

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3375 = 9^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 9 \cdot 5^3 \cdot 1 \quad \cos 11x - \cos 3x =$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \overline{) 1675} \\ 30 \overline{) 17} \\ 25 \overline{) 15} \\ 25 \overline{) 25} \end{array}$$

$$= -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$\lg x = 6$$

$$\sin 3x - \sin 11x = -2 \sin 4x \cos 7x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x$$

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg x} \Rightarrow y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3$$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$\frac{y^{3 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg y}$$

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} - x = \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = 6y - 6$$

$$x^2 - (2y+4)x$$

$$x^2 - 2(y-2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D = y^2 - 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 16y + 4 = (2y-2)^2$$

$$x = 2y - 4 \pm |2y - 2|$$

$$\left(\frac{y^5}{4y-6}\right)^{\lg(4y-6)} = y^{3-x} \lg(4y-6) + 2 \lg y, \quad |a-6|$$

$$-6 \leq y-3-x \leq 6, \quad (a) \quad 10-6=4$$

$$y^3 \lg(4y-6) - 3 \leq y-x \leq 9, \quad 5-3-3=-1$$

$$y^3 \lg(4y-6) = y^2 \lg y, \quad 5-3+3=5$$

$$y-3-x=6 \quad (4y-6) \lg(4y-6) = y^2 \lg y \quad y \in (3-x; 3+x)$$

$$y-3+x=0 \quad y^3 \lg(4y-6) + 2 \lg y = (4y-6) \lg(4y-6)$$

$$2y-6=6 \quad y=3-x \quad x=3$$

$$y=6 \quad y=3+x \quad x=-3$$

$$|y-x-3| + |y-3+x| = 6 \quad x-3y \leq 9+x$$

$$x \in [-3; 3] \quad -3-x \leq y \leq 9-x$$

$$x-3 \leq y \leq 9-x \quad 5; 2$$

$$y=0 \quad x=-3$$

$$y-3-a \quad y-3+b$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

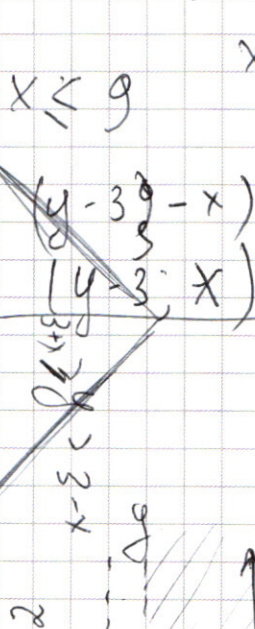
$$\sin(-a) + \sin b = 2 \sin \frac{b-a}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\sin \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - b\right) = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2}$$

$$= -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$x \in [3; 3]$$



$$x \in [0; 3]$$

$$y < 3-x$$

$$y > 3-x$$

$$y=0$$

$$y=6$$

$$y=1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$
 $x = 4y - 6$
 $y \in (3-x, 3+x)$
 $x = 10$
 $13 - 3 - 10 = 0$
 $13 - 3 + 10 = 20$
 $\sqrt{10}$
 $\sqrt{10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2}$
 $\angle KSO = \arccos \frac{1}{3}$
 $|x+3-y|$
 $|x-3+y|$
 $y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}$
 $y \leq 20 + (2^{64} - 1)x$

$$y \rightarrow -y$$

$$y \rightarrow -y$$

$$|y+3-x| + |y+3+x|$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$-3-10 = -13$$

$$1) y-3 < -x$$

$$x+3-y+3-x+y=6$$

$$-y=0$$

$$y=0$$

$$-3 < -x$$

$$x > 3$$

$$y < x+3$$

$$3+x-y+3-x-y=6$$

$$y=0$$

$$x=2$$

$$y-3-x > 0$$

$$y-3 > x$$

$$y-3-x \leq 6$$

$$y \leq x+3$$

$$y \geq -x-3$$

$$|4-3-3|=2$$

$$-x-3 > x+3$$

$$2x < 6$$

$$x < 3$$

$$y-3+x > 0$$

$$y-3 > -x$$

$$10-3-10 = -3$$

$$-2 = 2$$

$$4-3+3=4$$

$$x=3$$

$$y \in (0; 6)$$

$$|y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6$$

$$y \in (3+x; 3-x)$$

$$9b^2 - 4b^2 = 5b^2$$

$$10-3+10=17$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Заметим, что график второго уравнения представляет собой 4 окружности с центрами в точках $(\pm 4; \pm 3)$ и радиусом $\sqrt{10}$ или 4 точки: $(\pm 4; \pm 3)$

3):

$$(1) |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6$$

$$\begin{aligned} 1) y < 3 - x; \\ 3 + x - y + 3 - x - y &= 6, \\ -2y + 6 &= 6, \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$|y - (3 + x)| + |y - (3 - x)| = 6,$$

$$1) y > 3 + x,$$

$$y - 3 - x + y - 3 + x = 6,$$

$$2y - 6 = 12,$$

$$y = 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in [0; 3)$$

$$2) 3 - x < y \leq 3 + x$$

$$3 + x - y + y - 3 + x = 6,$$

$$2x = 6,$$

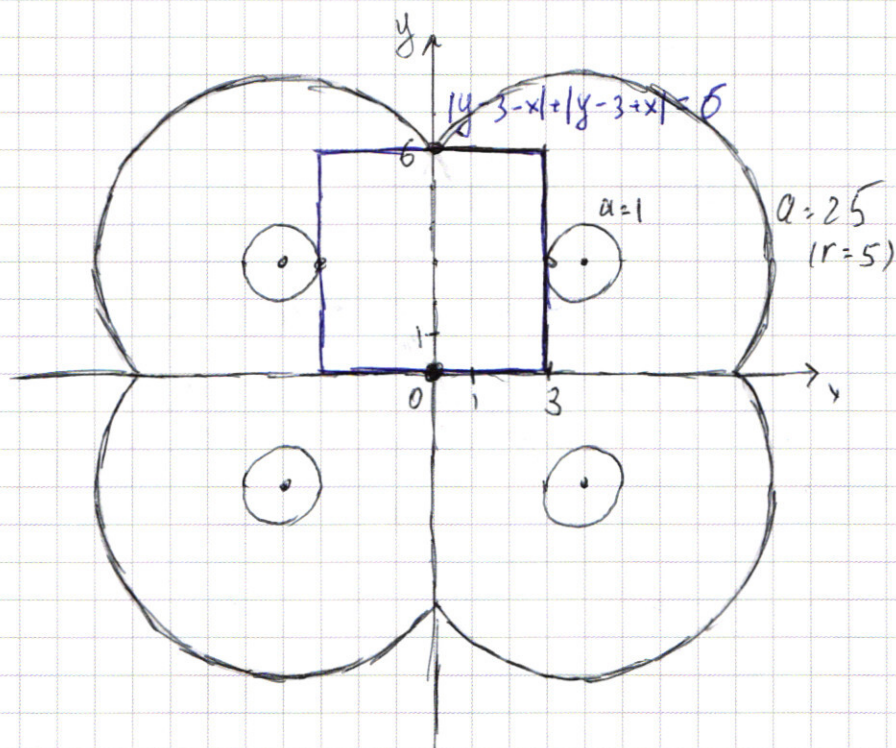
$$x = 3,$$

$$y \in [0; 6]$$

$$3) y \leq 3 - x$$

$$3 + x - y + 3 - x - y = 6,$$

$$y = 0 \Rightarrow x \in [0; 3]$$



Одес: $a=1$; $a=25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$ODZ: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \quad (1)$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2): x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2(y+2)x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$D_1 = y^2 + 4y + 4 + 3y - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = (2y-2)^2$$

$$x = y+2 \pm (2y-2)$$

$$x = 3y+4$$

$$x = -y$$

$$x = 3y+4$$

$$1): \frac{y^5 \lg(3y+4)}{(3y+4)^{\lg(3y+4)}} = y^2 \lg(3y+4) + 2 \lg y$$

$$\frac{y^3 \lg(3y+4)}{(3y+4)^{\lg(3y+4)}} = y^2 \lg y$$

$$\frac{y^3 \lg(3y+4) - y^2 \lg y (3y+4)^{\lg(3y+4)}}{(3y+4)^{\lg(3y+4)}} = 0$$

~~у~~ ~~у~~ ~~у~~

$$y^3 \lg(3y+4) - y^2 \lg y \cdot (3y+4)^{\lg(3y+4)}$$

$$- \lg y \cdot \text{Пусть } \lg(3y+4) = a, \lg y = b, \text{ тогда:}$$

$$10^{b-3a} - 10^{b-2a} = 10^a = 10$$

$$10^3 ab - 10^2 ab^2 + a^2 = 0$$

$$3ab = 2ab^2 + a^2$$

$$19. (a - b) = 0$$

~~$a = 0$~~

$$a = b$$

$$\lg(3y+4) = 0,$$

~~$\lg(3y+4) = \lg y$~~

~~$3y + 4 = 1$~~

$$3y + 4 = y$$

$$3y = -3$$

$$2y = -4$$

$y = -1$

47-2

20

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2 \Rightarrow a = \frac{3b \pm b}{2} \Rightarrow a = b \quad a = 2b$$

$$\lg(3y+4) = \lg y,$$

$$\lg(3y+4) = 2\lg y$$

$$3y + 4 = 4,$$

$$3y + 4 = y$$

$$y = -2$$

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$



$$y = -1$$

$$y = 4 \Rightarrow x = 16$$

2

Obet: (16; 4)

N5

$$\int |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \quad (1)$$

$$2 \quad (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = 9 \quad (2)$$

1) Заметим, что при замене ~~каждого~~ ~~из~~ ~~них~~ оба уравнения симметричны относительно прямой $x=0$, а второе так же симметрично относительно прямой $y=0$. Поэтому рассмотрим при $x \geq 0$, а потом отразим.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2B'}{2B} = \frac{S_2}{S_X},$$

$$3) \quad k = \frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_X} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_X = 2S_2 \text{ при}$$

$$\text{т.о.с. } S_X = S_2 + 2R \Rightarrow 2R = S_2 \Rightarrow SO = 3R$$

$$4) \text{ Рассмотрим } \triangle SKO: \angle SKO = 90^\circ \text{ т.к. } K - \text{т. касания} \\ \omega \text{ и } \alpha \Rightarrow \frac{KO}{SO} = \sin \angle KSO = \frac{1}{3}$$

5) Рассмотрим $\triangle KLM$:

1) $KL = SL = SM$ как отрезки касательных, проведенных из одной точки $KS = SO \cos \angle KSO = 10R$

2) Точка $(KLM) \cap SO = D$, тогда:

$$SKD = SK \cos \angle KSO = \frac{10}{3}R \Rightarrow S_{\text{сер}}(KLM) = \left(\frac{10}{3}R \right)^2 = \frac{100}{9}R^2 = 11\frac{1}{9}$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle KSO = \frac{1}{3}; S_{\text{сер}}(KLM) = 11\frac{1}{9}$$

№6

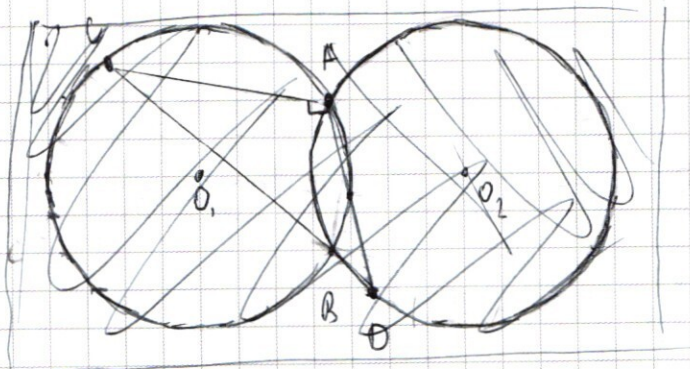
Дано:

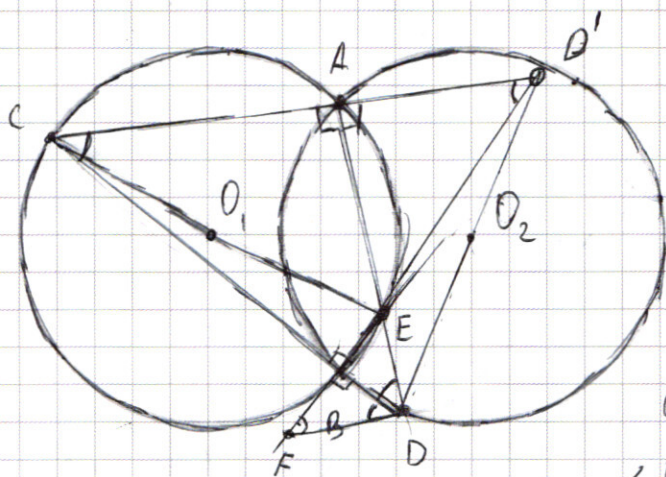
$$\omega_1(0;5), \omega_2(0;5)$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = A, B$$

$$C \in \omega_1, D \in \omega_2, \angle CAD = 90^\circ, BE \perp CD, FB = BD, FB \perp CD, BC = 6$$

Найти: $CF, S_{\triangle ACF}$





Решение:

1) Пусть $AD \cap \omega_1 = E$,
тогда CE — диаметр
 ω_1 , т.к. $\angle CAE = 90^\circ$

2) Пусть DD' — диаметр
 ω_2 , тогда $BE \cap \omega_2 = D'$, т.к.
 $\angle DBE = 90^\circ$

3) Рассмотрим $\triangle CD'B$:

$\angle ACB$ и $\angle AD'B$ опираются на равные дуги $\cup AB$ и
 $\cup AB \Rightarrow \angle ACB = \angle BD'A$, т.к. $\angle CBD' = 90^\circ$, то

$\angle ACB = \angle AD'B = 45^\circ \Rightarrow \angle ADC = 45^\circ$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$

4) Т.к. $\angle FBD = \angle DBE = 90^\circ$, $\angle FDB = \angle EDB = 45^\circ$ ($\angle FDB = 45^\circ$,
т.к. $FB = BD$ и $\angle FBD = 90^\circ$), BD — общая, то

$\triangle BED = \triangle BFD \Rightarrow BE = BF$

5) Рассмотрим $\triangle CBE$ и $\triangle CBF$:

$\angle CBE = \angle CBF = 90^\circ$, $BE = BF$, CB — общая $\Rightarrow \triangle CBE = \triangle CBF \Rightarrow$

$CF = CE = 2R = 10$

6) $\angle FDA = \angle FDB + \angle BDA = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow CA \parallel FD$, т.к.

$\angle DAD = \angle ADF$ — накрест лежащие углы при $FD \parallel CA$
и секущей DA .

7) По т. Пифагора $BF = \sqrt{CE^2 - CB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \Rightarrow$
 $FD = 8 = DE = BD$

8) $S_{\triangle AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} AC \cdot DA = \frac{1}{2} AC \cdot (DE + FD) =$
 $= \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{4} CD^2 = \frac{1}{4} (BD + CB)^2 = \frac{1}{4} (8 + 6)^2 = \frac{14^2}{4} = 49$

Ответ: 10; 49

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Представим 3375 в виде произведения 8 однозначных чисел:

$$3375 = 3^3 \cdot 5^3 \cdot 1^2 = 3 \cdot 5^3 \cdot 9 \cdot 1^3$$

Рассмотрим ~~также~~ числа, состоящие из трех 3, трех 5 и двух единиц:

$$\text{Их число равно: } \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 56 \cdot 5 \cdot 2 = 560.$$

Рассмотрим числа, состоящие из одной 3, трех 5, одной 9 и трех 1:

$$\text{Их число равно: } \frac{8!}{3!3!} = 1120$$

Всего чисел, дающих в произведении своих цифр 3375: $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

№2

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x,$$

$$-2 \sin 7x \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x,$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\sin 7x + \cos 7x) (\cos 7x - \sin 7x)$$

$$\sin 7x + \cos 7x = 0,$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x),$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x,$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$$

Итак $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда:

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sin 4x + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) = 0,$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} \right) \cos \left(\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0,$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{11x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi l, l \in \mathbb{Z},$$

$$3x = 2\pi k - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4},$$

$$x = \frac{2\pi l}{11} + \frac{\pi}{44}$$

$$3x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$$

Ответ: $\frac{3\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi l}{11} + \frac{\pi}{44}, l \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{4}$

Дано:

$\omega(O; R)$ - сфера

~~треугольник~~ - ~~треугольник~~

$(\alpha; \beta; \gamma)$ - трехгранный угол

ω кас $\alpha = K$

ω кас $\beta = L$

ω кас $\gamma = M$

$\angle \alpha \cap \beta \cap \gamma = S$

$S_{\triangle A'B'C'} = 1, (A'B'C') \perp SO$

$S_{\triangle ABC} = 4, (ABC) \perp SO$

Найти: $\angle KSO, S_{\triangle KLM}$

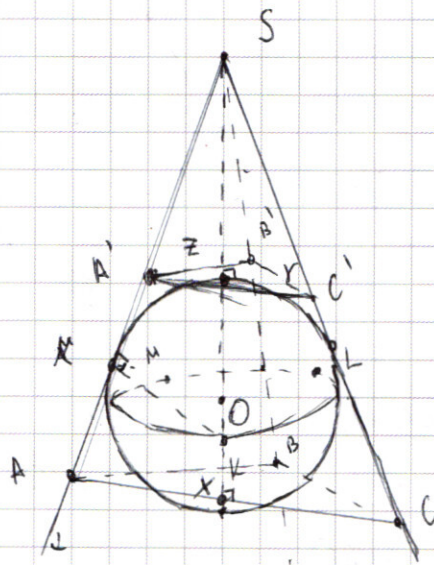
Решение:

1) Т.к. $(A'B'C') \perp SO$ и $(ABC) \perp SO$, то $(A'B'C') \parallel (ABC)$,

т.к. $A' \in SA, B' \in SB, C' \in SC$, то $\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} \Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$

2) Рассмотрим $\triangle SXB$ и $\triangle SZB'$, где $SO \cap \omega = X, Z$

$\angle SZB' \sim \triangle SXB$, т.к. $SZ \perp ZB'$, $SX \perp XB$ по усл., $\angle XSB$ - общий



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР



Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- † 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ↵ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ‡ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ⊘ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.

- ⋈ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ⊘ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

