

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$3375 = 5^3 \cdot 3^3$, $\Rightarrow$ Рассмотрим два случая

1). Допустимое число состоит из 3-х 5, одной 9, одной 3, трёх единиц.

Пример: 93555111.

2). Допустимое число состоит из трёх 5, двух 3, двух 1.

Пример: 55533311

~~Каждое такое число имеет 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! = 96~~

~~Каждое такое число имеет 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! = 72~~

~~Всего таких чисел = 96 + 72 = 168~~

~~Ответ: 168~~

$$\left. \begin{aligned} P_2 &= \frac{8!}{3!3!2!} = 560 \\ P_4 &= \frac{8!}{1!3!1!3!} = 1120 \end{aligned} \right\} 1680$$

Ответ: 1680.

$$\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = y^{2/5} \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

I строка:

$$\lg \left(\frac{y}{x}\right)^5 \lg x = \lg (y^{2/5} \lg xy)$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = \lg xy \lg y^2$$

003.

$$x > 0$$

$$xy > 0.$$

II строка:

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0.$$

$$(x+y-4)(x-3y) = 0.$$

$$(y^2 - 3y)(y^2 + y - 4) = 0.$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$(x + y - 4)(x - 3y) = 0.$$

$$\begin{cases} (y^2 - 3y)(y^2 + y - 4) = 0 \\ (2y - 4)(3y - 4) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (3; 3); \left(\frac{9}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}\right)$

2.

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x - \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x)$$

$$(\cos 7x + \sin 7x)(\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0.$$

1).

$$\cos 7x + \sin 7x = 0.$$

$$\tan 7x = -1$$

$$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k.$$

2).

$$\cos 7x - \sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x = 0.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \sin 4x = 0.$$

$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \\ \cos \frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} = 0. \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k. \end{cases}$$

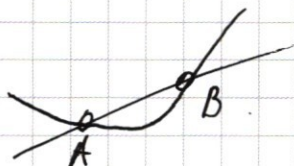
Ответ:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi}{7} k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{69} - 1)x \end{cases}$$



AB - необходимые значения
когда выполняются все
условия, когда най-во y
для каждого $x =$

$$y(x) = 2^{64}(x - 6) + (73 - x) \cdot 2^x.$$

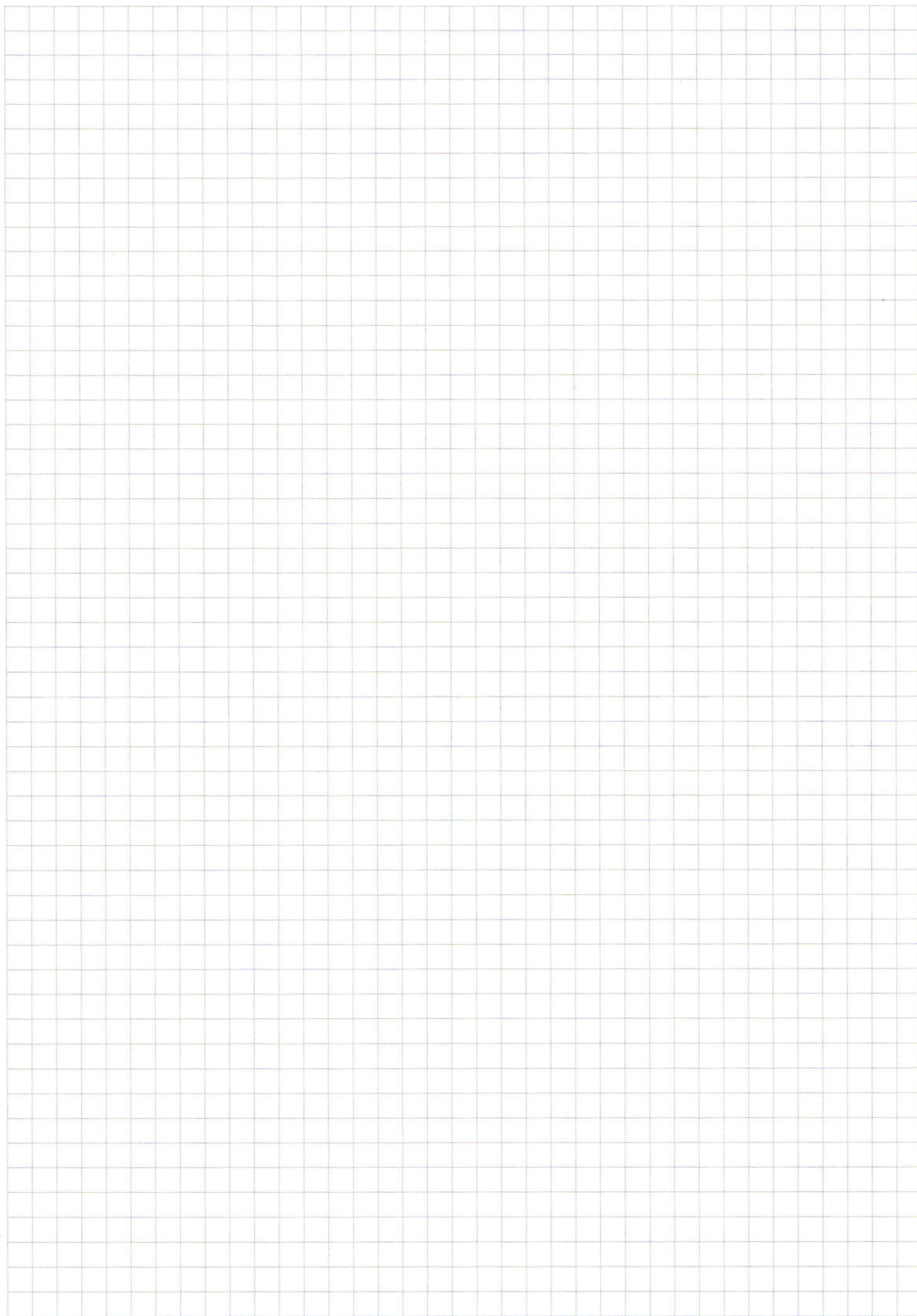
При $x = 6$; $y(6) = 0$.

При $x = 70$; $y(70) = 0$, $\Rightarrow$.

$[A, B] = [7; 69]$, $\Rightarrow$ сумма равна:

$$2^{64} + 2 \cdot 2^{64} + 63 \cdot 2^{64} - 2^7 - 2^8 - 2^{63} - 2^{64} + 64 \cdot 2^5 - 2^5 - 4^{25} = 61 \cdot 2^{63} + 59 \cdot 2^6$$

Ответ: $61 \cdot 2^{63} + 59 \cdot 2^6$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 3325 \overline{) 675} \text{ ⑤} \\ \underline{675} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \overline{) 27} \text{ ⑤} \\ \underline{27} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \overline{) 3} \text{ ③} \\ \underline{3} \\ 0 \end{array}$$

$$1. 33222111 = 72$$

$$2. 43222111 = 96$$

168 часов

$$\begin{array}{r} 87655321 \\ \underline{87655321} \\ 0 \end{array}$$

$$8 \text{ 33}$$

$$95553311$$

$$87654321$$

$$n!$$

$$8!$$

$$\begin{array}{r} \times 760 \\ 56 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 720 \\ 56 \\ \hline 4320 \\ 360 \\ \hline 40320 \end{array}$$

$$33322211$$

$$33222222$$

$$33222111$$

$$55533311$$

$$125 \cdot 29$$

$$\begin{array}{r} \times 125 \\ 29 \\ \hline 875 \\ 250 \\ \hline 3375 \end{array}$$

Ответ: 40320

$$55593111$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 9x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 9x$$

$$x^2 - 2(xy - 4x) - 3(y^2 - 12y)$$

$$x^2 - 2(xy - 4x) - 3y(y - 4) = 0$$

$$x^2 - 2x(y - 4) -$$

$$x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0$$

$$x^2 + 2x(-xy - 2)$$

$$x^2 - 2x(y + 2) - 3y(y - 4) = 0$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \cos^2 \sin^2 7x = 2\cos^2 7x - 1$$

$$2\sqrt{2} \cos^2 7x = \sqrt{2}.$$

$$\sin 11x + \sin 3x = \sin \frac{11x+3x}{2} \sin \frac{11x-3x}{2} = \sin 7x \sin 4x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \sin 7x \sin 4x.$$

$$\sin 7x (\sin 4x - \cos 4x) = 1 - 2 \sin^2 7x$$

$$\sin 7x (\sin 4x - \cos 4x - 2 \sin^2 7x) = 1.$$

$$\cos 14x = \cos^2 7x - \sin^2 7x = 1 - 2 \sin^2 7x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x = -2 \cos 7x \cos 4x$$

$$\sin 11x + \sin 3x$$

$$\sin 3x - \sin 11x =$$

$$\sin 11x - \sin 3x = 2 \sin 4x \cos 4x.$$

$$2 \cos 7x \cos 4x - 2 \cos 7x \sin 4x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} \cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \cos 14x.$$

$$\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$2 \cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{2} \cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \cos 14x$$

$$\sqrt{2} \cos 7x (\cos 4x - \sin 4x) = \cos 14x.$$

$$\sqrt{2} (\cos 4x - \sin 4x) = \frac{\cos 14x}{\cos 7x}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

0203
 $x > 0$
 $xy > 0.$

Реш.

$$\left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^2 \lg xy.$$

$$\lg \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = \lg (y^2 \lg xy).$$

$$\lg x (5 \lg y - \lg x) = \lg xy \lg y^2$$

$$(\lg x - \lg y)(\lg x - 2 \lg y) = 0.$$

$$\begin{cases} x = y \\ x = y^2 \\ (x + y - 4)(x - 3y) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ y = 3 \\ x = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$2y - 4 = 0$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y - 2 = 0$$

$$y(y - 3) = 0$$

$$y = 2.$$

$$y = 3; 0$$

$$\begin{cases} (y^2 - 3y)(y^2 + y - 4) = 0. \\ (2y - 4)(y^2 - 3y) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} (y^2 - 3y)(y^2 + y - 4) = 0. \\ (2y - 4)(3y - 4) = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2) (9; 3) \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2}\right).$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & = 2 \sin 4x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4 \cos 7x = \sqrt{2} (\cos 4x + \sin 4x)(\cos 4x - \sin 4x) \\
 & - 2 \sin 4x (\sin 4x - \cos 4x) = \sqrt{2} (\cos 4x + \sin 4x)(\cos 4x - \sin 4x) \\
 & (\cos 4x + \sin 4x)(\cos 4x - \sin 4x + \sqrt{2} \sin 4x) = 0.
 \end{aligned}$$

$$1) \cos 4x + \sin 4x = 0.$$

$$\text{tg } 4x = -1.$$

$$4x = -\frac{\pi}{4} + \pi k.$$

$$x = \left(-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4} k \right).$$

$$2) \cos 4x - \sin 4x + \sqrt{2} \sin 4x = 0.$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x + \sin 4x = 0.$$

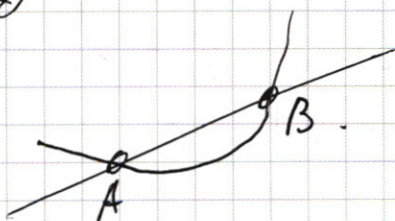
$$2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} \right) = 0. \\ \cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} - 11x}{2} \right) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\frac{\pi}{12}}{12} + \frac{2\pi}{3} k. \\ x = \frac{3\pi}{44} + \frac{2\pi}{11} k. \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65}. \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x. \end{cases}$$



AB - необходимые значения
когда выполняются все
условия, тогда кол-во x

$$f(x) = 2^{64}(x-6) + (73-x) - 2^x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

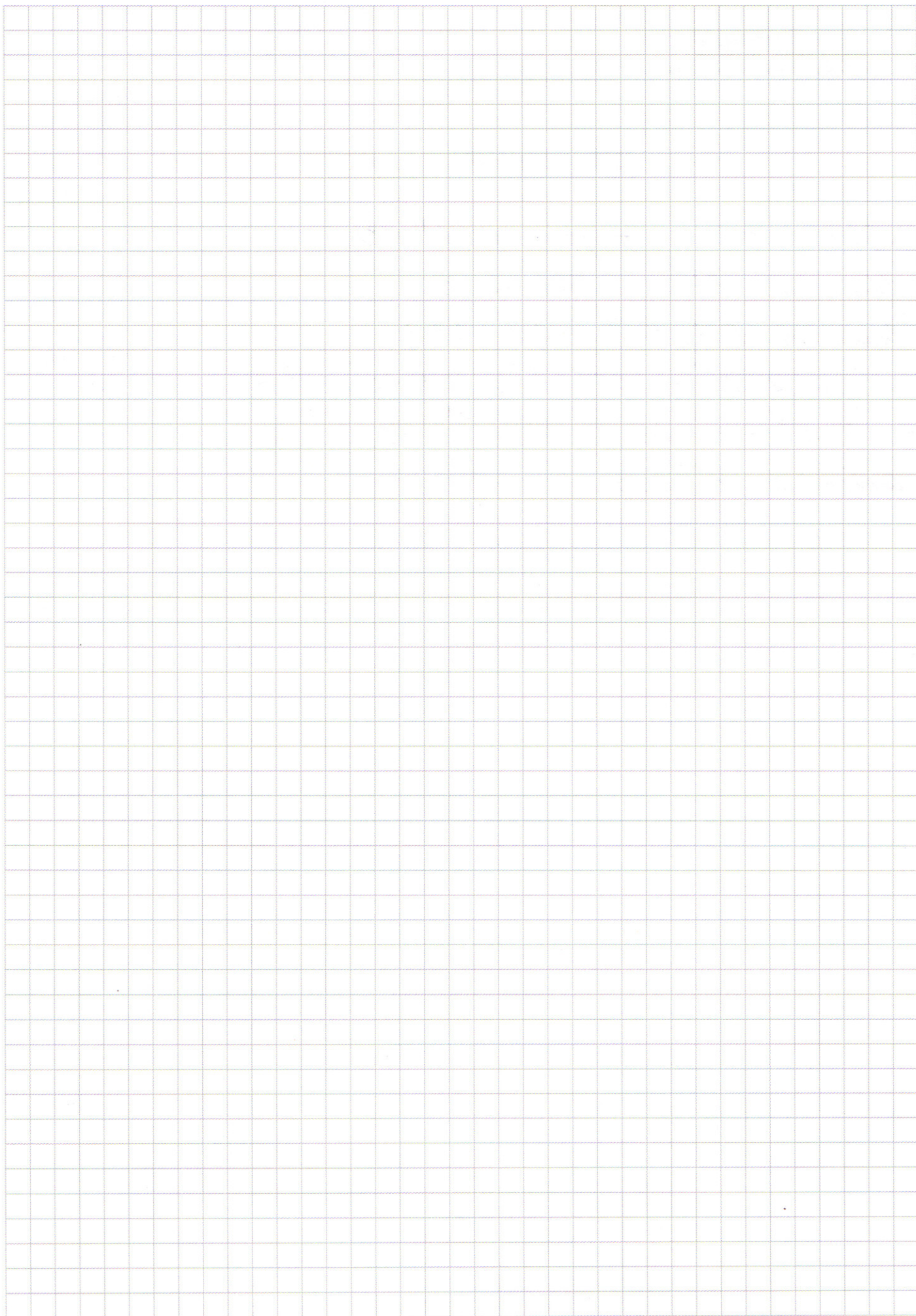
$$\text{При } x = 6 \quad p(y) = y \cdot (6) = 0.$$

$$\text{При } x = 20 \quad q(20) = 0.$$

$$\text{Значит } [A; B] = [7; 69]$$

$$L^{64} + 2 \cdot 2^{64} + 63 \cdot 2^{64} + 63 \cdot 2^7 - 2^6 - \dots - 2^{63} - 2^{64} + \\ + 64 \cdot 2^5 - 2^5 - 4^{25} = 61 \cdot 2^{63} + 59 \cdot 2^6.$$

$$\text{Ответ: } 61 \cdot 2^{63} + 59 \cdot 2^6.$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)