left(\frac{\frac{8}{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{16}{9}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$; $S_{KLM} = \frac{16}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть P лежит в сечении плоскости площадью 1
N в сечении плоскостью площадью 4

$$SN = SP + 2R$$

$$\left(\frac{SP}{SN}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$SN = 2SP$$

$$KO \perp SK$$

$$SP = 2R$$

$$SO = 3R$$

$$KO = R$$

$$SK = \sqrt{9R^2 - R^2} = 2\sqrt{2}R$$

$$SO_1 = SK \cdot \cos KSO =$$

$$\sin KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{3}$$

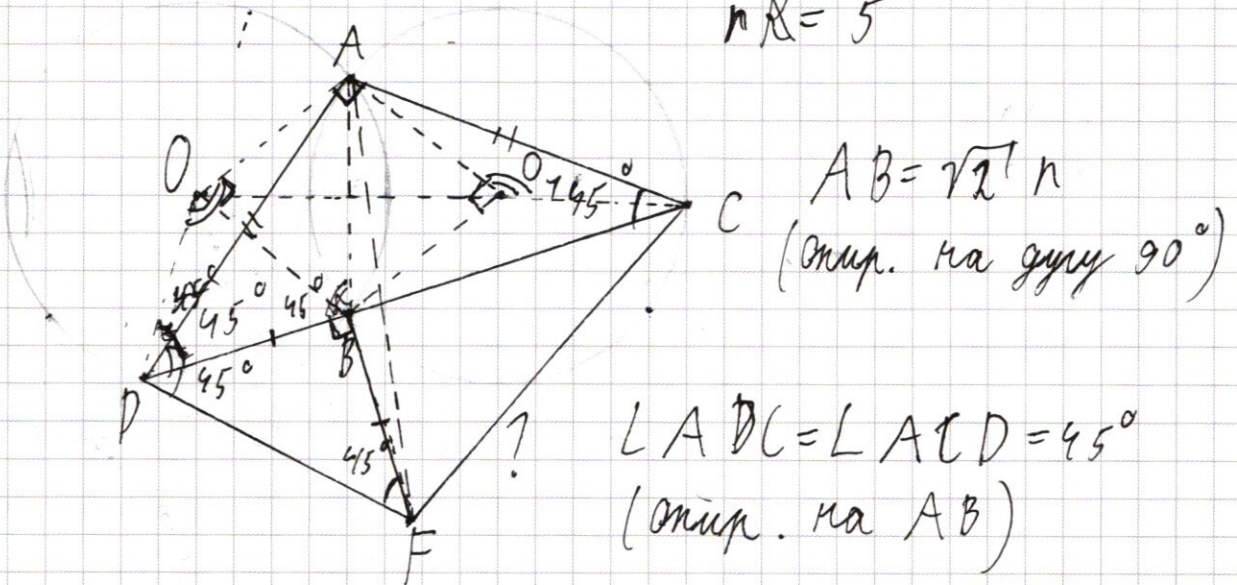
$$= 2\sqrt{2}R \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{3}R$$

$$\cos KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

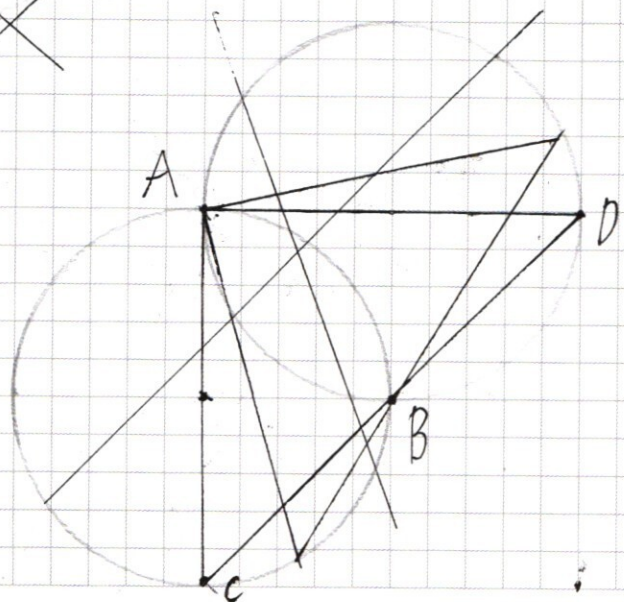
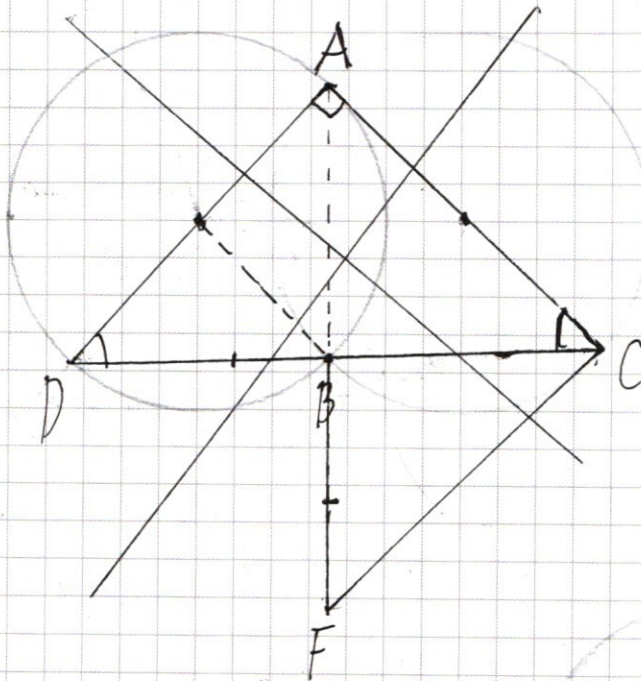
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

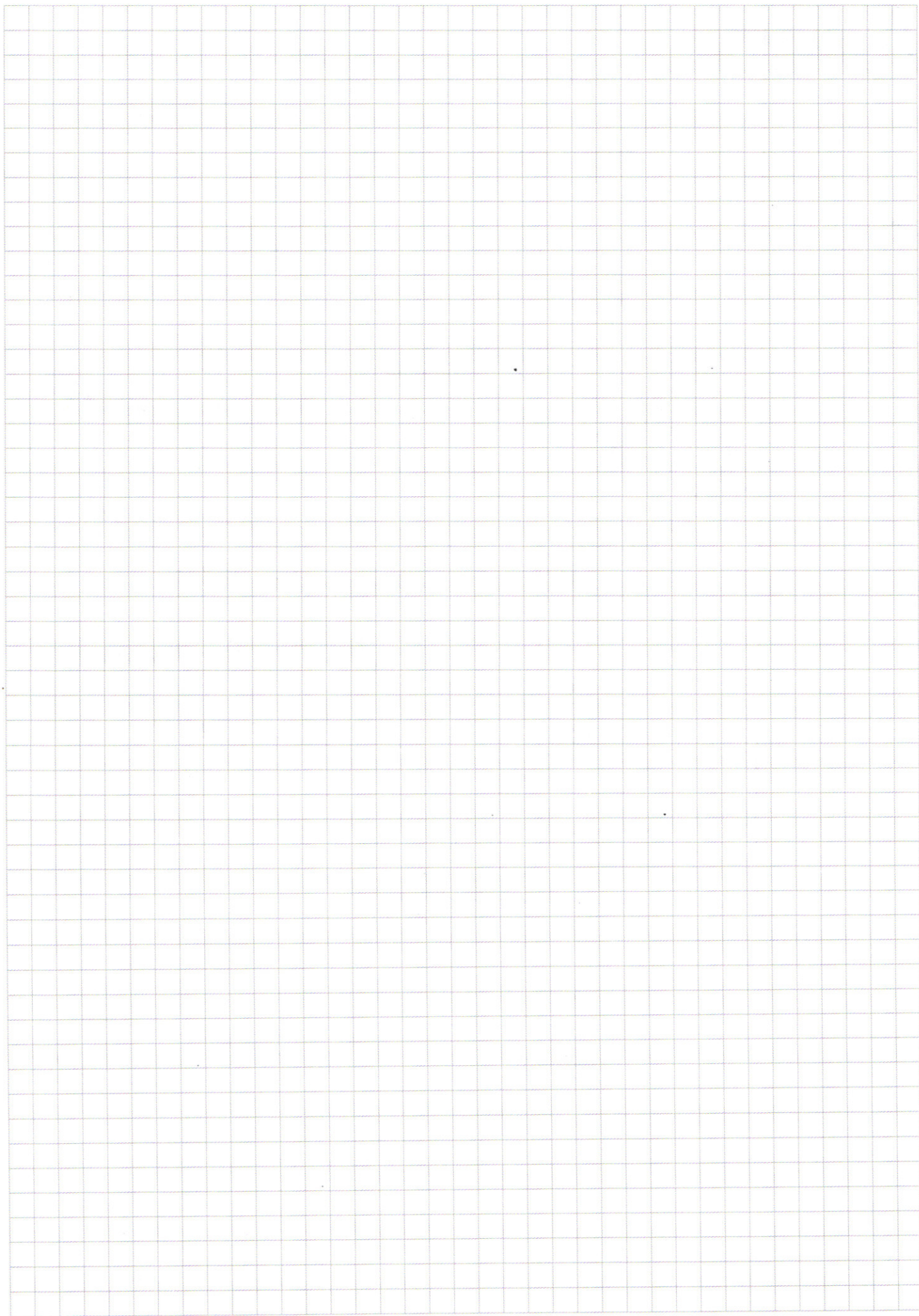
6.

$$nR = 5$$



$$OO_1 = \sqrt{2}r$$





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



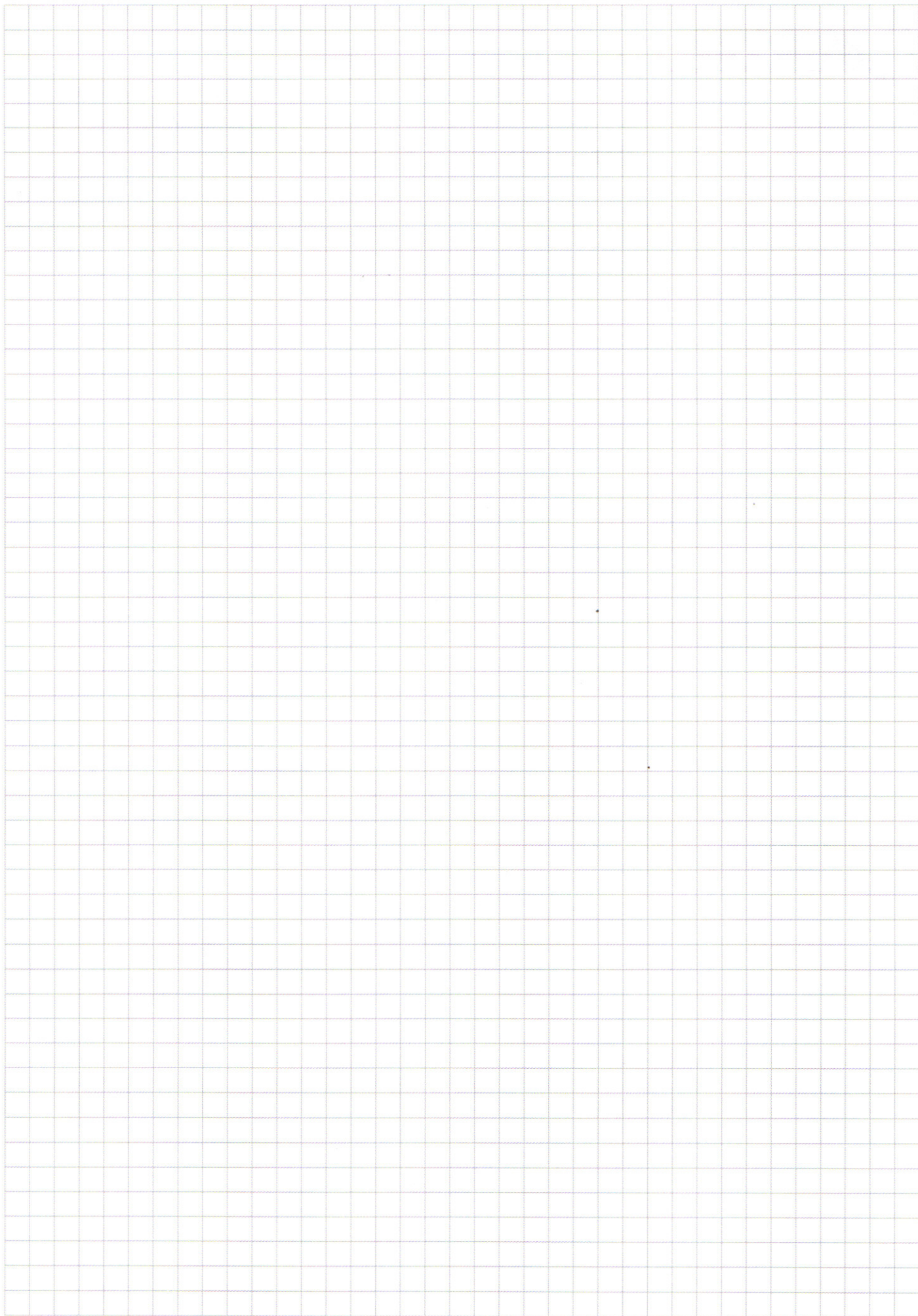
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)