

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 14x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{y^5}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg xy}, \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 4.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |y - 3 - x| + |y - 3 + x| = 6, \\ (|x| - 4)^2 + (|y| - 3)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 5 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 6$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{65} \\ y \leq 70 + (2^{64} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper, showing various algebraic manipulations and a graph of a function.

Top section: A graph of a function $y = 6 - x$ is shown. The x-axis is labeled with x and the y-axis with y . The function is a straight line with a negative slope. The graph is labeled with $y = 6 - x$ and $x = 6$.

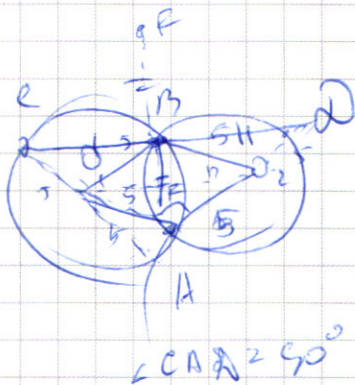
Middle section: Several algebraic manipulations are shown, including the expansion of $(x-2)^2 - (2y-3)^2$ and the simplification of $(5-x) + (5x+x) = 6$.

Bottom section: The work continues with the expansion of $(x-2)^2 - (2y-3)^2$ and the simplification of $(y-3) \geq |x|$ and $(y-3) \leq -|x|$.

Equations and inequalities shown:

- $(x-2)^2 - (2y-3)^2 = 0$
- $(5-x) + (5x+x) = 6$
- $(y-3) \geq |x|$
- $(y-3) \leq -|x|$
- $3 \leq x \leq 3$
- $8 + (|x|-4)^2 = 0$

6

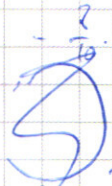


$$x_{\sin} = \frac{y}{\cos \alpha}$$

$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{BN}{\cos \alpha}$$

$$\cos 90^\circ = 0$$

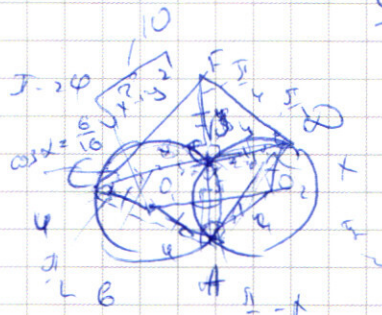
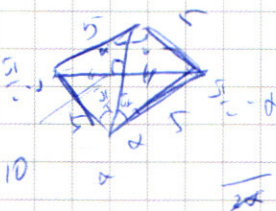
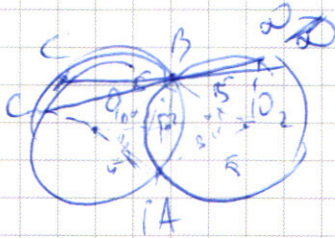
$$\frac{6}{10} = \frac{6}{10} = \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$$



$$50 = 2 \cos(\pi - 2\alpha) \cdot 25$$

$$+ 50 = 2 \cos(2\alpha) \cdot 15 \frac{y}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\cos \alpha}$$

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin \alpha}$$



$$\pi - x + \alpha$$

$$\pi + \frac{\pi}{2} - 2x = \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$



$$50 = 2 \cos 2\alpha \cdot 25 = 100$$

$$2 = 2 \cos 2\alpha = 4$$

$$1 - \cos 2\alpha = 2$$

$$\cos 2\alpha = -1$$

$$\cos 2\alpha = -1$$

$$2\alpha = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{6}{10} \cdot \frac{10}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow 3 \neq 8$$

So AEP - ?

$$36 = 50 + 2 \cos 2\alpha \cdot 25 \quad \underline{BE = 6}$$

$$\frac{5}{625} \quad \frac{616}{625}$$

$$-\frac{14}{50}$$

$$-\frac{7}{25}$$

$$14 = -50 \cos 2\alpha$$

$$1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$-\frac{14}{50} = \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\frac{64}{50} = 2 \sin^2 \alpha$$

$$\frac{36}{50} = 2 \cos^2 \alpha$$

$$\frac{64}{100} \cdot \sin^2 \alpha = \frac{25}{100} \Rightarrow \frac{8}{10} = \sin \alpha$$

$$\frac{36}{100} = \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{6}{10}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① 6. унон. $a_1, a_2, a_3 = 3375$ $1 - 2\sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ $\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ $2\cos^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = \cos 2\alpha$

$33 \times 5 = 165$ $5 \cdot 5 \cdot 135$ $3375^2 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3^8$ $\frac{\cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \cos 4\alpha}{2}$ $2(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2})$

$30 \begin{array}{r} 645 \\ 30 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 335 \\ 10 \\ 27 \end{array}$ $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $2(\frac{\cos 2\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\cos 2\beta - 1}{2} - \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1 - \cos 2\beta}{2})$

$6 \text{ простых чисел } < 10 \Rightarrow 4 \cdot 22 = 88$

$\Rightarrow$ унон 2, 4, 6, 7, 8, 10 - не могут

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $2 \cdot 100 = 14^2 \cos 2\alpha - \cos 2\beta = 2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

8 позиций $\text{пусть } \alpha, \beta, \gamma: \alpha, \beta, \gamma \text{ - стороны } 3\text{-угольника}$

$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ $C_8^3 = C_5^3$ $\text{ост. } 5$

$(\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2}) \cdot (\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \frac{\beta}{2})$ $3 \text{ знака } 5-8 \text{ и } 1-3$

$\frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7$ $C_8^3 \times C_5^1 \times C_4^1 \text{ ост. } 1$ $3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 10$

$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ $C_8^3 (C_5^3 + C_5^1 \cdot C_4^1)$ ответ $\times 30$ $\times 56$ $\times 56$

$10 + 2 \cdot 9 = 28$ $30 \cdot 8 \cdot 7 = 1680 \text{ чисел}$ 1680 1680

② $\cos$ $\cos x \cdot \sin y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$ $2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = \sin^2 \frac{x+y}{2} + \sin^2 \frac{x-y}{2}$

$2 \sin x \cdot \cos y = \cos(x+y) - \cos(x-y)$ $\sin(11x) + \sin(3x) = \sqrt{2} \cos 4x$ $2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

$2 \sin x \cdot \cos y = \sin(x+y) - \sin(x-y)$ $\sin x \cdot \cos y + \sin y \cos x = \sin y \cos x + \sin x \cos y$ $\sin y \cdot \cos x$

$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$ $\sqrt{2} \cos 7x - \sqrt{2} \sin 7x$ $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \cdot \sin y$

$\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ $-2 \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \cdot \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cos 4x$

$2 \sin(\frac{7}{4} - 7x)$ $-2 \sin 7x \cdot \sin 4x +$ $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$

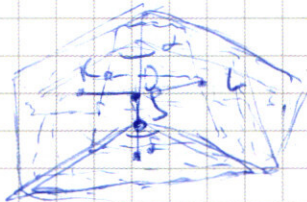
$$-2 \sin 4x (\sin 2x + \cos 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sin 4x + \cos 4x = 0 \quad \text{или:} \quad -2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)$$

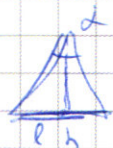
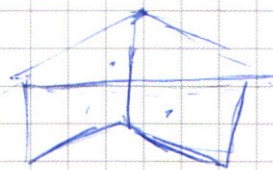
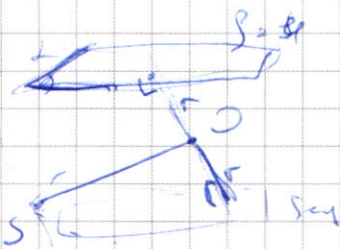
$$\sqrt{2} \sin 2x - 2 \sin 4x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$\sin 2x - \sqrt{2} \sin 4x = \cos 2x$$

3



$\angle KSO = ?$



$$(y-3-x)^2 + 12x + 4yx$$

$$4(3x-y)$$

5

q-? $\angle$ перпендикуляр

$$\begin{cases} |y-(3+x)| + |y-(3-x)| = 6 \\ |x-4|^2 + (|y|-3)^2 = q \end{cases}$$

$$\sqrt{y^2 + x^2 + 9 - 6x - 2y(3-x)} + \sqrt{y^2 + x^2 + 9 + 6x - 2y(3+x)}$$

$$\sqrt{y^2 - 6y + 2yx + x^2 + 9 - 6x} + \sqrt{y^2 - 6y - 2yx + x^2 + 9 + 6x}$$

$$(y-3)^2 + (x-3)^2 + (x+y)^2 - x^2 - y^2 - 9$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

- ① Разложим 3375 на простые множители: $3375 = 5^3 \cdot 3^3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ т.к. +то произведение 8-ми цифр, то среди
 них не может быть $2, 4, 6, 7, 8, 0$ т.к. 3375 не делится
 на эти цифры и 0 дает 0 . Теперь рассмотрим
 случаи: Случай - среди 8-ми цифр нет $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ сначала «раскладываем» пятёрки на позиции - C_8^3 ,
 потом тройки - C_5^3 остальные 2 места - $1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ всего способов $C_8^3 \cdot C_5^3$
 Случай - среди 8-ми цифр есть - тогда всего
 3 пятёрки, одна девятка, одна тройка, и три единицы
 $\Rightarrow$ снова пятёрки - C_8^3 , потом единицы C_5^3 и
 тройка и девятка $\Rightarrow \times 2$ всего: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ всего таких чисел: $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = 3 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} =$
 $= 1680$ чисел

Ответ: 1680.

- ② $\cos 11x - \cos 3x - \sin 11x + \sin 3x = \sqrt{2} \cos 4x$
 $-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 4x + 2 \cdot \sin(-4x) \cdot \cos 7x = \sqrt{2} \cdot (\cos^2 7x - \sin^2 7x)$
 $-2 \sin 4x (\sin 7x + \cos 7x) = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x) (\cos 7x + \sin 7x)$
 1) $\sin 7x + \cos 7x = 0$ или 2) $-2 \sin 4x = \sqrt{2} (\cos 7x - \sin 7x)$
 $(\cos 7x \neq 0)$ $\tan 7x = -1$ $-2 \sin 4x = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x \right)$
 $7x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$ $-\sin 4x = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right)$
 $x = -\frac{\pi}{28} + \frac{\pi k}{7}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$ $\sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin 4x = 0$

Решение 2

2.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin(x) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{11x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} - \pi k$$

$$\frac{11x}{2} = -\frac{3\pi}{8} - \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

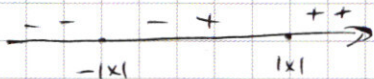
$$x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, x = -\frac{3\pi}{44} - \frac{2\pi k}{11}, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$

5)

$$\begin{cases} |y-3-x| + |y-3+x| = 6 & (1) \\ (|x|-4)^2 + (|y|-3)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

(1): Пусть $y-3 = e$: $|e-x| + |e+x| = 6$

Раскрытие модулей: 

++: $2e = 6 \Rightarrow e = 3 \Rightarrow y = 6$ (A)

-+: $2x = 6 \Rightarrow x = 3$ (Б)

--: $-2e = 6 \Rightarrow e = -3 \Rightarrow y = 0$ (B)

(A): $3 \geq |x|$ и $y = 6 \Rightarrow$ (2): $3 + (|x|-4)^2 = 9$

$x \in [0; 25]$

тоже самое от 16 (x=0) до 1 (x=3; -3)

а от 10 до 25, но в 25 не встает т.к. решение

(Б): $-3 \leq |x| \leq 3 \Rightarrow x = 3$

$-3 \leq y-3 \leq 3$

$0 \leq y \leq 6$: $3 + (|y|-3)^2 = 9$

от 9 до 0 $\Rightarrow$ от 1 до 10 (y=0)

причем 1 не вкл. т.к. только

сравнивать

$a \in [2; 10]$

(B): $y \geq 0$ $y-3 \leq -|x| \Rightarrow -3 \leq -|x|$
 $|x| \leq 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ иrogenез

$$9 + (|x| - 4)^2 = 0$$

$$|x| \leq 3 \quad y = 0$$

$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ т.к. решения $z \Rightarrow$ если $|x-4| \neq 0 \Rightarrow$ (отм. $\frac{4}{5}, 3, 5, 2, 6, \dots$)

→ (2 предложения от $|X|$ и ещё 2 предложения, но если модально)

не центр не находится в $(-3; 3) \Rightarrow 0m - 3g - 4 \rightarrow$

$\Rightarrow$ 5000 можно $\Rightarrow$ (хотим 5000 и больше)

9 ~~28~~ 25

$$x \notin [-3, 3]$$

при любом k кроме 0 сего нет $\Rightarrow$

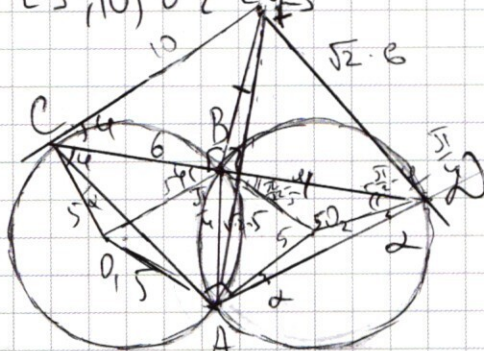
$$\Rightarrow a \in [30, 25)$$

$x \in \{4, 4, -4\}$
 ~~$(4, 4, -4)$~~
 один из которых
 симметричен)

Обобщенное выражение, что ир $a \in [1; 10) - 2$ пер.

он $(10; 25)$ - элемент $(B \cup A)$ и $a = 25 - 2$ элем. $(\{A\} \cap \{B\})$

Orbiter: $a \in \{1, 10\} \cup \{2, 5\}$



CF-7

CF r?

5) рассмотрим $\triangle ABC$
и $\triangle ABD$

$$AB - 0.54 \text{ gms} < A \cap B = < B \text{ and } A$$

Т.к. АВ - равна
в обоих окр. 43-32

$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{HCO}_3^-$

2) wasage wo Th. sin $6 \rightarrow \pi$ & Δ

$$\frac{AB}{\sin(\angle BCA)} = \frac{AD}{\sin(\angle ADB)} \quad \text{u} \quad \frac{AC}{\sin(\angle CBA)} = \frac{AD}{\sin(\angle CAD)}$$

е) Продолжение

тогда т.к. $AC = AD \Rightarrow \angle CAD_1 = \angle CAD_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle O_1AD_1 = 90^\circ (90 + 4 - 4 = 90) \Rightarrow \angle CBO_1 = 4$$

$$\text{и } \angle O_1BO_1 = \frac{\pi}{2} - 4$$

5) Th. косинусов в $\triangle O_1CB$ и $\triangle O_2BD$:

$$50 - 2\cos(\pi - 24) = BC^2$$

$$50 - 2\cos(24) = BD^2 \quad BC^2 + BD^2 = 100$$

$$\text{т.к. т.к. } \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\text{и } BC^2 + BD^2 = BC^2 + BF^2 = CF^2 \Rightarrow CF^2 = 100 \Rightarrow CF = 10$$

и) Пусть $BC = 6$ тогда $BF = BD = 8$ (из Th. Пифагора)

$$\text{тогда } \cos 4 = \frac{3}{5}, \sin 4 = \frac{4}{5}$$

$$\text{и } \cos(\angle FCB) = \frac{3}{5} \text{ и } \sin(\angle FCB) = \frac{4}{5} \Rightarrow \angle FCB = 4$$

Пусть тогда $\angle CAD_2 = \angle O_1CA = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{для точки } O_2: 24 + \frac{\pi}{2} + \pi - 2\alpha = 2\pi$$

$$2(4 - \alpha) = \frac{\pi}{2}$$

$$4 - \alpha = \frac{\pi}{4}$$

и тогда $\triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \triangle ACF$ по 2 углам:

$$\frac{6}{AC} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{10} \Rightarrow \frac{6}{\sqrt{2}} = AC \quad AC = 3\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{и } S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 =$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACF} = \frac{10 \cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot 2} \cdot 9 = 9 \quad \text{Ответ: а) 10, б) 9}$$

г)

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{6-x} \\ y \leq 70 + 2^{6-x} \cdot x - x \end{cases}$$

Сравним 2 числа:

$$1) 70 + 2^{6-x} \cdot x - x \text{ и } 2^x + 3 \cdot 2^{6-x}$$

если $x \leq 6$ то $A \leq B$

$$\text{в } 6: 64 + 2^{6-6} \cdot 6 - 6 \text{ и } 2^6 + 3 \cdot 2^{6-6}$$

равенство

2) Значит $x \geq 7$, теперь

max числа при $x \leq 70$

$$\text{т.к. } A - B: (70 - x) + 2^{6-x} \cdot (x - 6) - 2^x$$

при $x \geq 7$ $70 - x > 0$ и $2^{6-x} \cdot (x - 6) > 2^x$ и после 2^x убывает, а 2^{6-x} лишь $6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ и 2^x лишь 2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦ Продолжение: найти x $7 \leq x \leq 63$

↓ Ответом $\sum_{x=7}^{x=63} (70-x) + 2^{64} (x-6) - 2^x =$

$$= (64 \cdot 31 + 32) + 2^{64} (64 \cdot 31 + 32) - \sum_{x=7}^{x=63} 2^x =$$

$$= (64 \cdot 31 + 32) (1 + 2^{64}) - \sum_{x=7}^{x=63} 2^x = \underline{\text{Ответ}}$$

③ $\begin{cases} \left(\frac{y}{x}\right)^{\lg x} = y^{2 \lg y} & (1) \\ x^2 - 2xy - 4x - 3y^2 + 12y = 0 & (2) \end{cases}$

(2): $(x-2)^2 - (2y-3)^2 = -5$, $(1) \Rightarrow (4+2y)^2 - 4(12y-3y^2)$

(1): $\frac{y^{\lg x}}{x^{\lg x}} = y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg y}$ $16 + 4y^2 + 316y - 48y + 12y^2 =$
 $= 16y^2 - 32y + 16 = 4(y-1)^2$

$16 \lg x - \lg y + 21 \lg y \cdot \lg y + \lg^2 x = 0$

$21a^2 + 16ab + b^2 = 0$

$a = \frac{-8b \pm \sqrt{64b^2 - 21b^2}}{42}$

$\lg y = \frac{-8 \lg x \pm \lg x \sqrt{43}}{21}$

(2): $0 = 16(y-3)^2 \Rightarrow x = \frac{4+2y \pm 4|y-3|}{2}$

$y \geq 3: x = \frac{4+2y \pm 4y-4}{2}$

$x_1 = 3y \quad x_2 = 0-y$

$y \leq 3: x = \frac{4+2y \pm 4-4y}{2}$

$x_1 = 4-y \quad x_2 = 2y$

3) упрощение

Если $y \leq 1 \Rightarrow \lg y \leq 0 \Rightarrow$

Рассмотрим

A) $x = 4 - y$

$$\lg y = \frac{8 \lg 4 - y \pm \lg 4 \cdot \sqrt{43}}{21}$$

$$\frac{\lg y}{\lg 4 - y} = \frac{8 \pm \sqrt{43}}{21}$$

B) $x = 3y$

$$\lg y = \frac{8 \lg 3y \pm \lg 3y \sqrt{43}}{21}$$

$$\frac{\lg y}{\lg 3y} = \frac{8 \pm \sqrt{43}}{21}$$

(1) $\frac{y^{5 \lg x}}{x^{2 \lg x}} = y^{2 \lg x + y}$

$$\frac{y^{5 \lg x}}{x^{2 \lg x}} = y^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{-3 \lg x} \cdot x^{2 \lg x} \cdot y^{2 \lg y} = 1 \quad (\text{пока не упрощаем})$$

$$-3 \lg x \cdot \lg y + \lg x \lg x + 2 \lg y \lg y = 0$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \sqrt{9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y}}{2}$$

$$\lg x = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\lg x = 2 \cdot \lg y$$

$$x = y^2$$

$$\lg x = \lg y$$

$$x = y$$

$x = 4 - y$ или $x = 3y$

$x = 4 - y$ или $x = 3y$

$$4 - y = y^2$$

$$4 - y = y$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$-1 \pm \sqrt{17}$$

$$y = 2$$

$$y^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{8 \pm 1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$3y = y^2$$

$$y = 0 \text{ или } y = 3$$

$$x = 0 \quad x = 9$$

Ответ: $(\frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}), (0, 0), (9, 3), (2, 2)$