

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{cccc|c}
 1 & 3 & 3 & 7 & 5 & 5 \\
 & 6 & 7 & 5 & & 5 \\
 & 1 & 3 & 5 & & 5 \\
 & & 2 & 7 & & 3 \\
 & & & 9 & & 3 \\
 & & & 3 & & 3 \\
 & & & 1 & & 1
 \end{array}$$

$$3375 = 5^3 \cdot 3^3$$

Значит в искомом числе должно быть 3 пятёрки,
3 тройки и 2 единицы $\{5, 5, 5, 3, 3, 3, 1, 1\}$

Каждая тройка одинаковых чисел уменьшает кол-во
различных вариантов в 6 раз, а каждая пара в 2 раз,
поэтому всего вариантов будет $\frac{8!}{6 \cdot 6 \cdot 2}$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

Ответ: 560

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \end{cases}$$

рассмотрим первое уравнение системы:

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$1) \quad y \geq x+3$$

$$y-3-x+y-3+x=6$$

$$2y-6=6$$

$$\underline{y=6}$$

$$2) \quad y < x+3$$

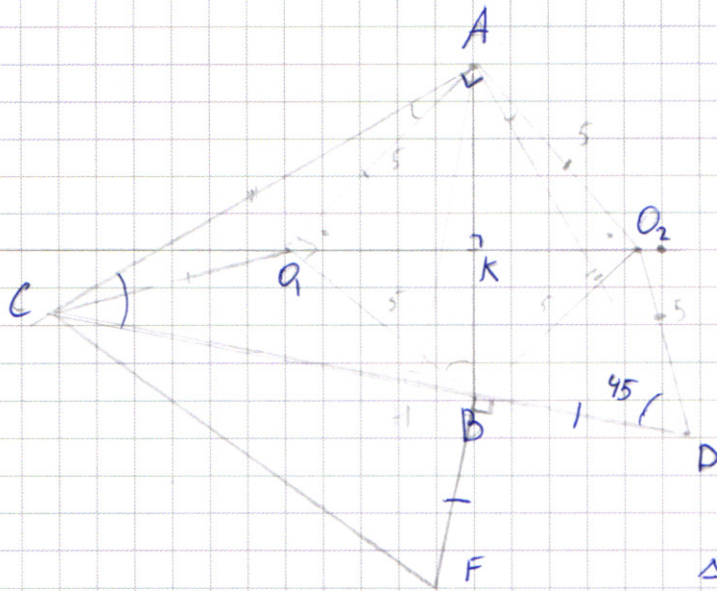
$$y \geq x-3$$

$$-y+x+y-3+x=6$$

$$2x=6$$

$$\underline{x=3}$$

6.



а). O_1 и O_2 — центры
окружностей

$\angle ADB = \angle ACB$ (опер.
на одной дуге)

т.к. $\triangle CAD$ — равнобедр., то

$\angle ADB = 45^\circ = \angle ACB$

↓

$AC = AD$

$\triangle AO_1C = \triangle AO_2D$ по трем
сторонам т.к. $AO_1 = CO_1 = AO_2 = O_2D$
радиусы

Пусть $\angle AO_2D = \alpha$

$$AD^2 = AO_2^2 + O_2D^2 - 2AO_2 \cdot O_2D \cdot \cos \alpha$$

$$AD^2 = 50 - 50 \cos \alpha$$

т.к. $\triangle AO_1C = \triangle AO_2D$, то $\angle O_2AD = \angle CAO_1 \Rightarrow$ т.к. $\angle CAD = 90^\circ$,

то $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$, тогда O_1AO_2B — квадрат $O_1O_2 = AB = 5\sqrt{2}$

~~$$AB^2 = AD^2 + BD^2$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $y < x - 3$

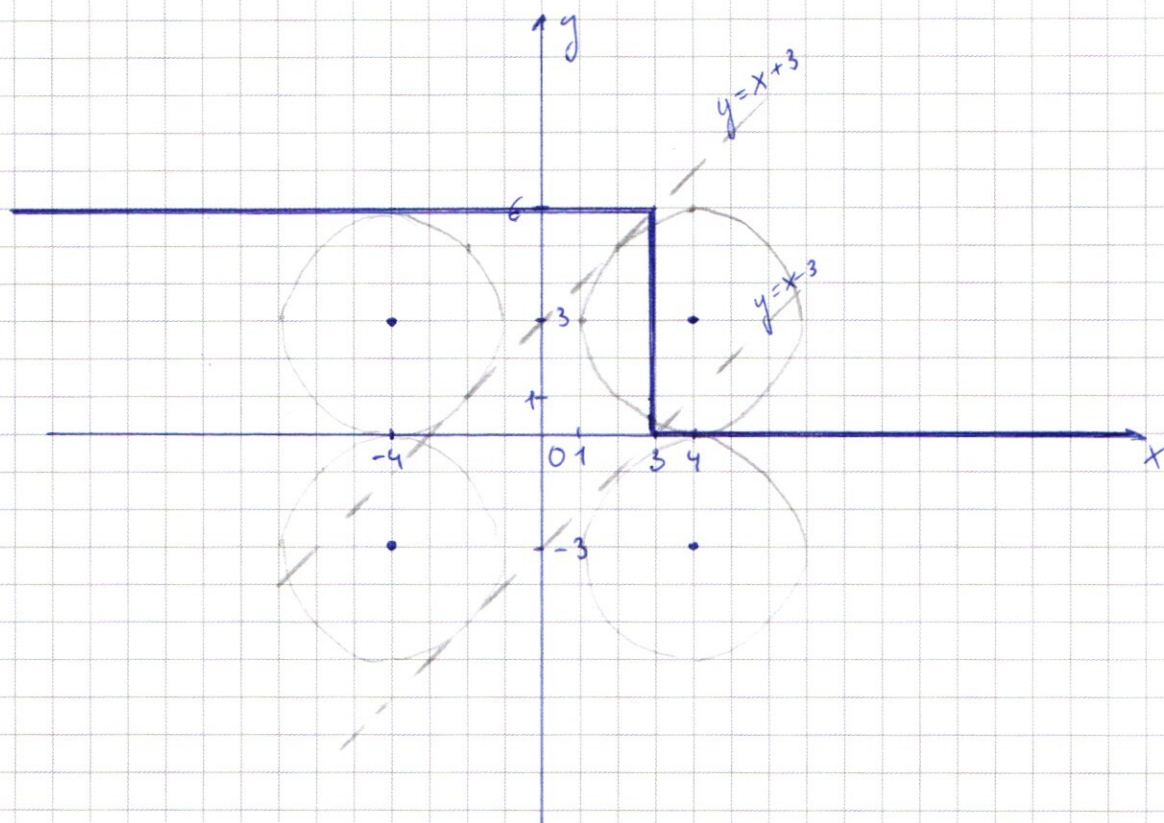
$$-y + 3 + x - y + 3 - x = 6$$

$$-2y + 6 = 6$$

$$y = 0$$

второе уравнение системы представляет собой четыре окружности с центрами в точках $(-4; -3)$ $(-4; 3)$ $(4; -3)$ $(4; 3)$ и радиусом $\sqrt{2}$

Изобразим на графике множество точек удовл. первой ур-ю и центры окр-тей y второго.



Два решения у системы будут только тогда, когда окружность с центром $(4; 3)$ будет пересекать пр. $x = 3$

в двух точках, но не будет касаться пр. $y=0$, т.к. при других значениях радиуса эта окр-ть будет пересекать график в двух или более точках и окр-ть с центром $(-4; 3)$ будет пересекать график в двух точках, при этом одна из них будет обратным образом от ~~пер~~ точек перес. первой окр-тью

$$\begin{cases} R > 1 \\ R < 3 \end{cases} \quad \text{где } R - \text{радиус}$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ a < 9 \end{cases}$$

Ответ: $a \in (1; 9)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 11x \cos 3x - \sqrt{2} \sin 11x \sin 3x \\
 & \cos 11x (1 - \sqrt{2} \cos 3x) - \sin 11x (1 + \sqrt{2} \sin 3x) \\
 & -2 \sin 7x \sin 4x - (2 \sin 4x \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x) (\cos 7x - \sin 7x)
 \end{aligned}$$

$$1) \sin 7x + \cos 7x = 0 \quad / : \cos 7x \neq 0$$

$$\operatorname{tg} 7x + 1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) \\
 & -2 \sin 4x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right)
 \end{aligned}$$

$$-2 \sin 4x = 2 \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) \right)$$

$$-\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$$

$$\sin 4x = \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x - \frac{\pi}{4} - 4x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7x - \frac{\pi}{4} + 4x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

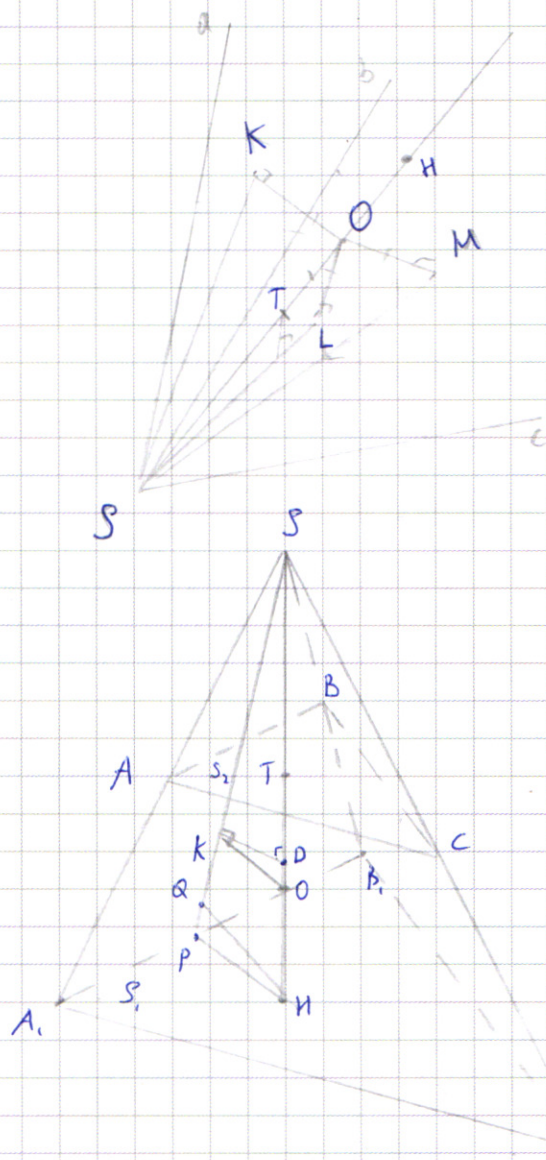
$$11x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi n}{11}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

4.



Пусть т. Т - точка касания сферы меньшим сечением, а т. Н - большим

$SH \perp A, B, C$, т. Т $\in ABC$, т. Н $\in A, B, C$

$$S_1 = 4 \quad S_2 = 2$$

$$S_1 = SH \cdot \frac{1}{3}$$

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, т.т.

$\perp SH$ и вершины на одинаковых прямых

$A, A_1 \in SA$, $B, B_1 \in SB$, $C, C_1 \in SC$.

$$AC : A_1C_1 = 1 : 2 = AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$$

$$\frac{S_1}{S_2} = k^2 \quad 4 = k^2 \quad k = 2$$

$$ST = TH \quad \text{т.т.} \quad k = 2 \quad ST = 2R \quad \text{где } R - \text{радиус сферы}$$

$$SO = 3R \quad \rho(\text{т. } O, A, SB_1) = R \quad \text{т.т. сфера вписана}$$

тогда $\angle KSO$ (угол между SO и бок. радиусом) равен

$$\arcsin \frac{1}{3}, \quad \text{тогда } SK = SO \cdot \cos \angle KSO \quad \cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$SK = 3R \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}R$$

$$\frac{SD}{HS} = \frac{KD}{HP}$$

$$KD = SK \cdot \sin \angle KSO = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$$

$$\frac{SD}{HS} = \frac{2\sqrt{2}R \cdot 2\sqrt{2}}{3 \cdot 4R} = \frac{2}{3}$$

$$HP = SH \cdot \tan \angle KSO = 4R \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{сеч}} = S_{AB, C} \cdot \left(\frac{SD}{HS}\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot 4 = \frac{16}{9}$$

Ответ: а) $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{3}$
б) $S = \frac{16}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\frac{x > 0}{xy > 0} \Rightarrow \underline{y > 0}$$

$$1) \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2(\lg x + \lg y)}$$

$$2) x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 12y + 36 - 36 - 4y^2 - 2xy = 0$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+6)^2 - 36 - 4y^2 - 2xy = 0$$

$$1) \frac{y^{5 \lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} \quad | \cdot y^{2 \lg x} \neq 0$$

$$y^{3 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg x} = y^{\lg x \cdot \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$3 \lg x = \lg x \cdot \lg x + 2 \lg y$$

$$1) y^{5 \lg x} = x^{\lg x} \cdot y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$10^{\lg y \cdot 5 \lg x} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{2 \lg x \cdot \lg y} \cdot 10^{2 \lg^2 y}$$

$$\lg y = b \quad \lg x = a$$

$$5ab = a^2 + 2ab + 2b^2$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-2b)(a-b) = 0$$

$$\begin{cases} a = 2b \\ a = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 1. \quad y^2 &= x \\
 \left(\frac{y^5}{y^2}\right)^{\lg y^2} &= y^{2 \lg y^3} \\
 y^{3 \lg y^2} &= y^{2 \lg y^3} \\
 3 \lg y^2 &= 2 \lg y^3 \\
 \lg y &= 0 \quad \underline{y=1} \Rightarrow \underline{x=1}
 \end{aligned}$$

$$3 = 2 \lg y$$

$$\lg y = \frac{3}{2}$$

$$y = 10^{\frac{3}{2}}$$

$$y = \sqrt{1000}$$

$$x = 1000$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad x &= y \\
 \left(\frac{y^5}{y}\right)^{\lg y} &= y^{2 \lg y^2}
 \end{aligned}$$

$$y^{4 \lg y} = y^{2 \lg y^2}$$

$$4 \lg y = 2 \lg y^2$$

$$2 \lg y = \lg y^2$$

$$\lg y = 0 \quad y=1 \Rightarrow x=1$$

$$\lg y = 2 \quad y=100 \Rightarrow x=100$$

Ответ: $(1; 1) (100; \sqrt{1000}) (100; 100)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5 \ 5 \ 5 \ 6 \ 4 \ 8$$

$$2 \ 2 \ 2 \ 1 = 8$$

$$5 \ 5 \ 5 \ 6$$

$$5 \ 5 \ 6 \ 5$$

$$5 \ 6 \ 5 \ 5$$

$$6 \ 5 \ 5 \ 5$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \\ 1 \ 2 \ 3 \end{array}$$

$$4 = 2 \cdot 2$$

$$1 \ 1 \ 3$$

$$1 \ 2 \ 3$$

$$3 \ 2 \ 1 = 6$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 2 \\ 1 \ 2 \ 1 \\ 2 \ 1 \ 1 \end{array} \} 3$$

$$\begin{array}{r} 1 \ 1 \ 1 \ 2 \\ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \\ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \\ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \} 4$$

$$2 \ 3$$

$$1 \ 1 \ 2 \ 3$$

$$3 \ 3 \ 2 \ 1 = 18$$

$$3! = 2$$

$$4! = 24 \quad 4 \cdot 3 \cdot 2 = 6 = 4$$

$$8! = 6 \cdot 6 \cdot 2$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$|y-3-x| + |y-3+x| = 6$$

$$|t-x| + |t+x| = 6$$

$$1) \ y \geq x+3$$

$$y \geq x-3$$

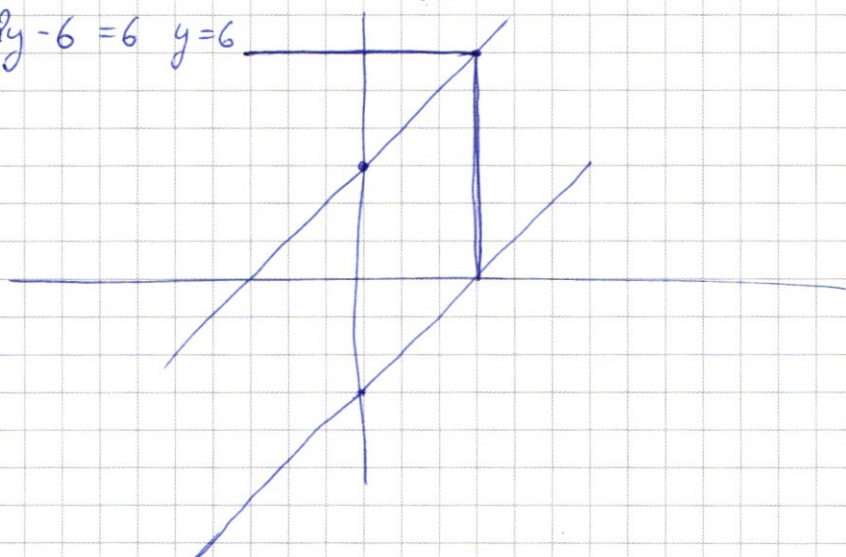
$$2) \ y < x+3$$

$$y \geq x+3$$

$$3) \ y < x+3$$

$$y < x-3$$

$$2y-6=6 \quad y=6$$



$$2) \ -y+3+x+y-3+x=6$$

$$x=3$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 - 4y^2 - 4x + 12y = 0$$

$$(x-y)^2 = 4(y^2 + x) + 12y$$

$$x^{\lg x} = 10^{\lg^2 x}$$

$$y^{\frac{5}{\lg x}} = x^{\lg x} \cdot y^{\frac{2}{\lg x}} \cdot y^{\frac{2}{\lg y}}$$

$$10^{\frac{5}{\lg x} \cdot \lg y} = 10^{\lg^2 x} \cdot 10^{\frac{2}{\lg x} \lg y} \cdot 10^{\frac{2}{\lg y} \lg y}$$

$$5 \lg x \cdot \lg y = \lg^2 x + 2 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2 x - 3 \lg x \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$D = 9b^2 - 8b^2 = b^2$$

$$a = \frac{3b \pm |b|}{2}$$

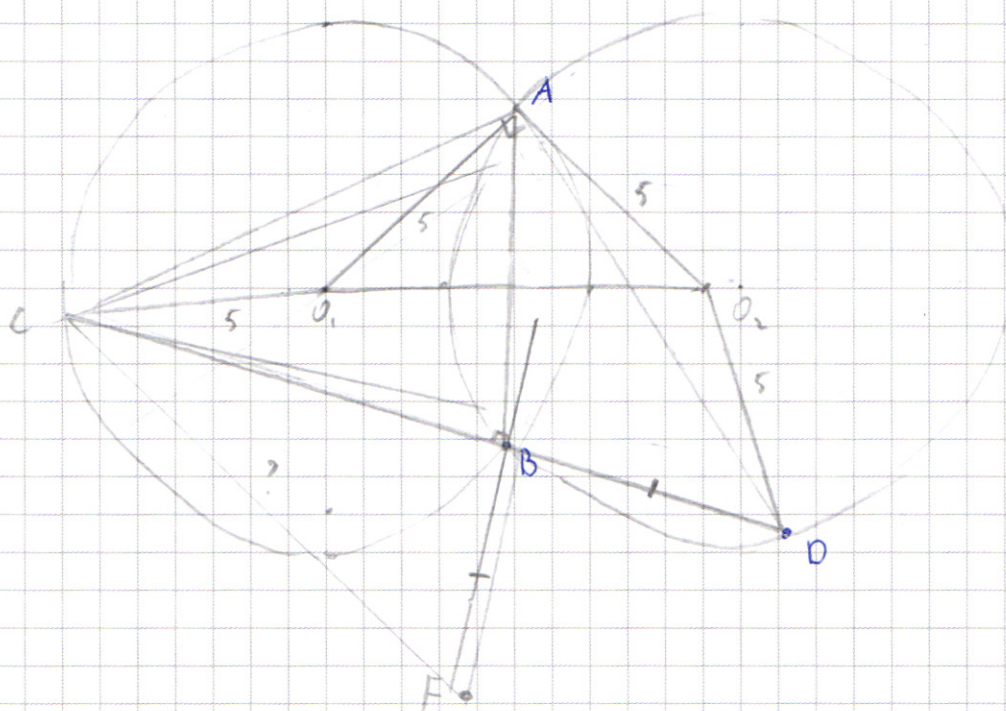
$$a = 2b$$

$$a = b$$

$$(a - 2b)(a - b) = \cancel{a^2} - \cancel{3ab} + 2b^2$$

$$\begin{cases} \lg x = 2 \lg y \\ \lg x = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = y \end{cases}$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)