

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 5^3 \cdot 3^3 = 5^3 \cdot 3 \cdot 9$

Получается, существует два вида таких безликарных чисел:

1) три цифры 5, три цифры 3, две цифры 1

2) три цифры 5, три цифры 1, одна цифра 3, одна цифра 9

Способы выбрать цифру 5: $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 = A_1(5)$

Рассмотрим 1 вид: Способы выбрать цифру 3: $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10 = A_1(3)$

Способы выбрать цифру 1: $C_2^2 = \frac{2!}{2!(2-2)!} = 1 = A_1(1)$

Рассмотрим 2 вид: Способы выбрать цифру 1: $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10 = A_2(1)$

Способы выбрать цифру 3: $C_2^1 = 2 = A_2(3)$

Способы выбрать цифру 9: $C_1^1 = 1 = A_2(9)$

Тогда число чисел 1 вида: $N(1) = A_1(5) \cdot A_1(3) \cdot A_1(1) = 56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$

А число чисел 2 вида: $N(2) = A_1(5) \cdot A_2(3) \cdot A_2(9) \cdot A_2(1) = 56 \cdot 10 \cdot 2 = 1120$

Тогда всего таких чисел будет: $N = N(1) + N(2) = 560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

2. $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x - \sin 3x = \sqrt{3}(\cos 4x$

$-2\sin 7x \cdot \sin 4x - 2\sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2}(\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

$-2\sin 4x(\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 7x + \sin 7x)$

$(\cos 7x + \sin 7x) | -\sqrt{2}(\cos 7x - \sin 7x) - 2\sin 4x | = 0$

$\cos 7x + \sin 7x = 0 \quad | : \cos 7x \quad \text{if } \cos 7x \neq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 7x - \cos 7x) = \sin 4x$

$\tan 7x = -1$

$7x = -\frac{\pi}{4} + \pi, n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$7x = \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$
 $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \cos 7x = \sin 4x$

$\sin 7x \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \sin \frac{\pi}{4} = \sin 4x$

$\sin(7x - \frac{\pi}{4}) = \sin 4x$

$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $4x = \pi - 7x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$q = -k: x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi q}{3}, q \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi q}{3}, q \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{44} + \frac{2\pi y}{11}, y \in \mathbb{Z}$$

$$5. \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$\text{Рассмотрим (1): а) при } \begin{cases} y-3-x \leq 0, \\ y-3+x \leq 0, \end{cases} \begin{cases} -y+3+x-y+3-x=6 \\ -2y+6=6 \end{cases} \quad \text{б) при } \begin{cases} y-3-x \leq 0, \\ y-3+x \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0-3-x \leq 0, \\ 0-3+x \leq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq -3, \\ x \leq 3, \end{cases}$$

$$y = 0; x \in [-3; 3]$$

$$\text{в) при } \begin{cases} y-3-x \geq 0, \\ y-3+x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} y-3-x+y-3+x=6 \\ 2y-6=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6-3-x \geq 0, \\ 6-3+x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \leq 3, \\ x \geq -3, \end{cases}$$

$$y = 6; x \in [-3; 3]$$

$$\begin{cases} -y+3+x+y-3+x=6 \\ 2x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3-x \geq 0, \\ y-3+x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} y \leq 6, \\ y \geq 0, \end{cases}$$

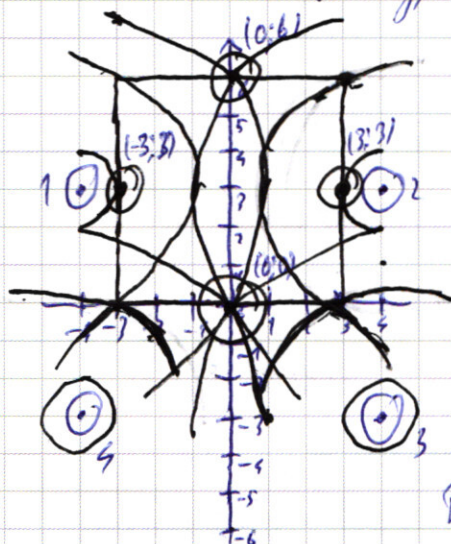
$$\text{при } \begin{cases} y-3-x \geq 0, \\ y-3+x \leq 0, \end{cases} \begin{cases} -y+3+x-y+3-x=6 \\ -2x=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-3+x \geq 0, \\ y-3-x \leq 0, \end{cases} \begin{cases} y \in [0; 6] \end{cases}$$

$$x = -3; y \in [0; 6]$$

$$2. \text{Рассмотрим 2: } (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = a \neq 0$$

Ищем уравнение окружностей с радиусом $\sqrt{a} = R$



квадрат $(-3; 6; 3; 0)$ — решение (1)

Как расположить ровно две окружности

это возможно только если:

1) Окружности 1 и 2 касаются квадрата, а окружности 3, 4 не пересекают его

2) все окружности пересекают две точки квадрата

Решим 1: это возможно при радиусах окружностей равных

~~1 и 3~~ 1, тогда $a = R^2 = 9$

Решим 2: это возможно только в том случае, когда $R^2 = (6-3)^2 + (0+4)^2 = 25$

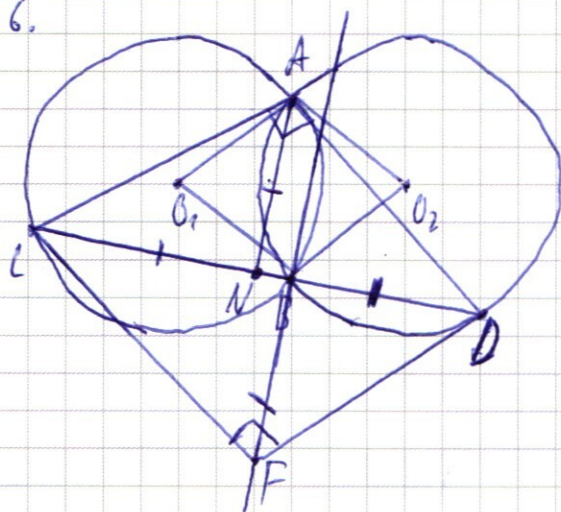
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot 9 + 16 = 25 = a$$

Ответ: Пятикласс; C -на ~~вытекает~~ имеет ровно 2 решения, при $a=1$ и при $a=25$

Ответ: 1, 25

6.



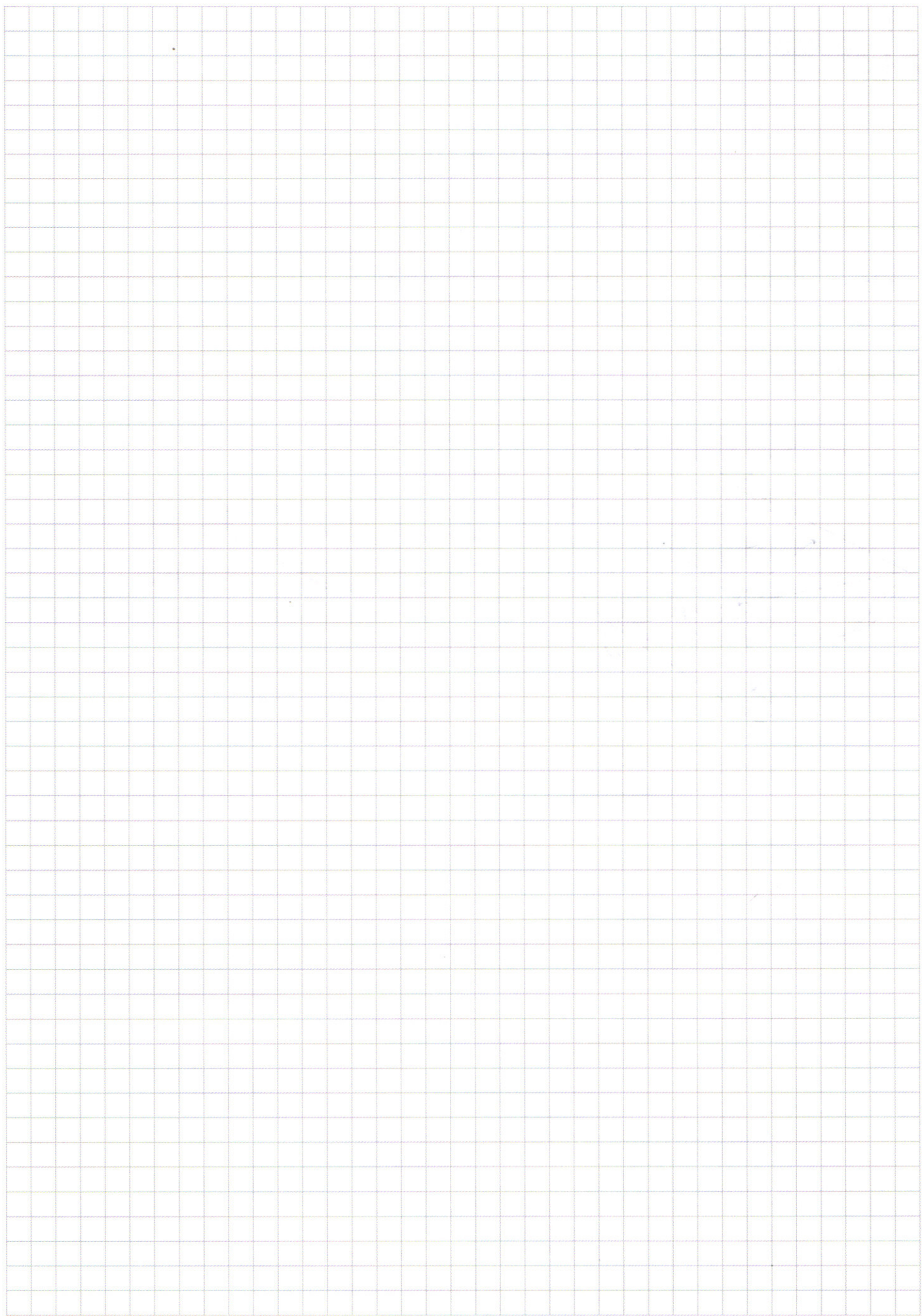
$\omega(O_1; R_1), \omega(O_2; R_1)$

$R=5$

Проведем $AN \perp CD$, $\angle CAD = 90^\circ$, тогда $CN = AN = ND$

$CN = NA = ND = NF = (NB + BD)$

$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow CD = 2R \Rightarrow CN = NB = AN = 5$

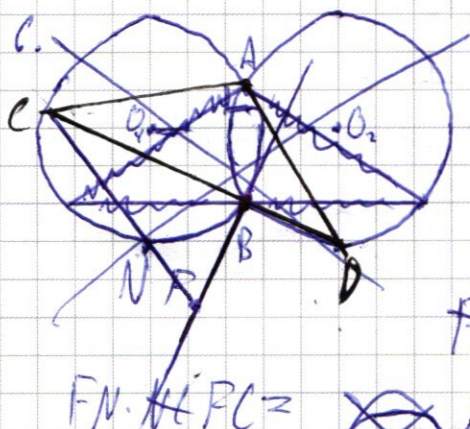


☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I $y \in [0; 6]; x \in [-3; 3]$ $x = 3; y \in [0; 6]; x = -3$
~~Получаем $y \in [0; 6]; x \in [-3; 3]$~~
 $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$
 Если $x \in [0; 3]$, то получим $(x-4)^2 + (y-3)^2 = a$ Если $x \in [-3; 0]$, то $(x+4)^2 + (y-3)^2 = a$
 Система имеет 2 решения, если I: окружности касаются квадрата,
 то есть $R_1 = 1 = a = R_2$
 $a = \sqrt{R^2}$
 Или если $R_1 > 1$, а $R_2 < 1$
 $\sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} > 1$ $\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} < 1$
 $[0; 3] (x-4)^2 + (y-3)^2 = a = \sqrt{R^2}$ $(x-4)^2 + (y-3)^2 > 1$ $\text{II } a =$
 $[-3; 0] (x+4)^2 + (y-3)^2 = a = R_2$ $(x+4)^2 + (y-3)^2 < 1$ $\text{III } a =$
 $y=0: (x-4)^2 + 9 = a$ $(x-4)^2 + 9 = a$ $16 + 9 = 25$
 $(x+4)^2 + 9 = a$ $(x+4)^2 + 9 = a$ $1, 25,$
 Ответ: 1, 25.



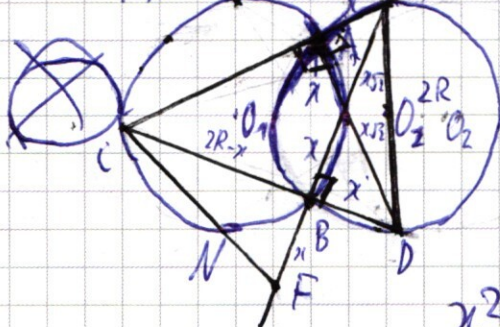
$CD = 2R$ $\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow CD = 2R = CB + BD = 7.5 = 10$

$BF = BD = CD - CB = 10 - CB$

Пусть $BD = x$, тогда $CB = 10 - x$

$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2} = \sqrt{x^2 + 100 - 20x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 20x + 100}$

FN. $EC \cap \omega_1 \cap \omega_2 = N$



~~$(x + 2\sqrt{2})^2 + x^2 = 100$~~

$x^2 + 2\sqrt{2}x^2 + x^2 + x^2 = 100$

$x^2(4 + 2\sqrt{2}) = 100$

$x^2 + z^2 = 100$

$$7. \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases} \quad 70 + (2^{64} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \quad 70 + (2^{65} - 1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{65} = 0$$

$$\text{Пусть } 70 + (2^{64} - 1)x = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \quad y' = 2^{65} - 1 - x \cdot 2^{x-1}$$

$$f' = 70(2^{64} - 1)x - \log \uparrow \quad y' = 0, 2^{65} - 1 = x \cdot 2^{x-1}$$

$$g = 2^x + 3 \cdot 2^{65} \uparrow \quad 2^{65} = x \cdot 2^{x-1} + 1$$

$$\log_2 2^{65} = \log_2 (x \cdot 2^{x-1} + 1); 65 = \log_2 (x \cdot 2^{x-1} + 1)$$

$$g = \log_2 (x \cdot 2^{x-1} + 1) = ? \text{ корень только 1}$$

$$2. \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x \quad \cos 7x + \sin 7x = 0$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x \quad \cos 7x = -\sin 7x$$

$$-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \quad -\log 7x = 1$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) \quad \log 7x = -1$$

$$\sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x - \cos 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 7x - \cos 7x)$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x - \cos 7x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 4x = \sin 7x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos 7x \cdot \sin \frac{\pi}{4}$$

$$1) \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi n \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = \sin (7x - \frac{\pi}{4})$$

$$4x = 7x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$g = -k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi g}{3}, g \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi g}{3}, g \in \mathbb{Z}$$

3.

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^{2\log x y}, & \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^{2\log x + 2\log y}; \quad \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\log x} = y^{2\log x} + y^{2\log y} \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0; \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $3375 = 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3 \cdot 3^3$

Получается эти числа $\neq$ могут состоять ~~из~~ из цифр 5, 3, 9, 1 и ~~еще~~ цифр 5 должно быть три.

цифер 3 три или одна, цифер 9 ноль или одна, цифер 1 же или три

Угору 5 можна вибрати C_8^3 способів $\cdot C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 186$

II Тогда очередь мы можно выбрать $C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ $\frac{6}{186}$ ~~$\frac{60}{21 \cdot 10}$~~

Индукция $\Rightarrow$ 1 можно выбрать $C_2 = \frac{2!}{(2-2)!} = 2 \times 2$ факт, может не считаться

Но так как нету разницы мы не будем у нас есть симметричные, то ответ можно еще разложить на $3!$, $3!$ и $2!$ соответственно

$$\frac{186}{3!} = 31, \quad \frac{60}{3!} = 10, \quad \frac{2}{2!} = 1, \quad \frac{2!}{1! \cdot 1!} = 2, \quad \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

II Тогда учасуу 3 монны выбрати $C_5^1 = \frac{5!}{15-11! \cdot 1!} = 5$ способами

Тогда вероятность 9 можно выразить $C_3^1 = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$ способами

А теперь 1 можно выбрать $C_3^3 = \frac{3!}{(3-3)! \cdot 3!} = 1$ способом

разрабатывается:

$$560 \cdot 2 = 1120$$

$$A: P_1(5) = 31; P_1(3) = 10; P_2(1) = 1 \quad P(5) = 31; P_2(3) = 5; P_2(1) = 4$$

II способ подсчета: $P_A \cdot B_1 \cdot 10 \cdot 1 = (P_5) \cdot P_1(8) \cdot P_2(1) = 310$ вариантов (то же б/з)

II) способ найдем $31.5.4 \Rightarrow 620 = P_5 \cdot P_2 | 31 \cdot P_2 | 41 \Rightarrow P_1 A_2$

~~Answer~~ $S(P) = P(A_1) + P(A_2) = 620 + 310 = 930$

$$\begin{array}{r} 560 \\ \times 3 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Amber: 9309680

2. $\cos 4x - \cos 3x - \sin 4x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$

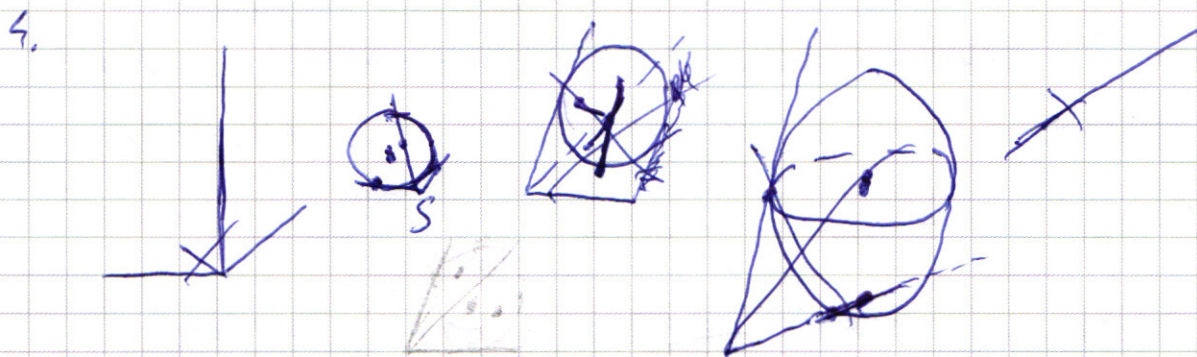
$$\cos 14x - \cos 3x = (\sin 11x - \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 14x$$

$$\begin{aligned}
 & \rightarrow 2 \cos 7x \cdot \cos 4x - 2 \sin 7x \cdot \sin 4x = 2 \cos 7x \cdot \sin 4x = \sqrt{2} \cos 4x \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x) = \sqrt{2} (2 \cos^2 7x - 1) \\
 & \rightarrow 2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = 2 \\
 & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos (11x + 3x) \\
 & \cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos 11x \cdot \cos 3x - \sin 11x \cdot \sin 3x) \\
 & -2 \sin 7x \cdot \sin 4x - 2 \sin 4x \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 14x \\
 & -2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} \cos 14x
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg 2} = y^{2 \lg xy}, \right. \\
 & \left. x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12 = 0, \right. \\
 & \left(\frac{y^5}{x} \right)^{\lg x} = y^{2 \lg x + \lg y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{y^{\lg x} \cdot x^{-\lg x}}{y^{\lg x}} = y^{\lg xy}, \\
 & 1: x^2 - 2xy + y^2 - 4y^2 - 4x + 12 = 0 \\
 & (x+y)^2 - 4y^2 = 4x - 12y \\
 & (x+y)^2 = 4y^2 + 4x - 12y
 \end{aligned}$$



5.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6, \\ (|x-4|)^2 + (|y-3|)^2 = 6, \end{cases} \\
 & x^2 - 8|x| + 16 + y^2 - 6|y| + 9 = 6 \\
 & x^2 + y^2 - 8|x| - 6|y| + 25 = 0 \\
 & x^2 + y^2 = 8|x| + 6|y| - 25 \\
 & t = y - 3 \\
 & |t - x| + |t + x| = 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} y - 3 - x \leq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 3 + x - y + 3 - x = 6 \\ -y + 6 = 6 \\ y = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 3 - x = 0 \\ y - 3 + x = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} y - 3 - x \leq 0 \\ y - 3 + x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 3 - x = 0 \\ y - 3 + x = 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} y - 3 - x \geq 0 \\ y - 3 + x \leq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y - 3 - x = 0 \\ y - 3 + x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$



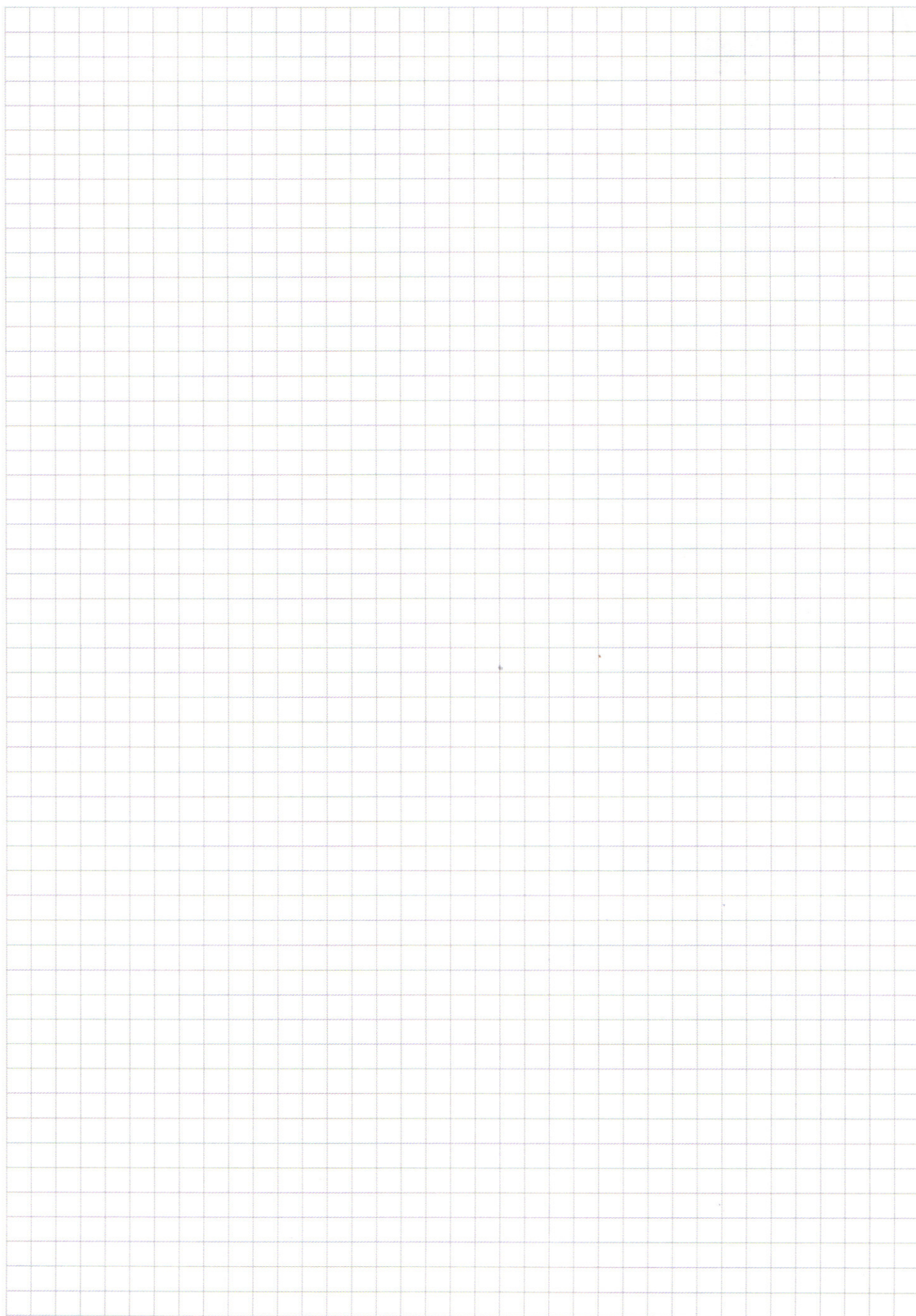
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)