

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в рѣ
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2.

$$\cos 11x - \sin 11x - (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin\left(\frac{11x-3x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{11x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{11x-3x}{2}\right) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x : 2$$

$$-\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 14x$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) + \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \sin 4x \right) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin 4x \right) = 0$$

$$I \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\sin\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0$$

$$7x + \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$II \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

$$\sin\left(-7x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{-7x + \frac{\pi}{4} + 4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi - 7x - 4x}{2}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi - 3x}{2}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi - 11x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \pi k \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) = \pi k + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \\ 11x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \end{cases}$$

Засудили №3.

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 - (y+2)^2 = 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x - y - 2)^2 = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y - 1)^2$$

$$(x - y - 2)^2 = 4(y - 1)^2$$

$$|x - y - 2| = 2|y - 1|$$

$$\sqrt{x-y-z} = 2y-z$$

$$Lx - y - 2 = -2y + 2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \\ \lg x \cdot \lg y = 1 \end{cases}$$

$$\angle x = 4 - 4$$

$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$\log_{10} x = \frac{1}{\log_x 10} \Rightarrow x = \sqrt[10]{10}$
 $x = 10^{\frac{1}{10}} = 10^{\log 10}$

$$\begin{bmatrix} \bar{x} = 3 \\ \bar{y} = 4 \end{bmatrix}$$

$$Lx = 4 - y$$

$$x \cdot y = 0$$

$$\sqrt{x} = 3 \neq$$

$$Lx = -y + 4, \text{ ~~mit } y = 0~~$$

$$x = 39$$

~~$h_4(3,4) \cdot h_4 4 = 1$~~

~~$(193 \times 194) \cdot 199 = 1$~~

$$f(y) = \dots$$

$$(a + \cancel{q_3}) a = I$$

$$a^2 + \cancel{a_3}a - 1 = 0$$

$$Q = r^2 \lg 3 + 4$$

$$a = \frac{1}{2} \left(-y_3 \pm \sqrt{y_3^2 + 4} \right)$$

$$y_4 = -y_3 \pm \sqrt{y_3^2 + 4}$$

$$y = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}}}{10}$$

$$X = 3 \cdot 10^{\frac{-193 \pm \sqrt{193^2 + 4}}{2}}$$

Задача N5.

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$I \quad (1) \geq 0 \text{ и } (2) \geq 0$$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y-6=6$$

$$y=6$$

$$II \quad (1) \geq 0 \text{ и } (2) \leq 0$$

$$y-3-x-y+3-x=6$$

$$x=-3$$

$$III \quad (1) \leq 0 \text{ и } (2) \leq 0$$

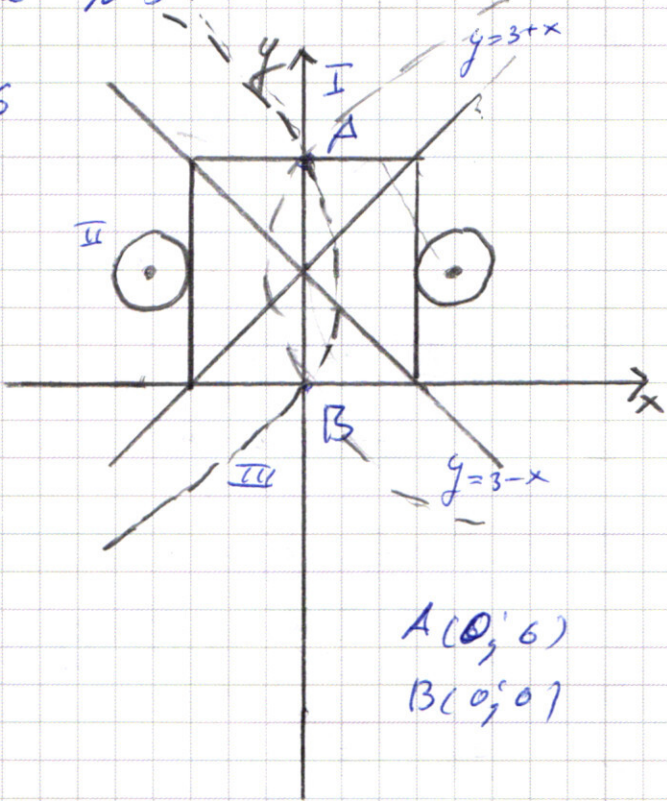
$$-y+3+x-y+3-x=6$$

$$y=0$$

$$IV \quad (1) \leq 0 \text{ и } (2) \geq 0$$

$$-y+3+x+y-3+x=6$$

$$x=3$$



$A(0; 6)$
 $B(0; 0)$

Полученная фигура

со стороной 6, теперь рассмотрим 2 окружности касающиеся эту фигуру. Пусть $(x_0; y_0)$ - центр одной из окружностей, тогда $(-x_0; y_0)$ - центр другой. Эти окружности можно рассмотреть как две окружности при $a > 0$ с центрами в $(\cdot)$ $(4; 3)$ и $(-4; -3)$

то расстояние между их центрами $a=8$ и окружности касаются тогда когда

$$a = 3^2 + 3^2 = 18$$

тогда эти две окружности касаются в точке $(\cdot)$ A и B Ответ: $a \in \{1; 18\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \\ 11x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k \\ x = \frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11} \\ x = \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi k; \frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}; \frac{-\pi}{28} + \frac{\pi k}{7} \right\}$

Задача №3.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = \lg x \cdot \lg y = \lg x \cdot \lg y = 10^2 \cdot \lg x = 100 \lg x$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x \lg x} = \frac{y^5 \lg x}{10} = 100 \lg x$$

$$t = y^5, t > 0, \frac{t^5}{10} = 100 t^2, t^5 = 10^3 t^2$$

$$t^2(t^3 - 10^3) = 0, t^2(t - 10)(t^2 + 10t + 100) = 0$$

$$t > 0, t = 10, \Delta < 0, \Delta = 100 - 400 = -300$$

$$t = 10, \frac{y^5}{x} = 10 = y^5 \cdot 10, \lg x = \lg y \cdot 10 = 1, \lg x \cdot \lg y = 1, \lg x \cdot \lg y = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$$3345 = 5^3 \cdot 3^3$$

Какие у нас могут быть различные случаи
это либо три - 5 три - 3 и две - 1,
либо три - 5 одна - 3 одна - 9 и три - 1.

Рассмотрим первый случай,

когда у нас три - 5 три - 3 и две - 1.

Выборить куда мы можем разместить цифры
мы можем C_8^3 , куда поместим C_5^3 и единицы
 C_2^2 , т.к. это все возможные случаи,
то получим $A_1 = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 =$

$$= \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{2!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$$

Рассмотрим второй случай, когда у нас

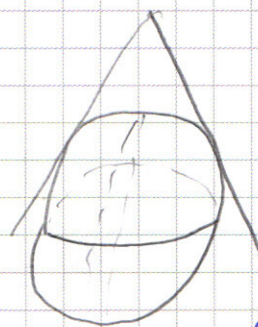
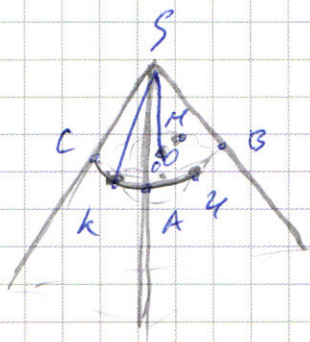
три - 5, одна - 3, одна - 9 и три - 1, то получим

$$A_2 = C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!} =$$

$$= \frac{8!}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$$

$$A = A_1 + A_2 = 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 + 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8 = 1680$$

т.к. это все возможные случаи Ответ: $A = 1680$ различных чисел



$$\frac{cb}{de}$$

$$\frac{c}{\frac{cb}{d+e} + b} = \frac{d}{e}$$

$$ce = \frac{dcb}{d+e} + bd$$

$$ce^2 + dce = dcb + bd^2$$

SO - центр

SO - центр.

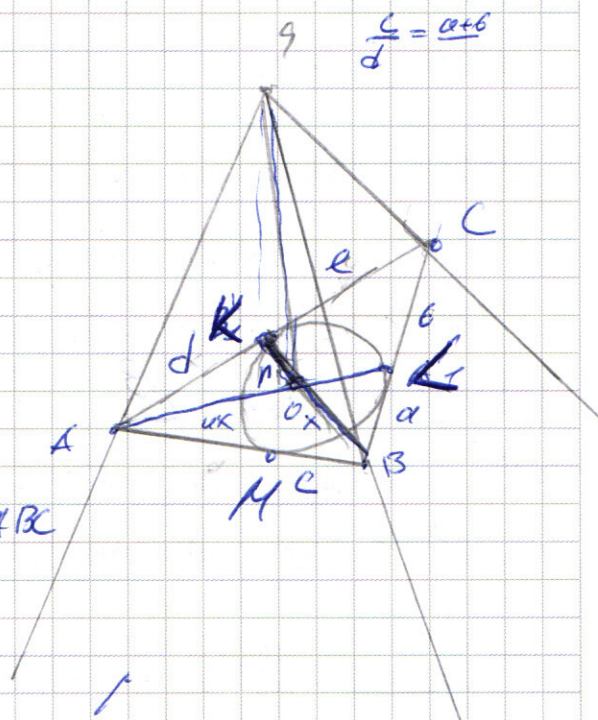
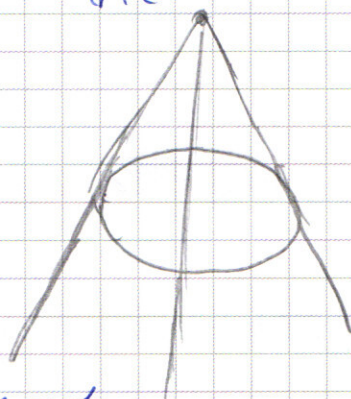
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d+e}$$

$$a = \frac{cb}{d+e}$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{d}{e}$$

$$ce(e+d) = bd(c+e)$$

$$\frac{c}{d} = \frac{a+b}{e}$$



$$\frac{1}{2} \cdot SO \cdot \sqrt{1} = 1$$

O - центр вписанной окружности в $\triangle ABC$

$$BB_{\perp} - \text{высота} \quad SO \cdot BB_{\perp} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$SO \cdot BB_{\perp} = 2$$

$$AA_{\perp} - \text{высота} \quad SO \cdot AA_{\perp} \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$SO \cdot AA_{\perp} = 8$$

$$KS: KB \cdot \sin \alpha = BK \cdot SO \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$\frac{KS}{SO} = \frac{1}{\sin \alpha}$$

$$BK \cdot SO = 2$$

$$AK \cdot SO = 8$$

$$\frac{2}{BK} = \frac{8}{AK}$$

$$AK = 4BK$$

$$BK \cdot SO = 2$$

$$AK \cdot SO = 8$$

$$BK = \frac{2}{SO}$$

$$\frac{KS}{2SO} \cdot \sin \alpha = 2$$

$$\frac{KS}{SO}$$

Задание 13.

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

ОГР: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 = 3y^2 - 12y + (y+2)^2 = 4y^2 - 8y + 4$$

$$(x - y - 2)^2 = 4(y - 1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 2 = 2y - 2 \\ x - y - 2 = -2y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\frac{y^{5 \log_{10} x}}{x^{\log_{10} x}} = y^{2 \log_{10} x} \cdot y^{2 \log_{10} y}$$

$$\begin{aligned} y &= 10^{\log_{10} y} \\ x &= 10^{\log_{10} x} \end{aligned}$$

$$10^{5 \log_{10} x \cdot \log_{10} y} = 10^{\log_{10}^2 x} \cdot 10^{2 \log_{10} x \cdot \log_{10} y} \cdot 10^{\log_{10}^2 y}$$

$$5 \log_{10} x \cdot \log_{10} y = \log_{10}^2 x + 2 \log_{10} x \cdot \log_{10} y + \log_{10}^2 y$$

$$\log_{10} x = a \quad \log_{10} y = b \quad \text{Омбм: } \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{14}}{2} \\ x = \frac{\sqrt{14} - 1}{2} \end{cases}$$

$$5ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm b}{2} = 2b; b$$

$$\begin{aligned} \log_{10} x &= \log_{10} y \\ \log_{10} x &= 2 \log_{10} y = \log_{10} y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= y \\ x &= y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} = y \\ x = y^2 \\ \sqrt{x} = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$1) x = y \wedge x = 3y \Rightarrow x = 0 \vee y$$

$$2) x = y^2 \wedge x = 3y$$

$$3) x = y \wedge x = 4 - y$$

$$2x = 4 \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$4) x = y^2 \wedge 4 - y = x$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-1 + \sqrt{14}}{2} \\ x &= \frac{\sqrt{14} - 1}{2} \end{aligned}$$

$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3.

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 \lg x = y^{2 \lg x + 2 \lg y}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{3 \lg x}{y} = x \cdot \frac{2 \lg x}{y} \cdot \frac{2 \lg y}{y} \cdot \frac{2 \lg_{10} x}{y} \cdot \frac{2 \lg_{10} y}{y} \neq 0$$

$$\frac{3 \log_{10} x}{y} = \frac{\log_{10} x}{x} \cdot \frac{y}{2 \log_{10} y}$$

$$y^3 = x \cdot y^{2 \log_x y}$$
$$y^{3 \log_x x} = \frac{y^{\log_x x}}{x} \cdot y^2$$
$$x^3 = x$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y-1)^2$$

$$(x-y-2)^2 = 4(y-1)^2$$

$$x^{\log_{10} 10} = 10^{\log_{10} x}$$

$$|x - y - 2| = 2|y - 1|$$

$$x - y - 2 = 2y - 2$$

$$Lx - y - 2 = -2y + 2$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 - y \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$4^{5 \log_{10} x} = \frac{\log_{10} x}{x} \cdot \frac{2 \log_{10} x}{\frac{4}{x}} \cdot \frac{2 \log_{10} 4}{6^2}$$

$$5 \log_{10} 7 \cdot \log_{10} x = \log_{10}^2 x \cdot 40$$

$$5ab = b^2 + 2ab + 2b$$

$$x = \varphi$$

$$\log_{10} y = \frac{1}{2} \log_{10} x$$

$$y^2 = x$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$$

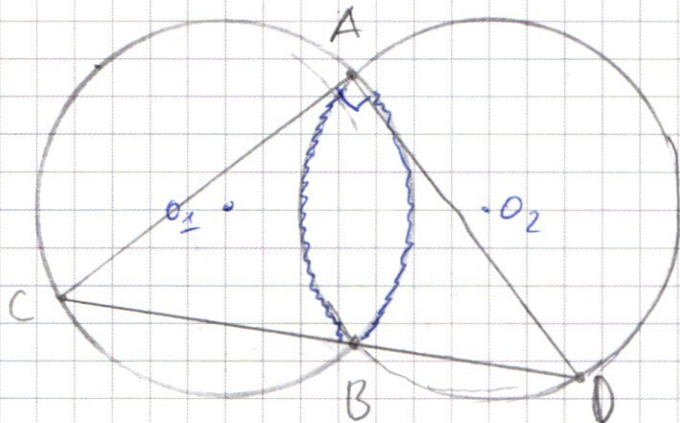
$$D = 96^2 - 86^2 = 6^2$$

$$a = \frac{36 \pm 6}{4} = 6$$

$$\phi = 6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6.



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$\angle CAB$ и $\angle CBA$ равны
т.к. A на дуге AB
от окружности O_1 и O_2

т.к. A и B лежат на
одной окружности

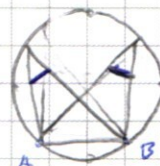
$$\text{т.к. } \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$\text{и } \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOB$$

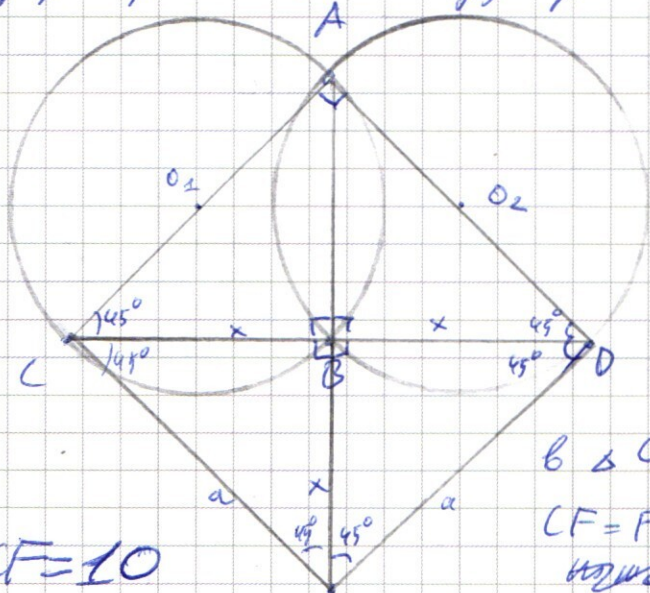
т.к. $\angle ADC = \angle ACD$ т.е. равнобедренный

$$\triangle ACD - \text{р.б.} \quad \angle ACD = \angle ADC = \alpha$$

$$2\alpha + 90^\circ = 180^\circ \quad \alpha = 45^\circ$$



Перенесем картинку, учитывая $AC = AD$



$AD = AC$ AB - диаметр
т.е. $F \in (AB)$

$$BD = BC = BF = r$$

$$\text{по т.П. и теореме в } \triangle ACD$$

$$AC^2 + AD^2 = 10^2 + 10^2 = 4x^2$$

$$2 \cdot 100 = 4 \cdot x^2$$

$$x^2 = \frac{100}{4} = 25 \quad x = 5\sqrt{2}$$

в $\triangle CFD$ BF - медиана

$$CF = FD \quad \text{т.к. } \angle CFB = \angle DFB$$

$$2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = CF = 10$$

$$CF = 10$$

$$BC \neq 6, \text{ т.к. } F \text{ лежит на } AB, \text{ ч.т. } CB = 5\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 50 \quad \text{Отв.: } CF = 10 \quad S_{ACF} = 50$$

$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$$\begin{aligned} \lg x \cdot \lg y &= 10 \\ \frac{\lg x}{x} \cdot y &= 10 = \frac{\lg x}{y} \end{aligned}$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x = y$$

$$x^2 - 2x(y+2) - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x = 3y$$

$$9y^2 - 6y \cdot y - 12y^2 - 3y^2 + 12y = 0 \quad \sqrt{25} = 5$$

$$x = 3y$$

$$x = 3y$$

$$x = 4 - y$$

$$\lg x \cdot \lg y = 1$$

$$\lg x$$

$$\frac{\lg x}{x \lg x} = \frac{\lg x}{y} \cdot \frac{\lg y}{y}$$

$$x = 4 - y$$

$$\begin{aligned} \lg y^2 &= 10 \\ \lg x &= 10 \end{aligned}$$

$$\frac{\lg x}{y} = \frac{\lg x}{x} \cdot \frac{\lg x}{y} \cdot \frac{\lg y}{y}$$

$$\begin{aligned} \lg_{10} a &= 10 \\ \lg_{10} a \cdot \lg_{10} a &= 1 \end{aligned}$$

$$t^5 = ab \cdot t^2$$

$$t^3 - ab = 0$$

$$\frac{\lg x}{y} = \frac{\lg x}{x} \cdot \frac{\lg y}{y}$$

$$\lg_{10} x$$

$$y^3 = x \cdot y^2$$

$$y^2(y-x) = 0$$

$$\begin{aligned} x &= y \\ \lg x &= 1 \\ \lg y &= 1 \end{aligned}$$

$$x = 3y$$

$$y = 3$$

$$x = 4 - x$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №1. Дан $\triangle ABC$, h - высота, $h = 1$. Найти $\angle KSO$.

Решение:

Пусть $h = 1$, тогда $SO = h$, $OK = h$.
 $SO = h + h = 2h$ (так как $SO = h$, $OK = h$)

$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$
 $\frac{h_{A_1B_1C_1}}{h_{ABC}} = \frac{1}{2}$ $k = \frac{1}{2}$

$\frac{SO_1}{SO_3} = \frac{1}{2}$

$\frac{h}{h+2h} = \frac{1}{2}$ $2h = h+2h$
 $h = 2h$

$\angle KSO = ?$
 $\angle KSO = \frac{OS}{OK} = \frac{2h}{h} = 2$

$OK = h$ $\angle KSO = \frac{1}{3}$ $\angle KSO = \arctan(\frac{1}{3})$

$OS = h + h = 2h$ $\angle KSO = OK = h$
 $OS = 3h$

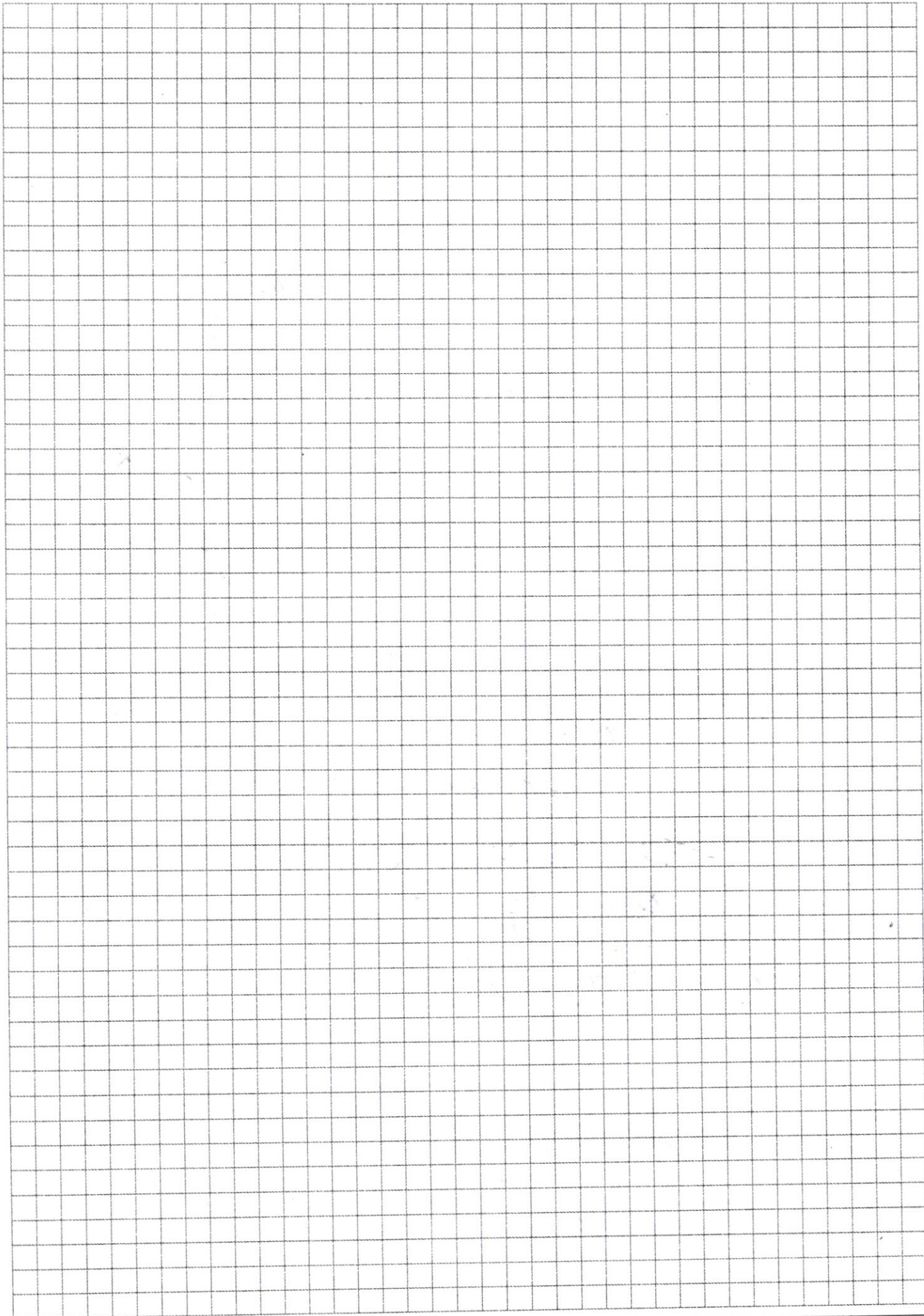
$\angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{h}{3h} = \frac{1}{3}$

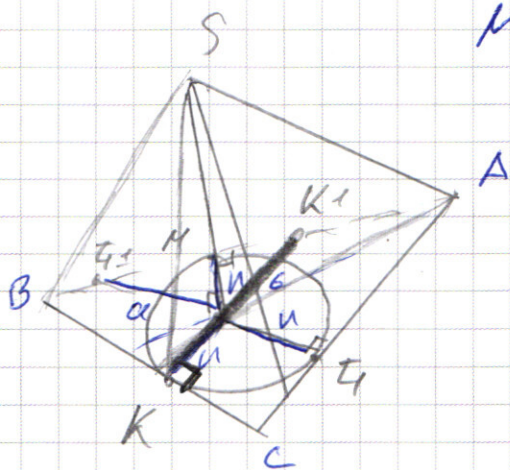
$\angle KSO = \arctan(\frac{1}{3})$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
 $\frac{h}{h+h} = \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$ $S_{ABC} = \frac{9 \cdot 1}{4}$

Ответ: $\angle KSO = \arctan(\frac{1}{3})$
 $S_{ABC} = \frac{9}{4}$





KK.

$$AK \cdot SO \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$$BL \cdot SO \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\sqrt{AK \cdot SO = 8}$$

$$BL \cdot SO = 2$$

SO

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

11+

$$KK_1 \cdot SO = 8$$

$$LL_1 \cdot SO = 2$$

$$(11+6) \cdot SO = 8$$

$$(11+0) \cdot SO = 2$$

$$\frac{11+6}{11+0} = 4$$

$$11+6 = 411 + 411$$

$$311 = 6 - 411$$

$$k \text{ и } \frac{k}{k+211} = k = \frac{4}{2}$$

$$k = 211 + 411$$

$$k^2 = 4$$

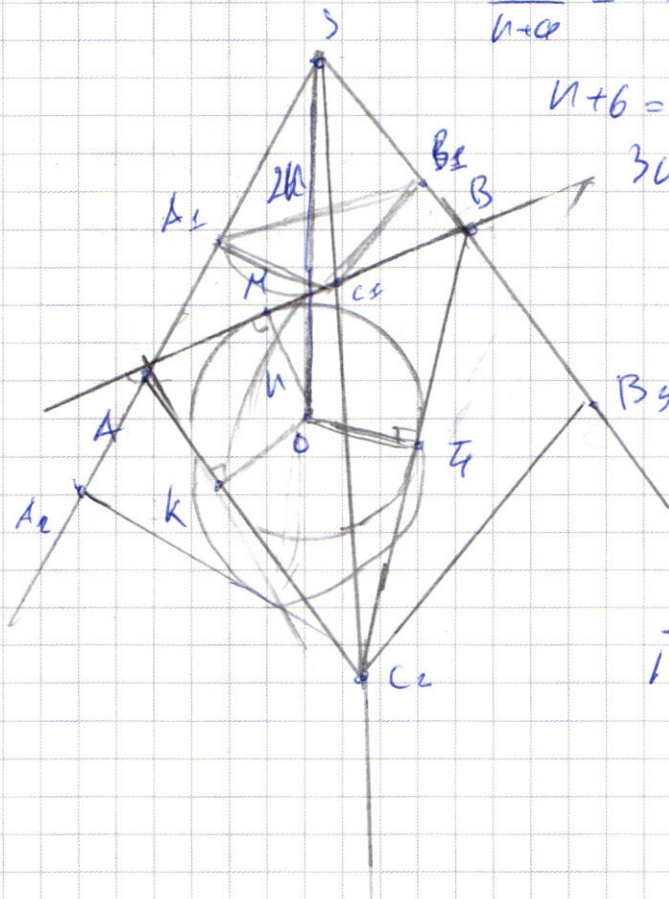
$$k = 2$$

$$\frac{k}{1}$$

$$\frac{k+211}{k} = 2$$

$$k + 211 = 2k$$

$$k = 211$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 11.

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

$$1) C_8^4$$

$$C_8^3 \cdot C_4^3$$

$$C_4^3$$

$$C_8^4 \cdot C$$

$$a_1 a_2 \dots a_n$$

$$C_3^1 \cdot C_3^1$$

$$A = C_8^3 (C$$

$$C_8^4 = (C_4^3 + C_4^1 \cdot C_3^1)$$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 24 \\ \hline 500 \\ 2500 \\ \hline 3000 \end{array}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{4!}{3!1!}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}$$

I когда у нас 3 - параметра

$$C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_4^1 =$$

$$= \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{4!(4-4)!} = \frac{8!}{3!4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4}$$

$$= \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 24 \\ \hline 280 \end{array}$$

II

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

$$6 \cdot 2^{64} < 70 + (2^{64} - 1)x$$

$$\frac{6 \cdot 2^{64} - 70}{2^{64} - 1} < x$$

$$y > 2 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 70 + (2^{64} - 1)x = 69 + 2^{64}x$$

$$2 + 6 \cdot 2^{64} < 69 + 2^{64}x$$

$$x > 6$$

$$y > 6 \cdot 2^{64}$$

$$\begin{cases} y > 64 + 6 \cdot 2^{64} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)64 \end{cases}$$

$$y > 2^6 + 6 \cdot 2^{64}$$

$$y \leq 6 + 2 \cdot 2^{64} = 6 + 2^{40}$$

$$6 \cdot 2^{64} < 6 + 2^{40}$$

$$6 \cdot 2^{64} < 6 + 64 \cdot 2^{64}$$

$$-6 < 64 \cdot 2^{64}$$

$$6 \cdot 2^{64} < y < 6 + 64 \cdot 2^{64}$$

$$\log_{f^x} y^{f^x} = 1 \quad \log_{f^x} y^y = 1$$

$$y > 3 \cdot 2^{65} = 6 \cdot 2^{64}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 6 \cdot 2^{64} \end{cases}$$

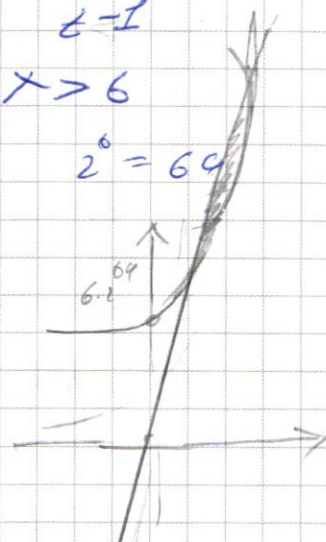
$$\frac{6 \cdot 2^{64} - 70}{2^{64} - 1}$$

$$\frac{6 \cdot 2^{64} - 6 + 64}{2^{64} - 1}$$

$$6 - \frac{64}{2^{64} - 1} < x$$

$$x > 6$$

$$2^6 = 64$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{65} < 2 \cdot 35 + 2 \cdot x - x$$

$$2^x - 70 < 3 \cdot 2^{65} + 2 \cdot x - x$$

$$< 2^{64} (6 - x)$$

$$2^x + x - 70 < 2^{64} (x - 6)$$

$$2^x + (x - 70) < 2^{64} (x - 6)$$

$$3 \cdot 2^{65} = 3 \cdot 2 \cdot 2^{64}$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 6 \cdot 2^{64} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 70 + 2^{64} x - x \end{cases}$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{64} < 70 - x + 2^{64} x$$

$$(2^x - x) < 70 + 2^{64} (x - 6)$$

$$(2^x - x) < 70 + 2^{64} (x - 6)$$

$$y > 0 \text{ и } y \geq 1 \text{ уравнение}$$

$$y > 6 \cdot 2^{64}$$

$$6 \cdot 2^{64} < 70 + (2^{64} - 1) x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{65} = 70 + (2^{64} - 1) x$$

$$2^x + 2^{64} \cdot 6 = 70 + (2^{64} - 1) x$$

$$2^x - 70 - x =$$

$$2^x - 70 - x = 2^{64} x - 6 \cdot 2^{64} = 2^{64} (x - 6)$$

$$-70 - 65 = 2^{64} \cdot 65$$

$$2^{65} - 135 = 2^{64} \cdot 64 = 2^8 \cdot 2^{64}$$

$$2^{65} - 135 = 2^8 \cdot 2^{64}$$

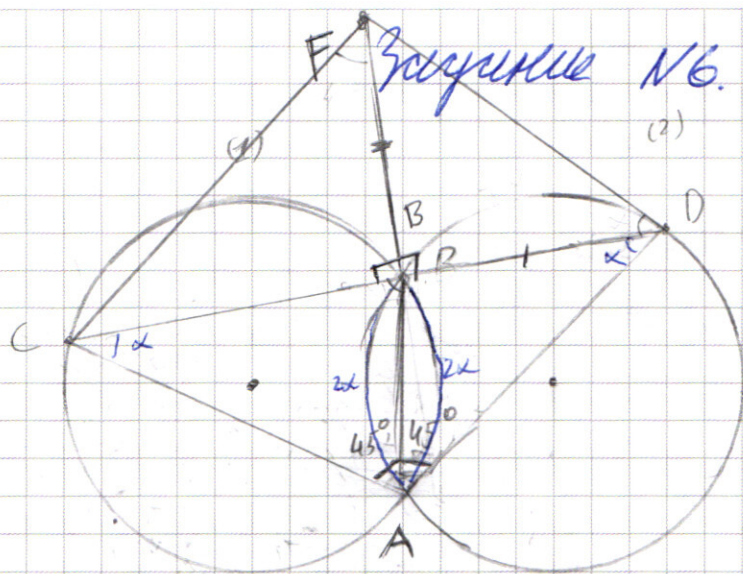
$$\begin{cases} x = y^2 \\ 4 - y = x \end{cases}$$

$$y^2 = 4 - y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$



$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BF = BD$$

$$\alpha = 45^\circ$$

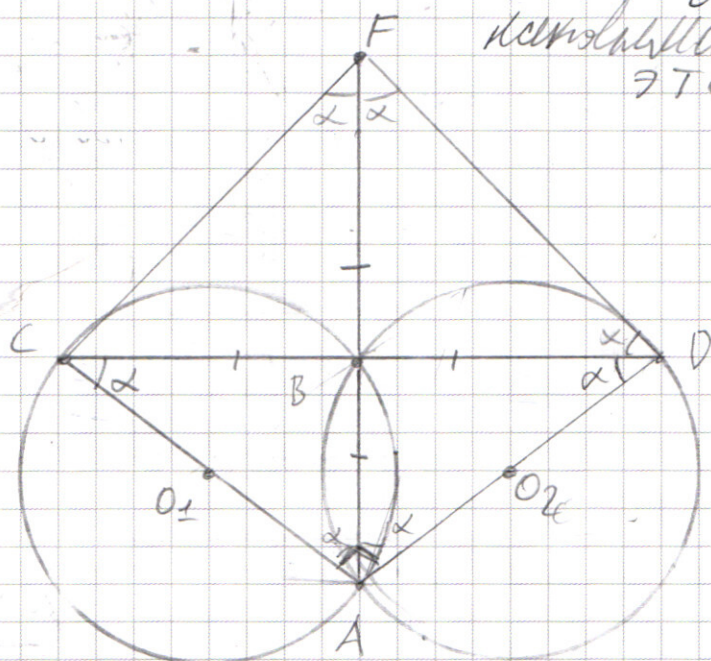
$$\angle BDA = \angle ACB = \alpha$$

М.к. описанная
на одну и ту же
дугу АВ, М.к.

окружности с
каждым из концов, но
это верно

$$2\alpha + 90 = 180^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$



$$AB \perp CD$$

$$BF = BD = BA = BC$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$\angle FDA$ - вписанный

$\triangle BDA$ - вписанный

в окр. с центром O_2

$$AD = CF = 10$$

$$\boxed{CF = 10}$$

$$AF = 10\sqrt{2}$$

$$\text{т.к. } O_2D = O_2A = 5$$

$$AD = 10$$

$$\frac{5 \cdot 5}{10\sqrt{2}} = \frac{15}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

$$y^{\lg x} = 10$$

$$\frac{2}{\lg x} = 3x$$

$$\sqrt[3]{10} = 3x$$

$$\sqrt[4]{y} \sqrt[3]{\lg x} \sqrt[5]{\frac{10}{5}} = \sqrt[10]{10}$$

$$y = 10^{\frac{1}{\lg x}} =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(1) \quad |y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$y-3 = \pm$$

$$| \pm - x | + | \pm + x | = 6$$

$$| -y+3+x | + | -y+3-x | = 6$$

$$y \geq 3+x$$

$$y \geq 3-x$$

$$I \quad y \leq 3+x$$

$$I \quad (1) \leq 0 \text{ и } (2) \geq 0$$

$$-y+3+x + y-3+x = 6$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$II \quad (1) \geq 0 \text{ и } (2) \geq 0$$

$$y-3-x + y-3+x = 6$$

$$2y - 6 = 6$$

$$y = 6$$

$$III \quad (1) \geq 0 \text{ и } (2) \leq 0$$

$$y-3-x - y+3-x = 6$$

$$-2x = 6$$

$$x = -3$$

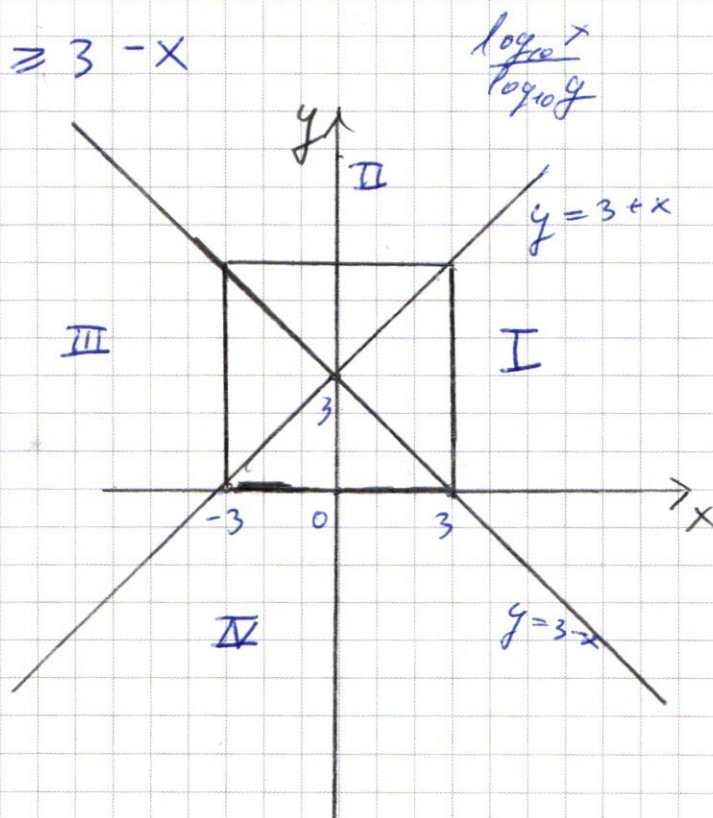
$$IV \quad (1) \leq 0 \text{ и } (2) \leq 0$$

$$-y+3+x - y+3-x = 6$$

$$y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \lg x (x+y^2) \cdot \frac{dy}{y}$$

$$\frac{\frac{dy}{y}}{\lg x} = \frac{dy}{x} \cdot \frac{1}{\lg y} \cdot \sqrt{1}$$



Orulom: $V \left\{ \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi K; \frac{\pi}{44} - \frac{2}{11} \pi K; \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi K}{7} \right\}$
 $K \in \mathbb{Z}$

N3.

$$\left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x + \lg y}$$

$$(0-6)(a^2+ab+b^2)=0$$

$$0^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - \cancel{b^3} = 0$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 = y^2 + 12y$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2 - (y+2)^2 - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y-2)^2 = (y+2)^2 + 3y^2 - 12y$$

$$(x-y-2)^2 = y^2 + 4y + 4 + 3y^2 - 12y = 4y^2 - 8y + 4 = 4(y^2 - 2y + 1) = 4(y-1)^2$$

$$\boxed{4(y-1)^2 = (x-y-2)^2}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x + \lg y} = \frac{y^{\lg x}}{y^{\lg x}} + y^{2 \lg y} = 10^2 + y^{2 \lg x}$$

$$\frac{y^5 \lg x}{10} = 100 + y^{2 \lg x}$$

$$t^5 = 1000 + t^2 \cdot 10$$

$$t^5 - 10t^2 - 1000 = 0$$

$$t = 10$$

$$10000 - 10000$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$$3345 = 5^3 \cdot 3^3$$

I у нас 555 и 39 и 111 - это цифры, которые можно представить

выражения у нас

№3.

$$\frac{y^{5\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2\lg x} = y^{\lg x} \cdot y^{\lg x} = 100 y^{2\lg x} \quad x \cdot y > 0$$

$$\frac{y^{5\lg x}}{10} = 100 y^{2\lg x}$$

$$y^{5\lg x} = 1000 y^{2\lg x}$$

$$t^5 = 1000 t^2$$

$$y^{\lg x} = t \quad t > 0$$

$$t^2(t^3 - 10^3) = 0$$

$$t^2(t - 10)(t^2 + 10t + 100)$$

$$t = 10$$

$$y^{\lg x} = 10 = y^{\lg y} \quad \lg x = \lg y$$

$$x = y$$

$$\begin{cases} 4(y-1)^2 = (x-y-2)^2 \\ x=y \end{cases} \quad x \cdot y > 0$$

$$4(x-1)^2 = (x-x-2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 = 1$$

$$(x-1) = \pm 1$$

$$x = 2$$

$$x = 0 - \text{не подходит}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2)$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x) + 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) (\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x + 2 \sin 4x) = 0$$

$$(\cos 7x + \sin 7x) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x \right) = 0$$

$$I \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\cos 7x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x \right) = 0$$

$$\cos \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$7x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}$$

$$II \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \sin 4x = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x + 4x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 7x - 4x}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 11x \right) = \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 3x = 2\pi k \\ \frac{\pi}{4} - 11x = 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 2\pi k = 3x \\ \frac{\pi}{4} - 7\pi k = 11x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3} \pi k \\ x = \frac{\pi}{44} - \frac{2}{11} \pi k \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$3375 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3^3$$

.....

$$5^3 \cdot 3^3 \cdot 1^1$$

$$5^3 \cdot 3^3 \cdot 1^1$$

$$C_2^1 = \frac{2!}{(2-1)!1!} = 2$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 17 \\ \underline{15} \\ 25 \end{array}$$

$$555 \cdot 33111$$

$$1) C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{3!(8-3)!} \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{8!}{3!3!2!}$$

$$\begin{array}{r} 1335 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 33 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 3y \\ x = 4 - y \\ y^2(y - x) = 0 \end{cases}$$

$$x, y \geq 0$$

$$x = 4 - x$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = 3y \\ x = 4 - y \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 4 - 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

$$1 =$$

0

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

$$I \quad a=1 \quad n=1$$

$$y=3 \quad x=4$$

четыре окружности

$$y=-3 \quad x=4 \text{ четыре окружности}$$

$$II \quad a=4 \quad n=2$$

если $(x_0; y_0)$ - р-ш.,

то и $(-x_0; -y_0)$ - р-ш.

Мы можем рассмотреть
окружности

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$$

и найти, когда радиус $\neq 1$ радиуса.

это будет при $a \neq 1$

$$\text{Пусть } a = (\sqrt{6^2 + 3^2})^2 = (\sqrt{36 + 9})^2 = (3\sqrt{5})^2$$

$r = 3\sqrt{5}$ этот случай не рассмотрим, ш.к.

решений четыре

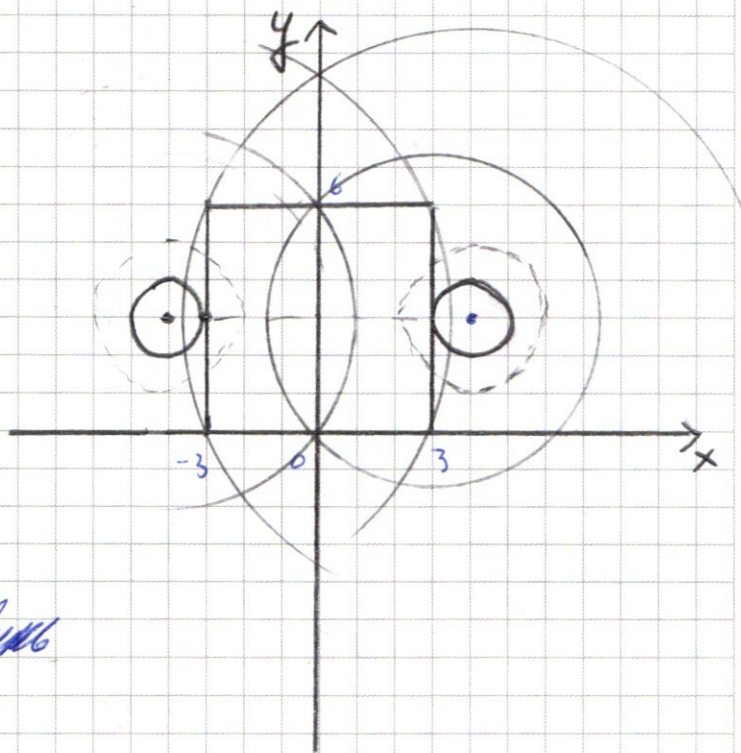
$$\text{еще есть случай, когда } a = (\sqrt{3^2 + 3^2})^2 = (\sqrt{18})^2 = (3\sqrt{2})^2$$

ш.к. $r = 3\sqrt{2}$

$$\text{и р-ш } y=6 \quad x=0 \text{ и } x=0 \quad y=0$$

Ответ: $a=18$ и $a=1$

ЧЕРНОВИК



$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 56 \\ \hline 30 \\ 1680 \end{array}$$

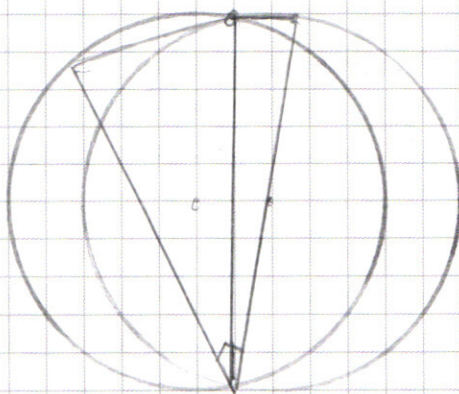
30

$$\frac{\times 8}{56}$$

$$\frac{30}{44} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{9}{16}$$

$$5 = \frac{9}{4}$$



N4.

$$y = \lg$$

$$\lg x = 10$$

$$\lg y = \lg x = 1$$

$$\lg x = 10$$

$$\lg y = 10$$

$$\lg y \cdot \lg y = 1$$

$$\lg y = \frac{1}{\lg y}$$

$$y = 1$$

$$4 - y = 1$$

$$y = 1$$

$$y = 2$$

$$\lg 2 = 1$$

$$4 - y > 0 \quad y = 0$$

$$0 < y < 4$$

$$\lg y \quad \text{или} \quad y \in y$$

$$\in (-\infty; \lg 10)$$